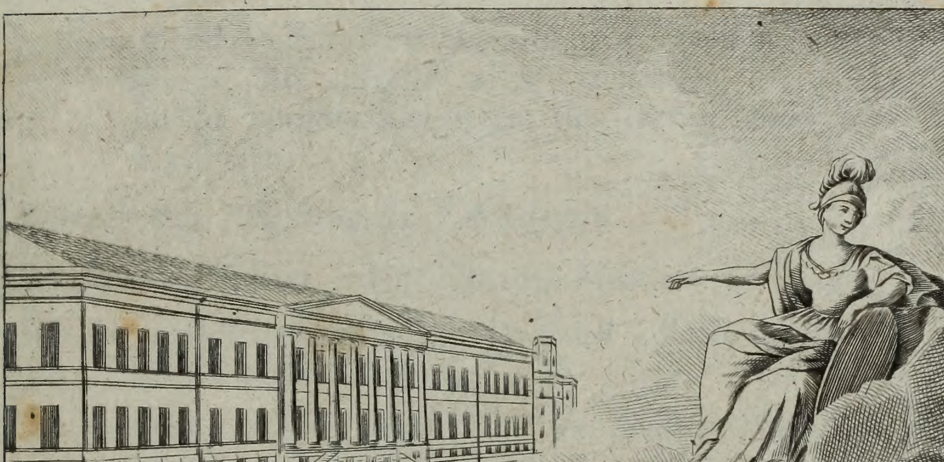
S. 1802. C. 58.

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS XI.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCXCIII.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCVIII.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCXCIII.

HISTOIRE. Pag.

Jugement de l'Académie ſur le ſeul mémoire qui lui a été adreſſé pour concourir au prix ſur la preſſion réciproque des terres contre les revêtemens - - - - - - - 3.

Extrait des Régiſtres de l'Académie

Sur la congélation artificielle du Mercure - - 8.

Sur la cryſtallifation de l'eſprit alcali volatil cauſtique de ſel ammoniac - - - - - - 9.

Sur l'emploi du ſel ammoniac fixe pour produire un froid artificiel très grand - - - - 10.

Sur une parfaite guériſon de la gangrène opérée par l'emploi du charbon de bois pulveriſé - - ibid.

Pag.

Notice ſur un tremblement de terre aux environs d'Irkoutzk - - - - - - - ibid.

Cryſtalliſation de la chaux d'Arſenic - - - - 11.

Expériences ſur l'eau de mer puiſée dans la mer du Nord - - - - - - - ibid.

NOTICES *communiquées & lues dans les ſéances académiques.*

Expériences ſur les qualités phoſphoriques de pluſieurs pierres, par M. Severgyne - - - 12.

Sur la cryſtalliſation du ſel muriatique à baſe de manganèſe, par M. Lowitz - - - - 14.

Analyſe chymique du Zéolithe jaſpitique en maſſes, d'Ochotzk, par le même - - - - 15.

Analyſe chymique de deux nouvelles eſpèces de pierres, par le même - - - - - 19.

Notice ſur une quatrieme eſpèce de Zéolithe en maſſes, trouvé à Ochotzk, par M. Severgyne - - 22.

OUVRAGES *manuſcrits préſentés à l'Académie* - - 23.

OUVRAGES *imprimés, envoyés & préſentés à l'Académie* - - - - - - - 26.

PRODUCTIONS *de la Nature, dont le cabinet de l'Académie a été enrichi* - - - - - 29.

MORTS

Pag.

MORTS - - - - - - 30.

RÉCEPTIONS - - - - - 31.

AVANCEMENS & *promotions* - - - 32.

LEÇONS *publiques* - - - - - 33.

OUVRAGES *publiés par l'Académie* - - - - ibid.

SUPPLEMENT.

Mémoires étrangers lûs & approuvés par l'Académie

Obſervationes analyticae ad L. Euleri *inſtitutiones calculi integralis. Vol. IV. Supplem. II & IV. Auctore* I. F. Pfaff - - - - - - - 37.

Recherches ſur les équations linéaires aux différences partielles du ſecond degré. Second mémoire. Par M. Jean Trembley - - - - - - 58.

Solution du Problème de décompoſer les nombres non-carrés, en deux, trois ou quatre carrés. Par M. C. F. Kausler - - - - - - 125.

EXTRAIT *des mémoires contenus dans ce volume.*

Claſſe Mathématique & Phyſico-mathématique - 159.

Claſſe Phyſique - - - - - - - 179.

Claſſe Aſtronomique & Météorologique - - - 190.

NOVA

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS XI.

Cum XI. Tabulis aeri inciſis.

MATHEMATICA ET PHYSICO-MATHEMATICA.

Pag.

LEONH. EVLER. *De formulis differentialibus ſecundi gradus, quae integrationem admittunt* 3.

— — *Formae generales differentialium quae etſi nulla ſubſtitutione rationales reddi poſſunt tamen integrationem per logarithmos & arcus circulares admittunt* - - - - - - 27.

— — *De novo genere quaeſtionum arithmeticarum, pro quibus ſolvendis certa methodus adhuc deſideratur* - - - - - - - 78.

— — *Methodus facilis inveniendi ſeries per ſinus coſinusve angulorum multiplorum procedentes, quarum uſus in univerſa Theoria Aſtronomiae eſt ampliſſimus* - - - - - - 94.

— — *Disquiſitio ulterior ſuper ſeriebus ſecundum multipla cuiusdam anguli progredientibus. Tab. I. fig. 6* - - - - - 114.

— — *Inveſtigatio quarundam ſerierum quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum ve-*

ro

Pag.

ro proxime definiendam maxime ſunt accommodatae - - - - - - - - - - 133.

LEONH. EVLER. *De novo genere ſerierum rationalium et valde convergentium, quibus ratio peripheriae ad diametrum exprimi poteſt* - - 150.

NICOL. FVSS. *Vlteriores disquiſitiones circa ſeries, quibus ſinus et coſinus angulorum multiplorum exprimuntur* - - - - - - - 155.

FRID. THEOD. SCHVBERT. *De inventione diviſorum* - - - - - - - 172.

NICOL. FVSS. *Dilucidationes ſuper problemate geometrico: de Ellipſi minima, per data quatuor puncta, ducenda. Tab. I. Fig. 1. 2. 3. 4. 5.* 187.

STEPH. RVMOVSKY. *Integratio formularum*

$\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ et $\frac{\partial x \sqrt[3]{(1-x^3)}}{1+x}$ - - 213.

NICOL. FVSS. *De minimis quibusdam geometricis, ope principii ſtatici, inventis. Tab. II. Fig. 1 – 6. Tab. III. Fig. 1 – 6. Tab. IV. Fig. 1 – 4.* 220.

WOLFFG. LOUIS KRAFFT. *Sur les plus grandes portées des pieces d'Artillerie eu égard à la réſiſtance de l'air. Tab. IV. Fig. 5.* - - 246.

PHYSICA. - -

TOB. LOWITZ. *Expoſitio novarum circa ſalium cryſtalliſationem obſervationum, nec non novae en-*

chei-

Pag.

cheireſis, qua ſalia ad meliorum cryſtallorum regularium formationem, disponuntur - - 271.

BASIL. SEWERGYN. *Enumeratio mineralium quorundam rariorum, in muſeis nonnullis Petropolitanis, obviorum* - - - - - - - - 289.

TOB. LOWITZ. *Experimentorum, circa ſummam ſpiritus vini dephlegmationem a me inſtitutorum, expoſitio* - - - - - - - 299.

— — *Expoſitio methodi novae, naphtam vitriolicam ad ſubtilitatis & puritatis gradum hodierno maiorem perducendi* - - - 320.

B. F. J. HERMANN. *Déscription de la mine d'argent de Salairsk' aux monts d'Altai en Sibérie. Tab. V.* - - - - - - - 348.

JOAN. LEPECHIN. *Epilobii ſpecies nova. Tab. VI.* 370.

NICOL. OZERETSKOVSKI. *Saponis Lapponici praeparatio & uſus.* - - - - - - 372.

B. F. J. HERMANN. *Notice ſur les charbons de terre dans les environs de Kousnetz en Sibérie. Tab. VII. VIII.* - - - - - 376.

BASIL. SEVERGYN. *Obſervations ſur quelques ſpaths fluors de Nertschinsk'.* - - - - - 382.

J. TH. KOELREVTER. *Mirabiles Jalapae hybridae* 389.

JOAN. LEPECHIN. *Senecionis ſpecies nova. Tab. IX.* 400.

JAQ. SACAROF. *Mémoire ſur la maniere la plus facile & la plus prompte, de préparer l'Acide nitrique le plus pur & le plus fort* - - 403.

AN-

Pag.

ANDRÉ de NARTOF. *Notice ſur une nouvelle eſpece de Granit, trouvée aux environs de la mer blanche. Tab. X.* - - - - - - - 415.

B. F. J. HERMANN. *Sur l'exploitation des mines de l'Empire de Ruſſie, avec deux tables imprimées. pag. 428 & 430.* - - - 418.

COMTE de MOUSSIN POUSCHKIN. *Sur une nouvelle méthode de cryſtalliſer les régules d'or & d'argent. Tab. XI.* - - - - - 434.

ANDRÉ de NARTOF. *Notice ſur le cryſtal ſpathique jaune qui double les objets: trouvé nouvellement en Ruſſie.* - - - - - 437.

ASTRONOMICA ET METEOROLOGICA.

F. TH. SCHVBERT. *De perturbatione motus Urani. Diſſertatio I.* - - - - - 441.

—— —— —— *De perturbatione motus Urani. Diſſertatio II.* - - - - - - - 464.

PETR. INOCHODZOV. *Occultationes trium Stellarum fixarum a Luna, Petropoli anno 1796 in ſpecula domeſtica, obſervatae.* - . - 484.

—— —— —— *Eclipſes Satellitum Jovis, Petropoli anno 1796 in ſpecula domeſtica, obſervatae.* - 488.

TH. FR. BEITLER. *Obſervation de l'éclipſe du Soleil du 3 Avril 1791 faite à l'Obſervatoire du College académique de Mitau en Courlande; avec la détermination de la longitude géographique du dit obſervatoire, réſultante de différentes obſervations.* - - - - - 492.

Pag.

TH. FR. BEITLER. *Obſervation de l'obliquité de l'écliptique dans le ſolſtice d'été 1796. faite à l'Obſervatoire du Collége académique de Mitau en Courlande.* - - - - - - 499.

—— —— —— *Obſervations, des éclipſes des ſatellites de Jupiter, faites en 1796 à Mitau en Courlande à l'Obſervatoire du Collège académique: avec une Table imprimée pag. 504.* - 503.

MAUR. HENRY. *Occultation de ε du Capricorne, obſervée à l'Obſervatoire de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.* - - - 507.

STEPH. ROVMOVSKI. *Determinatio differentiae meridianorum Petropolis, Gothae & Lilienthal ex occultatione a Luna binarum ſtellarum δ Tauri.* 511.

MAUR. HENRY. *Réſultats du calcul de la conjonction de Saturne & de la Lune, obſervée à la tour aſtronomique de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.* - - - - - - 520.

—— —— *Eſſais ſur la détermination de la longueur du pendule ſimple, ſous la latitude de St. Pétersbourg.* - - - - - - 524.

—— —— *Obſervation de la déclinaiſon de l'éguille aimantée faite à St. Pétersbourg le 23 Août 1797.* - - - - - - - 531.

B. F. J. HERMANN. *Extrait des obſervations météorologiques faites à Pyſchminsk près de Cathérinebourg aux monts Oural en Sibérie. Année 1791 ſuivant le nouveau Stile.* - - - 533.

J. AL-

Pag.

J. ALBERT EULER. *Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1793, d'après le nouveau Stile.* - - - - - 543.

J. G. STRITTER. *Extrait des obſervations météorologiques faites à Moscou en 1793, d'après le nouveau Stile.* - - - - - 563.

Errata.

Errata.

Pag.	80,	lin.	3.	loco	$(x x - y y)$	lege	$(x x - y y)^2$
——	—		7.	——	Z	——	z
——	—		8.	——	Z	——	z
——	—		10.	——	Z	——	z
——	111,	—	16.	——	$\frac{1}{2} : 0$	——	$\frac{1}{2} \Gamma : 0$
——	122,	—	1.	——	$\frac{2}{4}(2) \frac{4.3}{4.8}(4)$	——	$\frac{2}{4}(2) + \frac{4.3}{4.8}(4)$
——	124,	—	10.	——	$\frac{1}{2}(2)$	——	$\frac{1}{4}(2)$
——	—	—	16.	——	$\frac{7.6.5}{4.8.12}(8)$	——	$\frac{8.7.6}{4.8.12}(8)$
——	—	—	17.	——	$\frac{9.8.7.6}{4.8.12.16}(10)$	——	$\frac{10.9.8.7}{4.8.12.16}(10)$
——	132,	—	1.	——	$\frac{9.3.7}{4.8.12}(9)$	——	$\frac{9.8.7}{4.8.12}(9)$
——	159,	—	13.	——	$\frac{z \partial s}{\partial^2}$	——	$\frac{z \partial s}{\partial z}$
——	212,	—	8.	——	quorumque	——	quarumque
——	516,	—	21.	——	30	——	— 30
——	510,	—	1.	——	$317° 22' 10'', 7$	——	$317° 23' 41'', 9$

Pag. 400, — *ad marginem* lege Tab. IX.
—— 415, — *ad marginem* loco Tab. IX. lege Tab. X.
—— 436, — *ad marginem* —— Tab. X. —— Tab. XI.

In Tomo IX. Novorum Actorum
Table des Matieres
Pag. VII. lin. 9. loco Pleuronectoris lege Pleuronectis.

HIST.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
ANNÉE MDCCXCIII.

L'Académie avoit demandé pour le Prix de cette année, une Théorie plus complette & plus conforme à l'expérience, de la preſſion des terres contre les revêtemens, & de la réſiſtance que les revêtemens oppoſent à cette preſſion: une Théorie dans laquelle on tient compte, ſurtout des effets de l'humidité & de la ténacité des terres, & de la cohéſion de la maçonnerie deſtinée à les contenir. Elle n'a reçu ſur cette matiere qu'un ſeul mémoire, écrit en françois & portant pour déviſe: *Le temps préſent eſt gros de l'avenir.*

Mrs. les Membres de la Claſſe de Mathématiques ayant été nommés pour examiner ce mémoire, tous les avis ſe réunirent avec un accord parfait, & M. l'Académicien Fuſs en fit à l'Académie le rapport ſuivant.

On doit régretter, que l'Auteur anonyme de cet unique mémoire ait négligé le point eſſentiel de la queſtion en s'engageant dans des recherches intéreſſantes à la vérité, mais qui ne contribuent en rien au perfectionnement de la Théorie, que l'Académie avoit en vüe.

Le mémoire contient les détails d'un grand nombre d'expériences qui tendent toutes à prouver que la quantité de la preſſion dépend eſſentiellement 1°. de la ſechereſſe ou de l'humidité des matieres écroulantes; 2°. de leur élévation ou de leur adhéſion; 3°. de la configuration de l'eſpace où elles agiſſent, entant qu'il favoriſe plus ou moins l'engrainement des particules.

Les principales conſéquences que l'Auteur tire de ſes expériences ſont.

a.) Qu'en général la ſechereſſe des matieres écroulantes augmente la preſſion, & que l'humidité la diminue.

b.) Que la terre ſeche eſt plus avantageuſe que le ſable ſec.

c.) Que le différent degré d'humidité des terres ne produit pas des variations auſſi conſidérables dans la quantité de la preſſion, que le différent degré d'humidité des ſables.

d.) Que la preſſion devient d'autant plus petite, que les particules des matieres écroulantes ſont mieux diſpoſées à s'engrainer.

e.)

e.) Que la véritable preſſion, telle que l'expérience la donne, eſt toujours plus petite que le réſultat de la Théorie ordinaire, dont on fait uſage pour la calculer.

Or nous ne trouvons pas que l'Auteur ait rien déterminé ſur la quantité de l'effet que produiſent les qualités différentes qu'il a ſpecifiées dans les matières écroulantes, ni qu'il ait tiré de ſes expériences judicieuſes aucun autre parti, ſi ce n'eſt d'en conclurre que, quelles que ſoyent l'humidité, la ténacité & l'engrainement des matières, on ne risque rien en ſuppoſant la véritable preſſion égale à la moitié ſeulement de celle que donne la Théorie, eſtimation groſſiere & purement hypothetique, dont Bélidor s'eſt déja ſervi dans ſes recherches ſur cette matiere.

Il nous ſemble pourtant que ſi l'on avoit fait, d'aprés les propres idées de l'Auteur, une ſuite d'expériences, avec la même matiere, différemment humectée, en donnant au rectangle qui fait les fonctions du revetement, des épaiſſeurs telles qu'il fut ſuſceptible de commencer à être incliné par la pouſſée de la matière écroulante, élevée à une même hauteur conſtante, on auroit pu déterminer quelque choſe ſur la quantité de l'effet de l'humidité.

Nous croyons de même, qu'en faiſant une autre ſuite d'expériences avec des matieres différentes en grains, & différemment battues, mais douées d'un même degré d'humidité & avec le même rectangle, on auroit pu déterminer quelque choſe ſur la quantité de l'effet de la hauteur des matières écroulantes, ou ſur celle de l'effet du degré d'adhéſion & d'engrainement qui en dépend.

En

En introduiſant dans le calcul le réſultat de ces expériences on ſeroit parvenu à faire un pas vers la perfection d'une Théorie défectueuſe & on auroit ſatisfait à un point eſſentiel de la queſtion propoſée. Mais la formule dont l'Auteur fait uſage dans ſes calculs pour la preſſion ne tient compte que du poids des matieres écroulantes. C'eſt le tiers du triangle d'ecroulement: expreſſion connue dont l'inexactitude inconciliable avec les réſultats d'une épreuve journaliere eſt encore démontrée par les propres expériences de l'Auteur.

L'expreſſion, dont il fait uſage pour la réſiſtance, n'eſt ni plus neuve, ni plus complette que celle pour la preſſion. Il regarde, comme Belidor, Kinsky, Zach & d'autres, le revêtement comme un corps ſolide, propre à être renverſé, & qui ne réſiſte que par ſon poids. En renonçant içi à des expériences, on avoit droit d'eſpérer que dans une réponſe ſur la queſtion propoſée l'Auteur conſulteroit l'expérience journalière, & qu'en réflechiſſant de quelle manière un amas de pierres liées par du mortier peut réſiſter, & de quelle maniere, étant trop foible, il peut céder à l'action des terres qu'il doit contenir, il donneroit quelque choſe de plus ſatisfaiſant que la formule connue qui ne tient compte que du poids. L'Académie pouvoit eſpérer de voir réſolu le Problème d'une maniere plus complette, parcequ'il exiſte déja des eſſais d'une Théorie qui tient compte, quoique d'une maniere trop vague encore, tant de la ténacité des terres que de la cohéſion de la maçonnerie.

Au lieu de répondre à la queſtion propoſée, en tirant de ſes expériences des réſultats propres à perfectionner la

la Théorie, l'Auteur fait uſage de cette même Théorie défectueuſe pour examiner les revêtemens de Vauban, & pour faire voir qu'ils ne ſont que de très peu plus forts que cette Théorie ne les exige; que cependant on pourroit réduire leur épaiſſeur au ſommet & obtenir par là une diminution très conſidérable dans les frais de conſtruction, & que cette économie deviendroit encore plus grande, ſi l'on ſubſtituoit aux contreforts de Vauban des contreforts moins diſpendieux, dont l'Auteur donne les dimenſions & la figure.

Quoique nous ſoyons parfaitement du même avis : que ni la valeur conſtante que Vauban donne aux ſommets de ſes revêtemens & au rapport entre le talud & la hauteur, ni la forme conſtante qu'il donne à ſes contreforts, ne ſont bien conformes à la nature; & qu'en variant ces dimenſions & cette forme ſelon les circonſtances, on pourroit épargner des ſommes conſidérables; nous ne pouvons donner une confiance entiere aux formes & aux dimenſions de l'Auteur, parce qu'indépendamment de la défectuoſité de la Théorie, dont il fait uſage, les principes qui ſervent de baſe à ſes calculs ne ſont pas tous à l'abri de toute objection. Mais comme toutes ces recherches, quoique intéreſſantes, ſont étrangères à la queſtion propoſée, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

Il réſulte de tout ce que nous venons de rapporter, que le mémoire en queſtion ne ſauroit obtenir le prix. Mais la ſuite d'expériences pénibles & coûteuſes que l'Auteur a faites; l'examen des revêtemens de Vauban, les recherches ſur les moyens d'épargner des frais ſuperflus, donnent à ce mémoire un mérite réel. Il ne laiſſe pas de repandre quel-

que

que jour ſur la queſtion propoſée, & peut donner à d'autres, ſi d'ailleurs l'Auteur permet de publier ſon mémoire, l'occaſion de mieux approfondir cette matière importante.

L'Académie réſolut d'après ce rapport de remettre l'adjudication de ſon Prix à un autre terme, en engageant l'Auteur du ſeul mémoire qui lui eſt parvenu, à le perfectionner par de nouvelles recherches. Mais cet Auteur ayant enſuite fait redemander ſon mémoire, & perſonne n'ayant depuis envoyé au concours des réponſes plus ſatisfaiſantes, l'Académie s'eſt vu obligée quoiqu' à regrèt d'abandonner entierement cette queſtion phyſico-mathématique, d'ailleurs très importante pour l'architecture civile & militaire.

Extraits des Regiſtres de l'Académie.

Le 10 Janvier. M. Lowitz fit en préſence de Mrs. les Académiciens, les expériences ſuivantes ſur la congélation artificielle du Mercure.

La Salle où Mrs. les Académiciens s'étoient aſſemblés, avoit une temperature de 128 degrés de Délisle, qui répond à une chaleur de $11\frac{3}{4}$ degrés de Réaumur. M. Lowitz prit une jatte de bois qui pouvoit contenir à peu-prés huit livres d'eau: il y mit de la neige & du ſel cauſtique cryſtalliſé, qu'il méla enſemble. Dans cette maſſe il plaça une jatte de Serpentine, la remplit de même de neige & y méla encore de ce même ſel cauſtique. Il verſa dans ce mélange huit livres de mercure, & continuant d'y

d'y ajouter de la neige & du ſel, il rémua le tout avec un baton de bois, & en moins de 20 minutes de temps, tout le mercure s'y trouva entierement gelé. Après avoir enfin retiré cette maſſe, elle reſta encore près d'une demi-heure dans ſon état de ſolidité, où étant frappée par un marteau de fer refroidi dans le même mélange de neige & de ſel, elle paroiſſoit tantôt malléable tantôt revêche & fragile.

Enſuite une phiole cylindrique très mince & bien bouchée, ayant été remplie de $3\frac{1}{2}$ livres du mercure le plus pur, obtenu par la ſéparation du cinabre, elle fut plongée dans un mélange de neige & de ſel cauſtique cryſtalliſé, mais en plein air par un froid de 171 degrés de Délisle, ou de $11\frac{1}{4}$ degrés de Réaumur. Le froid du mélange obſervé par un thermomètre à eſprit de vin rectifié, ayant augmenté pendant l'opération jusqu'à 220 degrés de Délisle ou $37\frac{1}{2}$ degrés de Réaumur, M. Lowitz en retira la phiole, & après l'avoir transportée dans la ſalle d'Aſſemblée, il la briſa & en obtint un cylindre entierement ſolide de mercure gelé, qui étant frappé par le marteau refroidi paroïſſoit d'abord malléable, mais par un coup plus violent ſe caſſa en pluſieurs morceaux, dont les fractures étoient conchoideuſes. Cependant malgré cette fragilité apparente, on pouvoit avec un canif réfroidi au même degré, en tailler des éclats en formes ſpirales, ſemblables aux raclures de rabottage.

Le 22 Janvier, le même Académicien rapporta avoir réuſſi à cryſtalliſer le 16 de ce mois par un froid artificiel de 225 degrés de Délisle, l'eſprit alcali volatil cauſtique du ſel ammoniac, ce qu'on a cru être jusqu'ici impoſſible: & comme il eſt parvenu au commencement de cette année

à cryſtalliſer avec un égal ſuccès l'alcali minéral cauſtique; il ne reſte plus aucun doute, que tous les alcalis dans un état parfaitement cauſtique ſont effectivement cryſtalliſables.

Le 15 Avril. M. Lowitz rapporta avoir découvert par des expériences reïterées, qu'il a faites ſur le froid artificiel; que le ſel ammoniac fixe produit en le mêlant avec de la neige, un froid d'une intenſité & force égale à celle, qu'il a obtenûe par le moyen du ſel alcali cauſtique: & comme ce ſel ammoniac fixe s'engendre en très grande abondance dans les ſalines auſſi bien que dans pluſieurs préparations pharmaceutiques, & qu'on n'en retire jusqu'ici presqu'aucun profit, il eſpère qu'en l'employant pour produire de grands froids artificiels, on pourra à l'avenir ſe frayer à peu de frais une route très fertile, à des recherches en grand ſur les effèts de ces grands froids; ce qui vraiſemblablement conduira à de nouvelles découvertes phyſiques très curieuſes & importantes.

Le 26 Août. Le même Académicien communiqua une lettre de M. le Docteur Bornemann, datée de Réval le 20 Juillet, qui mande avoir gueri par l'emploi des charbons de bois pulveriſés, pluſieurs malades attaqués de la gangrène & d'autres maux ſemblables, reputés pour être incurables.

Le 9 Septembre. M. le Conſeiller de Cour Inochodzof lut une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkoutzk' le 30 Juillet, qui rapporte qu'à une diſtance de 120 verſtes d'Irkoutzk', où il ſe trouva en revenant de ſes excurſions minéralogiques, il a reſſenti de for-

fortes ſecouſſes d'un tremblement de terre, lequel a auſſi été obſervé le même jour à Irkoutzk.

Le 23 Septembre. M. Zacharof expoſa de la chaux d'Arſenic cryſtalliſée en octaëdres, qu'il a obtenue par la ſublimation, & dont les cryſtaux ſont très bien exprimés.

Le 28 Novembre. M. Lowitz communiqua des expériences qu'il a faites ſur l'eau de mer puiſée dans la mer du Nord. Elle contient trois livres de ſel dans cent livres d'eau, ſon odeur étant d'ailleurs fort dégoutante. Après en avoir mélé 10 livres avec 20 livres d'une eau douce croupie, il l'a purifiée d'après ſa méthode avec 6 onces de poudre de charbon de bois, ce qui lui a ôté toute l'odeur & lui a donné 28 livres d'une eau parfaitement claire & d'un gout agréable de ſel pur. L'ayant enſuite employée pour y cuire de la viande, il en a obtenu un bouillon d'un auſſi bon gout que l'eſt celui qu'on prépare avec de l'eau fraiche ordinaire & du ſel pur.

Le 2 Décembre. Le même rapporta avoir fait geler le 29 Novembre une maſſe de vif-argent de 35 livres de poids, par un mélange de neige & de ſel cauſtique cryſtalliſé, le froid naturel ayant été pendant cette expérience de 20 degrés de Réaumur.

Expériences ſur les qualités phosphoriques de pluſieurs pierres, communiquées à l'Académie le 14 Mars 1793.

Par M. Baſile Severgyne.

Quelque objet particulier m'engagea à faire les expériences ſuivantes, que j'ai l'honneur de communiquer à l'Académie, à cauſe des phenomènes remarquables, que j'ai eu l'occaſion d'obſerver.

Que le quartz, le cailloux & d'autres eſpéces de pierres, où la terre ſiliceuſe ſurabonde, donnent des étincelles avec le briquet, c'eſt une choſe fort connue. Que le Diamant aprés avoir été expoſé aux rayons du ſoleil, luit dans la nuit, c'eſt encore une choſe que l'on a remarquée depuis long temps. On a découvert auſſi que quelques autres eſpéces de pierres, comme les fluors, le ſpath de Bologne, luiſent dans les tenèbres, lorsqu'elles ont été échauffées auparavant. Les expériences les plus modernes ont enfin découvert d'autres eſpéces de pierres comme le ſteinmark du Hartz & une eſpéce de blende de zinck, qui donnent des étincelles par le frottement. On montre auſſi des cailloux transparens de Nertſchinsk, qui lancent, étant frottés, une lueur phoſphorique, mais de peu de durée.

J'ai varié depuis ces expériences: je frappais différentes eſpéces de pierres, non avec un briquet d'acier, mais avec un morceau de quartz & j'obſervai les phénomènes ſuivans dans l'obſcurité. — Toutes les eſpéces de pechſtein de Nicolaewskoy à Kolywan, étant battues par mon morceau de quartz, donnoient des étincelles, tandis qu'el-

qu'elles n'en produiſoient point ou fort peu ſous le briquet. Le baſalte de Dransfeld & le jaſpe verd de Cathérinebourg produiſoient des étincelles aſſez nombreuſes. Le baikalite ou une eſpéce particuliere de ſchoerl du Baikal n'en produiſoit que très peu. Le carneole rouge donnoit des étincelles fort nombreuſes; tandis que le calcedoine gris luiſoit fortement par toute ſa maſſe, au moment qu'il étoit frappé. Le ſpath fluor jaune ne donnoit que quelques petites étincelles, tandis que le ſpath fluor verd donnoit des étincelles nombreuſes, & luiſoit foiblement dans l'endroit où on l'avoit frappé; le feldſpath verd de Cathérinebourg ne donnoit que quelques petites étincelles; le vrai topaze du même endroit préſentoit les mêmes phénoménes que le quartz, qui donnoit des étincelles aſſez nombreuſes. Le trémolite, nouvelle eſpéce de pierre découverte depuis peu aux environs du Baikal, ne donnoit que des étincelles à peine viſibles. La ſerpentine, les marbres, les ſpaths calcaires & quelques jaſpes ne donnoient aucune étincelle. — Mais les phénoménes les plus remarquables étoient ceux que préſentoit l'adularia de Pini, eſpéce particuliere de feldſpath aſſez tranſparente, qui par hazard étoit tombée entre mes mains. Frappé par un morceau de quartz, il donnoit non ſeulement de nombreuſes étincelles, mais il luiſoit encore fortement autour de l'endroit de la percuſſion, & ſa lueur phoſphorique duroit pluſieurs minutes de ſuite. Ce phénoméne eſt très agréable à la vûe; c'étoit préciſément comme ſi on eut allumé la pierre par le morceau de quartz avec lequel on la frappoit: chaque coup le renouvelloit, de ſorte que ſi on battoit la pierre en différens endroits, la lueur duroit pluſieurs minutes dans tous les points attaqués; & s'ils étoient proches l'un de l'autre, on allumoit,

pour

pour ainſi dire, la pierre toute entiere. Le briquet d'acier produit ſur elle les mêmes phénomènes.

Sur la cryſtalliſation du ſel muriatique à baſe de manganéſe, par M. Lowitz. Préſenté le 4 Juillet 1793.

On penſoit jusqu'à préſent généralement, que le ſel muriatique à baſe de manganeſe, ne pouvoit être réduit en cryſtaux manifeſtes, & qu'il n'étoit ſuſceptible que d'une forme irréguliere de maſſe ſaline qui ſe fond à l'air. Mais je ſuis venu à bout, aprés pluſieurs expériences, de réduire ce ſel par une manipulation aiſée à des cryſtaux grands & beaux, réguliers, poliëdres, & aſſez conſtans dans l'air, d'une couleur rouge très agréable à la vüe & d'une ſaveur acre & amère.

La méthode de le préparer eſt la ſuivante: on met dans une retorte trois parties d'acide marin fort, ſur une partie de manganèſe bien réduit en poudre: on le diſtille ſur un feu fort jusqu'à ſec, aprés en avoir fait ſortir auparavant l'acide marin déphlogiſtiqué en forme de gas. On diſſout de nouveau la maſſe ſeche qui reſte, dans de l'eau, & on laiſſe évaporer cette ſolution rougeatre filtrée, ſur un fourneau chauffé lentement, jusqu'à ce qu'il ſe forme une forte pellicule qui ſera cryſtalline.

Ana-

Analyſe chymique du Zéolithe jaspitique en maſſes d'Ochotzk, nouvellement découvert, par M. le Profeſſeur Severgyne.

Communiquée à l'Académie le 2 Septembre 1793.
Par M. Lowitz.

Cette pierre eſt de couleur brune rougeatre, & très dure. Elle égratigne le verre, mais ne rend point d'étincelle ſous le briquet. Elle eſt inégale dans la fracture & on y découvre des endroits un peu vîtreux. Elle écume devant le chalumeau à la manière des Zéolithes. Sa péſanteur ſpécifique eſt = 2, 3451.

Elle s'oppoſe fortement à l'analyſe. Pour la rendre ſusceptible d'être diſſoute par les acides, 100 grains de cette pierre éxigeoient d'être calcinés deux fois pendant longtemps, chaque fois avec une portion d'alcali minéral faturée trois fois plus grande.

La maſſe ainſi calcinée fut diſſoute & bouillie avec de l'eau régale. La terre ſiliceuſe qui y reſta intacte péſoit après avoir été édulcorée, ſechée & calcinée, 58 grains.

J'obtins de la ſolution claire & filtrée, en y ajoutant de la leſſive du ſang, un grain de terre ferrugineuſe calcinée.

L'acide vitriolique ne montra aucune trace de terre pondereuſe; enſorte que par le moyen de l'acide ſacharique & de ſes ſels neutres je ne découvris pas le moindre indice de terre calcaire.

Toutes

Toutes les terres contenues dans la ſolution furent précipitées par le moyen de l'alcali minéral dépuré, puis édulcorées, &, ſans les ſecher, diſſoutes de nouveau dans l'acide vitriolique. Cette ſolution avoit le gout de l'alun.

Je pris 33 grains de terre de magneſie bien ſechée, & je précipitai par leur moyen l'alun (en laiſſant continuëllement bouillir le liquide,) en forme d'alun indiſſoluble: enſuite je dégageai la terre de magneſie de la ſolution filtrée, par le moyen de l'alcali: elle péſoit après avoir été ſechée autant qu'avant d'avoir été employée à la précipitation de l'alun, c'eſt à dire 33 grains. D'où il ſuit, que la pierre analyſée ne contient point de terre de magneſie.

Enfin je fis l'analyſe de cet alun indiſſoluble en le faiſant bouillir avec de l'alcali minéral pur. La terre alumineuſe dégagée péſoit après avoir été édulcorée, ſechée & calcinée, 38 grains.

D'après ces expériences la pierre analyſée contient ſur cent parties:

Terre ſiliceuſe - -	58	parties.
Terre alumineuſe -	38	—
Terre ferrugineuſe -	1	—
	97	—
perte -	3	—

Sur

Sur quelques nouvelles eſpéces de Zéolithe d'Ochotzk, par M. Baſile Severgyne. Préſenté à l'Académie le 9 Septembre 1793.

Les minéralogiſtes n'ont cité jusqu'à préſent que quatre formes ou eſpéces de Zéolithe: c'eſt à dire, la Zéolithe farineuſe, la Zéolithe fibreuſe ou en aiguilles, la Zéolithe feuilletée & la Zéolithe compacte. Guidé par mes propres expériences je pourrois y en ajouter encore trois: ſavoir la *Zéolithe vitreuſe*, la *Zéolithe écailleuſe* & le *ſable de Zéolithe*; toutes trois d'Ochotzk, & toutes trois écumant devant la flamme de la lampe des émailleurs, plus ou moins fortement ſans aucune addition: ce qui conſtitue entre autres le caractère des zéolithes en général.

La Zéolithe vitreuſe a été connue auparavant ſous le nom de verre volcanique trouvé à Ochotsk; j'en ai remarqué deux eſpéces. L'une eſt de couleur brune & transparente, elle coupe le verre ordinaire par ſes coins tranchans, mais elle ne rend aucune étincelle ſous le briquet; elle eſt compacte, conchoideuſe, luiſante dans ſes fractures & à la ſurface; elle ſe briſe en pieces aſſez plattes & obrondes à coins trés aigûs & elle n'eſt pas fort péſante. On la trouve ordinairement en forme de boules de la groſſeur d'une noix; elle écume devant la lampe des émailleurs moins que l'eſpéce ſuivante. — Celle-ci eſt de couleur brune jaunâtre, opaque ou tout au plus d'une demi-transparence très foible ſur les coins, de la même dureté que l'eſpéce précédente; elle eſt très compacte, unie, très luiſante & imparfaitement conchoideuſe dans ſes fractures;

ſa politure extérieure eſt trés foible, elle ſe briſe en morceaux aplatis & obronds, à coins encore plus aigûs que l'eſpéce précédente, & elle eſt plus péſante. On la trouve comme la premiere en forme de boules, de la groſſeur d'une noix jusqu'à celle des reins de pluſieurs poudes de poids; moi même j'en ai vu de ſix pouces en diamètre. Elle écume plus fortement que l'eſpéce précédente devant la lampe des émailleurs, & elle ſe transforme en une ſcarie feuillettée de couleur rouge blanchâtre, dont les feuillets ſe dégagent par le ſeul attouchement des doigts. Toutes les deux étant frottées l'une contre l'autre, produiſent l'odeur de corne brulante, ſans donner cependant la moindre étincelle phosphorique dans les tenèbres.

La *Zéolithe écailleuſe* a une couleur mélée brune & argentine: elle n'eſt que démitransparente ſur les coins, & elle eſt trés molle; de ſorte qu'elle ſe briſe facilement entre les doigts: elle a l'air d'une ſcarie ſpongieuſe foiblement luiſante dans ſes fractures, & elle conſiſte en nombreuſes écailles fourrées pour ainſi dire l'une dans l'autre: elle eſt legère & on la rencontre comme les précédentes en forme de boules. Elle écume devant la flamme de la lampe des émailleurs plus fortement & plus facilement que les premieres eſpèces: elle forme en bouillonant les mêmes ramifications que le Borax crud, & donne une lueur phosphorique verte pendant qu'elle ſe fond. Je préſume qu'elle doit ſon origine à quelque feu ſouterrein, & qu'elle provient de l'eſpéce précédente transformée par l'action du feu; parcequ'elle me donnoit devant la flamme de la lampe des emailleurs des réſultats ſemblables à cette eſpèce de zéolithe vitreuſe.

Le

Le *ſable de Zéolithe* enfin a la même couleur & la même lueur que les boules que je viens de décrire & ſemble être produit par leur décompoſition: il eſt à l'attouchement dur, comme le ſable de quartz ordinaire, & il conſiſte en grains ronds, ou anguleux & feuilletés.

On pourroit donc ſelon moi, ajouter aux zéolithes citées ci-devant par les minéralogiſtes, la Zéolithe vitreuſe, la Zéolithe écailleuſe & le ſable de Zéolithe: & quand même on en pourroit réunir pluſieurs enſemble dans un ſyſteme de minéralogie plus précis, ce qui nous manque jusqu'à ce jour, il reſteroit toujours décidé que ces boules d'Ochotzk ne ſont pas des verres volcaniques, mais de vraies zéolithes. On en connoîtra les parties conſtitutives par l'analyſe chymique de Mr. l'Académicien Lowitz.

Analyſe chymique de deux nouvelles eſpèces de pierres, communiquée par M. Lowitz, le 9 Septembre 1793.

L'année paſſée je fis l'analyſe de deux eſpéces de pierres remarquables, que me communiqua M. le Conſeiller d'État & Chevalier Pallas. L'une étoit en forme de caillous arrondis de la grandeur des noiſettes, & d'une transparence enfumée. Ils ſont comme enduits d'une matrice lamelleuſe de couleur argentine foible, & ſe trouvent près des volcans éteints aux environs d'Ochotzk. Ces pierres & principalement leur matrice friable, écument très fortement au chalumeau avec une lueur phosphorique, & donnent une maſſe écumeuſe blanche. Mais ces deux

propriétés peuvent leur être parfaitement otées en les échauffant lentement dans une catine couverte & en les calcinant enſuite fortement, ſans qu'ils ſouffrent cependant une perte de poids notable.

La péſanteur ſpécifique de ces pierres eſt = 2, 3651 & de leur matrice = 2, 3333.

Cent parties de ces pierres donnent par l'analyſe chymique

		parties.
Terre ſiliceuſe	- - -	74
Terre argilleuſe	- - -	12
Terre calcaire	- - -	7
Terre muriatique	- -	3
Terre ferrugineuſe	- -	1
perte	- - - -	3

j'obtins les mêmes parties conſtituantes de leur matrice. M. le Profeſſeur Severgyne en fait une eſpéce particuliere de zéolithe.

L'autre eſpéce de pierre eſt du Baikal. Elle eſt entièrement blanche, luiſante & d'une ſtructure cryſtalline rayonnée. Les rayons paſſent en différens ſens & en forme de faiſceaux: ils ſont parſémés de terre calcaire aërée, c'eſt pourquoi cette pierre fermente un peu avec les acides. Elle égratigne le verre. Etant frappée avec le briquet, elle produit dans l'obſcurité, comme le ſpath fluorique, à cha-

chaque coup une lueur claire, & quelque fois des étincelles. La péſanteur ſpécifique eſt = 2,9516.

Les morceaux clairs ne perdent que leur transparence devant le chalumeau.

J'obtins de cent grains de cette pierre par l'analyſe chymique.

	grains.
Terre ferrugineuſe - - - -	$\frac{1}{10}$
Terre ſiliceuſe - - - -	52
Terre calcaire - - - -	20
Terre calcaire aërée - - -	12
Terre muriatique - - - -	12
Eau & perte - - - -	$3\frac{9}{10}$

Comme la terre calcaire aërée, l'eau, & la terre ferrugineuſe de cette pierre, y ſont mélées mechaniquement, les vraies parties conſtituantes combinées chymiquement, feront par le calcul, par cent

	parties.
Terre ſiliceuſe - - - -	$60\frac{20}{43}$
Terre calcaire - - -	$23\frac{11}{43}$
Terre muriatique - - -	$13\frac{41}{43}$
perte - - - -	$2\frac{14}{43}$

Ainſi cette pierre reſſemble, & par ſes parties conſtituantes chymiques, & par ſes caracteres extérieurs, au Trémolite, qu'on trouve dans la vallée Trémola près du mont St. Gotthard, & qui contient d'aprés les expériences de M. le Profeſſeur Klaproth, par cent

Terre

	parties.
Terre ſiliceuſe - - - -	65
Terre calcaire - - - -	18
Terre muriatique - - - -	$10\frac{1}{3}$
Terre ferrugineuſe - - -	$\frac{1}{6}$
Eau & acide aërien - -	$6\frac{1}{2}$

Notice d'une quatrieme eſpèce de Zéolithe en maſſes, trouvée à Ochotzk & communiquée le 19 Septembre, par M. Baſile Severgyne.

Depuis que j'ai eu l'honneur de préſenter à la Conférence académique, dans ſa ſéance du 9 de ce mois, mes remarques ſur les zéolithes d'Ochotzk; il m'eſt tombé entre les mains une autre ſubſtance, qui n'eſt pas moins neuve & moins remarquable, que celles que j'y avois décrites. Elle vient du même endroit & y eſt très improprement connue ſous le nom de pierre jaſpitique vitreuſe d'Ochotzk; car elle apartient réellement par les épreuves que j'en ai faites, à la même claſſe de zéolithes que j'y ai decrite. — Elle eſt de couleur de grénats, brune mélée irrégulierement de couleur griſe: elle eſt tout à fait opaque & n'a qu'une très foible démitransparence ſur les coins: on en peut raſer le verre ordinaire, mais elle ne donne aucune étincelle avec le briquet: elle eſt compacte, inégale, quelque fois un peu graſſe & unie, mais très ſouvent luiſante & vîtreuſe dans ſes fractures, principalement aux endroits qui ont la couleur de grénats: elle eſt rude & très peu polie à la ſurface: elle ſe briſe en mor-

morceaux plats prèsque ſchiſteux avec des coins aigûs, & elle eſt aſſez péſante. On la trouve en grandes maſſes irrégulieres ordinairement un peu plattes, & elle a l'air d'ètre en état de décompoſition: elle ne donne aucune étincelle dans l'obſcurité, étant frappée par le briquet; mais elle produit l'odeur de corne brulante, la même que j'ai remarquée dans les autres eſpéces de zéolithes: elle contient par ci par là à ſa ſurface, de ces zéolithes écailleuſes dont j'ai fait mention auparavant: elle ſe fond devant la flamme de la lampe des émailleurs auſſi facilement que la zéolithe écailleuſe, & elle produit au premier ſouffle qu'on lui fait ſentir, une boule blanche écailleuſe ramifiée, qui a beaucoup de reſſemblance avec la zéolithe citée. Je la nomme Zéolithe en maſſes ou jaspitique. Comme perſonne n'en a fait aucune mention, j'ai cru faire plaiſir aux minéralogiſtes en leur faiſant connoître cette ſubſtance remarquable. M. l'Académicien Lowitz promet d'en donner quelque jour une analyſe chymique.

Ouvrages manuſcrits préſentés à l'Académie.

Le 25 Février. Extrait des obſervations météorologiques faites en 1792 à Ouſtioug vélikoi: par M. le Chirurgien Major Fries, Correſpondant de l'Académie. L'auteur rapporte dans une lettre jointe à cet extrait, que le 2 & le 21 Janvier 1793 v. St. le mercure eſt deſcendu tout à fait dans la boule de ſon thermomètre deMorgan (*) dont

(*) Habile Méchanicien anglois établi à St. Pétersbourg, dont les inſtrumens meteorologiques paſſent pour être les meilleurs & les plus exacts.

dont la diviſion eſt cependant continuée jusqu'au 40 dégré de Réaumur, qui répond au 225 degré de Délisle. La latitude d'Ouſtioug vélikoi eſt de 60°. 58', & ſa longitude environ de 63°, 30'.

Le 14 Mars. Mémoire ſur la graduation de l'eau de mer par la gelée. Par M. le Comte Alexandre de Harſch d'Almedingen, Chambellan de Leurs Majeſtés Impériale & Royale & Chevalier des Ordres de St. Etienne d'Hongrie, de St. Stanislas de Pologne & de St. Wolodimer de la IVme Claſſe; établi à Archangel près de la Mer blanche.

Le 28 Mars. Supplement au ſusdit mémoire, contenant des tables ſur les réſultats obtenûs par la migraduation aux petites gelées de l'eau de mèr, à quarante verſtes d'Archangel: enſuite de cette même eau affoiblie par l'eau douce jusqu'à un pour cent, ainſi que de celle de la ſource ſalée de la Micolskaia Ouſtie à 30 verſtes d'Archangel. Par le même. Cette graduation de l'eau de mer, quoiqu'elle ſoit déja très connue & bien prouvée, ſe trouve encore dans ce mémoire parfaitement conſtatée par les expériences que l'illuſtre auteur a faites avec autant de juſteſſe que de ſagacité ſur les côtes de la mer blanche.

Le 27 Mai. Une prétendue quadrature de cercle envoyée par M. Vicentius Gianelli de Ventimiglia.

Le 19 Août. Déſcription d'une nouvelle machine hydropneumatique, dédiée à l'Académie par M. le Comte Ale-

Alexandre de Harſch d'Almedingen. Meſſieurs les Académiciens chargés d'examiner cette machine, rapporterent, que le principe ſur lequel l'auteur a fondé ſa machine eſt indubitable; mais qu'il a déja été employé, & que la machine même pourroit être ſimplifiée conſidérablement ſans porter aucune atteinte à l'effet qu'on s'en promet.

Le 19 Septembre. Ueber die Integration irrationeller Differential-Formeln. De la part de l'auteur M. le Profeſſeur Pfaff à Helmſtädt. Cet écrit obtint l'approbation des Académiciens, qui y trouverent des idées neuves contribuant beaucoup à la perfection du calcul integral.

Le 17 Octobre. Iſis, oder die Wirkungen des electriſchen Fluidums. Par M. Charles Auguſte Rüdinger a Narva. La partie phyſiologique de cet ouvrage eſt mal ſoutenue: l'Auteur prétend y expliquer toutes les opérations du corps animal & même ſes mouvemens volontaires par une influence du fluide électrique & par ſon action ſur ſes parties; ce qui ne peut être prouvé en aucune maniere. Outre cela cet écrit eſt fondé ſur des hypothéſes hazardées qu'on ne ſauroit admettre en Phyſique, & ſur des propoſitions entierement fauſſes.

Le 31 Octobre. Meteorologiſche Beobachtungen vom Jahr 179?, angeſtellt zu Saratof. Envoyées par M. le Conſeiller de Cour Fred. Auguſte Meyer, Docteur en Médecine & Phyſicien à Saratof.

Obſervations météorologiques, faites par M. le Conſeiller de Colleges & Chevalier Stritter à Moscou: & envoyées régulierement chaque mois de l'année 1793.

Описанїе прїисковъ землянаго угла въ Калужскомъ Намѣстничествѣ въ 1793 году. Déscription de la contrée du Gouvernement de Kalouga, où l'on trouve des charbons de terre, avec une carte de cette contrée: envoyée de Kalouga par M. le Conſeiller de Cour & Docteur en Médécine Sokolof, ancien Membre ordinaire de l'Académie, avec une caiſſe de charbons de terre qu'il y a découverts & qui ont été trouvés très bons pour l'uſage. Cette déscription a été inſérée dans le Calendrier hiſtorique de 1794.

Ouvrages imprimés, envoyés & préſentés à l'Académie en 1793.

De la part de la Société Royale des Sciences de Londres

Philoſophical Transactions of the Royal Society of London. 4.

Vol. 79. Part. I. & II. for the Year 1789.
Vol. 80. Part. I. & II. for the Year 1790.
Vol. 81. Part. I. & II. for the Year 1791.

De la part de la Société Royale des Sciences de Göttingue

Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingenſis ad annos 1791 & 1792. Vol. XI. 4.

De

De la part du Gymnaſe Illuſtre à Anſpach

Sept diſſertations latines & allemandes ſur divers ſujets de Philologie & de Pedagogie; lues & publiées par ce Gymnaſe à l'occaſion des diverſes Solemnités. 4°.

De la part de l'Editeur

Catholicon. Erſte Abtheilung. Naturgeſchichte von Philip Andreas Nemnich. I. Band A — Canus.

Catholicon. Zweyte Abtheilung. Marine von Johann Hinrich Roding. I. Band A — C. 4to.

De la part des Auteurs

Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 179[illegible], nebſt einer Sammlung der neueſten in die aſtronomiſche Wiſſenſchaften einſchlagenden Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten, von J. E. Bode, Aſtronom und Mitglied der Königl. Preuſſiſchen Akademie der Wiſſenſchaften. Berlin 1792. 8vo

Memorie on the uſe of the Thermomètre in Navigation preſented to the American philoſophical Society held at Philadelphia. 1792. By Jonathan Williams jun. 4to.

Défenſe de M. de Buffon contre les attaques injuſtes & indécentes de Mrs. Deluc & Sage. Par M. le Prince Démetrius de Golitzin. À la Haye 1793. 8vo.

Annotationes ad calculum integralem Euleri, in quibus nonnulla problemata ab Eulero propoſita reſolvuntur,

et in ſecunda parte evolutiones pleniores nonnullarum formularum complectuntur. Auctore Laurentio Maſcheroni, in Regio Archigymnaſio Ticinenſi Math. Profeſſore. Ticini 1790 & 1792. 4to.

Грамматика Польская, изданная Максимомъ Сѣмигиновскимъ въ Кїевѣ. 8vo.

Zoologia Adriatica oſſia catalogo ragionata degli animali del Golfo et delle Lagune di Venezia dell' Abate Giuſeppe Olivi della R. Accademia di Scienze, lettere et arti di Padova. Baſſano 1792. 4to.

Россїйской магазинъ. С. П. 1761. 8vo.

Палефата Греческого писателя о невѣроятныхъ сказанїяхъ С. П. 1791. 8vo.

О благонравїи творенїе Дїонисїя Катона. С. П. 1791. 8vo. Par M. le Conſeiller de Cour Toumanski, Correspondant de l'Académie.

Le nouveau Atlas de la France, diviſée dans ſes départemens.

Allgemeine Geſchichte der Natur und Arzneykunde erzählt von Auguſt Friedrich Hecker. I. Theil, an Ihre Majeſtät der Kayſerin zugeeignet. Leipzig 1793. 8vo.

Outre divers Proſpectus, Avis au public & Catalogues de librairie, envoyés à l'Académie.

Pro-

Productions de la Nature, dont le cabinet de l'Académie a été enrichi en 1793.

Minéraux & foſſiles.

Par Madame la Princeſſe de Daſchkaw

Une collection de 43 espèces de Jaspes, de Porphyres, de Schoerls & de Cryſtaux de roche, avec le Catalogue.

Une collection de 23 pétrifications fort belles & rares, avec le Catalogue.

Onze minéraux, avec le Catalogue.

Du Spath calcaire rhomboidal & jaunâtre, parſémé d'un Shoerl verd foncé & priſmatique. Une pierre verdâtre mélée de Talc, avec du Spath calcaire blanchâtre parſémé d'un glimmer, & une pierre argilleuſe mélée de Talc & d'un Schoerl verd foncé cryſtalliſé à la ſurface.

Du Jaspe blanc avec des dendrites du Kolyvan, une groupe de Spath calcaire cryſtalliſé ſur une matrice argilleuſe & une mine de cuivre rouge mélé de cuivre natif, des mines de Poghadaeschin.

Par M. le Général de Volkof

Une collection conſidérable des minéraux du Gouvernement de Perme, parmi lesquels ſe trouvent 116 pieces nouvelles qui jusqu'ici ont entierement manqué au cabinet académique.

Par

Par M. le Conſeiller de Cour Hermann, Académicien ordinaire à Perme

Sept pieces de cyanites ou Sappare & quelques avanturines, nouvellement découvertes en Perme avec un catalogue détaillé & raiſonné.

Deux jumeaux joints par le bas ventre, conſervés dans de l'eſprit de vin: reçus du Gouvernement de Smolensk'.

Une Collection de Semences envoyée d'Irkoutzk' moiſſonnée par M. le Conſeiller de Cour Laxmann pour le jardin botanique de l'Académie.

L'Académie perdit dans le Courant de l'année.

S. E. Mr. le Prince Alexandre Alexeiewitſch de Waiſemskoy, Conſeiller privé actuel & Procureur Général. Chef de la Banque des Aſſignations & Chambellan actuel &c. Chevalier des ordres de St. André, St. Alexandre Nevski & Grand-Croix de la prémiere Claſſe de St. Volodimer de Ruſſie, de l'Ordre de l'Aigle blanc de Pologne, & de Ste. Anne d'Holſtein. Il fut reçu au nombre des membres honoraires le 29 Décembre 1776, jour auquel l'Académie célébra ſon Jubilé de 50 ans; & il mourut le 7 Janvier regretté par Sa Souveraine & par tout l'Empire.

M.

M. Guillaume Robertſon, Docteur en Théologie, Principal de l'Univerſité d'Edinbourgh & Hiſtoriographe royal pour l'Ecoſſe. Il nâquit à Edinbourgh en 1721. L'Académie le reçut au nombre de ſes Aſſociés externes le 10 Février 1783, & il décéda dans ſa ville natale le 30 Mai agé de 72 ans.

M. Charles Bonnet, Conſeiller au grand Conſeil de Génève & membre des Académies Royales des Sciences de Paris & de Berlin. Il fût reçu au nombre des Académiciens externes le 5 Mars 1764, & il mourut à Genthoud près de Génève le 20 Mai 1793.

Ces pertes furent reparées par les aggregations ſuivantes.

S. E. M. le Comte Jean Maurice de Brühl, de la Société Royale des Sciences de Londres & Miniſtre plénipotentiaire de la Cour Electorale de Saxe à Londres. Reçu unanimement au nombre des Aſſociés honoraires externes le 4 Avril.

M. Jeſſe Ramsden, de la Société Royale des Sciences de Londres, célébre par pluſieurs excellens inſtrumens d'Aſtronomie, dont il eſt l'inventeur; reçu par la pluralité des voix au nombre des Académiciens externes, le même jour 4 Avril.

M. Alexandre Aubert, de la Société Royale des Sciences, de la Société des Antiquaires & de celle pour l'encouragement des Arts, Manufactures & Commerce

à

à Londres; nommé par S. A. Madame la Princeſſe de Daſchkaw au nombre des membres honoraires externes.

Au nombre des Correſpondans.

M. Jean Fréderic Pfaff, Profeſſeur en Mathématiques à Helmſtädt. Reçu le 26 Août.

M. Jean Trembley, citoyen de Génève à Role dans le païs de Veaux, actuellement Académicien & membre ordinaire de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, pour la Claſſe de Mathématiques, à Berlin. Reçu le 12 Septembre.

M. Fréderic Auguſte Meyer, Docteur en Medécine, Conſeiller de Cour & Phyſicien à Saratof; reçu au nombre des Correſpondans regnicoles le 4 Novembre.

Avancements & Promotions.

Le 14 Janvier. M. le Conſeiller de Collèges & Chevalier Pierre Simon Pallas fut nommé, par une Oucaſe de Sa Majeſté l'Impératrice, Conſeiller d'Etat.

Le 6. Mai. M. Baſile Sewergyne, Adjoint de l'Académie pour la Minéralogie, fut nommé Académicien ordinaire pour la même partie, &

Le

Le 13 Mai. M. Tobias Lowitz, Apoticaire au laboratoire du Collège de Médécine & Adjoint de l'Académie pour la Chymie, fut nommé Académicien ordinaire pour la même partie, avec la permiſſion de pouvoir reſter, comme ci-devant, au Service du Collège Impérial de Médécine.

Le 22 Septembre. M. le Profeſſeur & Académicien ordinaire Wolffgang Louis Krafft, fut décoré de l'Ordre de St. Volodimer de la quatrième Claſſe.

Leçons Publiques.

Mrs. le Conſeiller de Cour Kotelnikof, le Conſeiller de Cour & Chevalier Ozeretskovski, l'Adjoint Kononof, & l'Adjoint Zacharof, donnerent pendant les trois mois d'été, des cours publics en langue ruſſe. Le premier enſeigna les Mathématiques, le ſecond l'hiſtoire naturelle, le troiſième la Phyſique expérimentale, & le quatrième la Chymie.

L'Académie publia une nouvelle carte hiſtorique de l'Empire de Ruſſie, où ſe trouvent les nouvelles acquiſitions en Pologne, avec un précis hiſtorique & géographique de tous les gouvernemens. Enſuite

Le dixième volume de la collection des articles les plus intéreſſans, qui ſe trouvent épars dans les diverſes ſortes d'almanachs, que l'Académie a publiés: Cобрaніе сочиненій выбранныхъ изъ Мѣсяцослововъ на разные годы. Outre pluſieurs ouvrages & traductions en ruſſe, deſtinées à répandre dans le public les connoiſſances utiles & agréables.

SUP-

SVPPLEMENT.

OBSERVATIONES ANALYTICAE AD L. EVLERI INSTITVTIONES CALCVLI INTEGRALIS, VOL. IV. SVPPLEM. II. ET IV.

Auctore

J. F. PFAFF.

Préſenté à l'Académie le 14 Janvier 1797.

Problema.

§. 1.

Reſolvere formulam integralem $\int x^{m-1}\partial x(\Delta + x^n)^\lambda$ *in ſeriem ſemper convergentem.*

Solutio.

Haec reſolutio commode inſtituitur ope formulae: $\int P\partial Q = QP - \int Q\partial P$, quae haud raro in evolvendis integralibus utiliter adhibetur. Poſito nimirum $Q = \frac{x^m}{m}$, erit

$$\int x^{m-1}\partial x(\Delta + x^n)^\lambda = \tfrac{1}{m}x^m(\Delta + x^n)^\lambda$$
$$- \tfrac{\lambda n}{m}\int x^{m+n-1}\partial x(\Delta + x^n)^{\lambda-1}.$$

Inte-

Integrale $\int x^{m+n-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda-1}$, ſimile propoſito, ſumto tantum $m+n$ pro m, $\lambda-1$ pro λ, eadem ratione ulterius reducere licet, eſtque

$$\int x^{m+n-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda-1}=\frac{1}{m+n}x^{m+n}(\Delta+x^n)^{\lambda-1}$$
$$-\frac{(\lambda-1)n}{m+n}\int x^{m+2n-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda-2}.$$

Simili modo fit

$$\int x^{m+2n-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda-2}=\frac{1}{m+2n}x^{m+2n}(\Delta+x^n)^{\lambda-2}$$
$$-\frac{(\lambda-2)n}{m+2n}\int x^{m+3n-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda-3}.$$

Quae reductiones quomodo ulterius ſint continuandae, iam ſatis manifeſtum eſt. Exinde pro integrali propoſito ſponte prodit ſeries ſine ſine procedens haec:

$$\int x^{m-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda}=$$
$$(a)\ \frac{x^m}{m}(\Delta+x^n)^{\lambda}\Big[1-\frac{\lambda n}{m+n}\Big(\frac{x^n}{\Delta+x^n}\Big)+\frac{\lambda n(\lambda-1)n}{(m+n)(m+2n)}\Big(\frac{x^n}{\Delta+x^n}\Big)^2$$
$$-\frac{\lambda n(\lambda-1)n(\lambda-2)n}{(m+n)(m+2n)(m+3n)}\Big(\frac{x^n}{\Delta+x^n}\Big)^3+\text{etc.}\Big]$$

cuius lex progreſſus evidens eſt. Integrale pro $x=0$ evaneſcit, exiſtente $m>0$.

Corollarium.

§. 2. 1.) Eadem methodo aliam inſuper integralis expreſſionem deducere licet. Eſt nimirum

$$\int x^{m-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda}=\frac{1}{(\lambda+1)n}(\Delta+x^n)^{\lambda+1}x^{m-n}$$
$$-\frac{(m-n)}{(\lambda+1)n}\int x^{m-n-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda+1};$$

porro

$$\int x^{m+u-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda+1}=\frac{1}{(\lambda+2)n}(\Delta+x^n)^{\lambda+2}x^{m-2n}$$
$$-\frac{(m-2n)}{(\lambda+2)n}\int x^{m-2n-1}\partial x(\Delta+x^n)^{\lambda+2}.$$

Qui-

Quibus reductionibus continuatis haec prodit ſeries:

$$\int x^{m-1}\,\partial x\,(\Delta+x^n)^\lambda$$

$$(b) = \frac{x^{m-n}(\Delta+x^n)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)n}\left[1-\frac{(m-n)}{(\lambda+2)n}\left(\frac{\Delta+x^n}{x^n}\right) + \frac{(m-n)(m-2n)}{(\lambda+2)n(\lambda+3)n}\left(\frac{\Delta+x^n}{x^n}\right)^2 - \text{etc.}\right]$$

2.) Cum ſit

$$\int x^{m-1}\,\partial x\,(\Delta+x^n)^\lambda = \int x^{m-1}\,\partial x\,.\,x^{n\lambda}\left(\frac{\Delta}{x^n}+1\right)^\lambda$$

$$= \Delta^\lambda \int x^{m+n\lambda-1}\,\partial x\left(\tfrac{1}{\Delta}+x^{-n}\right)^\lambda,$$

poſito loco

m	$m+n\lambda$
n	$-n$
Δ	$\frac{1}{\Delta}$

ex ſeriebus (a) (§. 1.) et (b) (1.) hae porro ſequuntur pro noſtro integrali ſeries:

$$\int x^{m-1}\,\partial x\,(\Delta+x^n)^\lambda$$

$$(c) = \frac{x^m(\Delta+x^n)^\lambda}{m+n\lambda}\left[1+\frac{\lambda n}{m+\lambda n-n}\left(\frac{\Delta}{\Delta+x^n}\right) + \frac{\lambda n(\lambda-1)n}{(m+\lambda n-n)(m+\lambda n-2n)}\left(\frac{\Delta}{\Delta+x^n}\right) + \text{etc.}\right]$$

$$(d) = -\frac{x^m(\Delta+x^n)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)n\Delta}\left[1+\frac{(m+n\lambda+n)}{(\lambda+2)n}\left(\frac{x^n+\Delta}{\Delta}\right) + \frac{(m+\lambda n+n)(m+\lambda n+2n)}{(\lambda+2)n(\lambda+3)n}\left(\frac{x^n+\Delta}{\Delta}\right)^2 + \text{etc.}\right]$$

3.) Quatuor ſerierum prima (a) et tertia (c) pro λ numero integro affirmativo abrumpunt; ſecunda (b) pro $\frac{m}{n}$ = tali numero; quarta (d), exiſtente $\frac{m}{n}+\lambda$ numero integro negati-

gativo. Ceterum ſecunda ſeries etiam ex prima derivari poteſt, ponendo $\Delta + x^n = - x^n$, ac ſumendo $(\lambda + 1)\, n$ pro m, $\frac{m}{n} - 1$ pro λ.

Scholion.

§. 3. Seriem primam (a) (§. 1.) ex principiis prorſus diverſis elicuit L. Eulerus (*), methodo uſus, a communi procedendi modo paullo discrepante. Quare haud ſuperfluum mihi videbatur, oſtendere, quomodo eadem ſeries alia via, eaque forte planiore, inveniri queat Satis porro notae ſunt ſeries, quibus alias integrale propoſitum exprimi ſolet. Eſt nimirum $\int x^{m-1} \partial x (\Delta + x^n)^\lambda$ (**)

$$1.) = \Delta^\lambda \left[\frac{x^m}{m} + \frac{\lambda}{\Delta} \frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2\,\Delta^2} \frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \text{etc.} \right]$$

$$2.) = (\Delta + x^n)^{\lambda+1} \left[\frac{1\, x^m}{m\,\Delta} - \frac{[m+n(\lambda+1)]\, x^{m+n}}{m(m+n)\,\Delta^2} + \frac{[m+n(\lambda+1)]\,[m+n(\lambda+2)]\, x^{m+3n}}{m(m+n)(m+2n)\,\Delta^3} - \text{etc.} \right]$$

$$3.) = (\Delta + x^n)^{\lambda+1} \left[\frac{x^{m-n}}{m+n\lambda} - \frac{(m-n)\,\Delta\, x^{m-2n}}{(m+n\lambda)(m+n\lambda-n)} + \frac{(m-n)(m-2n)\,\Delta^2 x^{m-2n}}{(m+n\lambda)(m+n\lambda-n)(m+n\lambda-2n)} - \text{etc.} \right]$$

Iam exoritur quaeſtio, qualis intercedat nexus inter haſce ſeries, et

(*) Inſtitutt. Calc. Integr. Vol. IV. Suppl. II. pag. 60. „ De reſolutione formulae integralis $\int x^{m-1} \partial x (\Delta + x^n)^\lambda$ in ſeriem ſemper convergentem.

(**) Inſtit. Calc. Int. Vol. I. pag. 96. 102.

et ſeriem novam §. 1. exhibitam; nec non ceteras huic additas §. 2. Quod quidem ſeriem (1.) attinet, ex hac ope facilis ſubſtitutionis ſtatim deducere licet ſeriem (a). Poſito nimirum

$$\frac{\Delta + x^n}{x^n} = -\frac{\Delta}{u^n}, \text{ erit } x^n = -\frac{\Delta u^n}{\Delta + u^n}, \; \frac{\partial x}{x} = \frac{\Delta \partial u}{u(\Delta + u^n)}.$$

Quare integratio (2) in hanc abit:

$$\int \frac{(-\Delta)^{\frac{m}{n}} u^m}{(\Delta + u^n)^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{\Delta \partial u}{u(\Delta + u^n)} \cdot \frac{\Delta^{2\lambda}}{(\Delta + u^n)^{\lambda}} =$$

$$\frac{\Delta^{2(\lambda+1)}}{(\Delta + u^n)^{\lambda+1}} \cdot \frac{1}{m\Delta} \cdot \frac{(-\Delta)^{\frac{m}{n}} u^m}{(\Delta + u^n)^{\frac{m}{n}}} \cdot \Big[1 + \frac{[m + n(\lambda+1)]}{m+n} \Big(\frac{u^n}{\Delta + u^n}\Big)$$

$$+ \frac{[m + n(\lambda+1)][m + n(\lambda+2)]}{(m+n)(m+2n)} \Big(\frac{u^n}{\Delta + u^n}\Big)^2 + \text{etc.}\Big].$$

Vnde, poſito $-\lambda$ pro $\frac{m}{n} + \lambda + 1$, et x pro u, ſponte ſequitur ipſa ſuperior integratio (a) (§. 2.). Sic igitur nova via ſatis expedita patet, ad iſtam ſeriem perveniendi. Simili ratione ſeries (b) ex ſerie (1.) derivatur, poſito $\frac{\Delta + x^n}{x^n} = -\frac{u^n}{\Delta}$; nec non ſeries ($c$) ex (3), ſeries ($d$) ex (4), ponendo $\Delta + x^n = -u^n$. Nexus ſeriei (1) cum ſeriebus §. 1. et 2. eluceſcet ope ſequentis theorematis, quod alios inſuper uſus praeſtat.

Theorema. (*)

§. 4. Series

$$1 + \frac{r\,q}{p}\,\beta\,x^n + \frac{r\,(r-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{q\,(q+1)}{p\,(p+1)}\,\beta^2\,x^{2n} + \frac{r\,(r-1)\,(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{q\,(q+1)\,(q+2)}{p\,(p+1)\,(p+2)}\,\beta^3\,x^{3n} + \text{etc.}$$

aequalis eſt ſeriei

$$(1+\beta x^n)^r\left[1 - \frac{r(p-q)}{p}\left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right) + \frac{r(r-1)}{1.\,2}\,\frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)} \times \left(\frac{\beta\,x^n}{1+\beta\,x^n}\right)^2 - \frac{r\ldots(r-2)}{1.\,2.\,3}\,\frac{(p-q)\ldots(p-q+2)}{p(p+1)(p+2)}\left(\frac{\beta\,x^n}{1+\beta\,x^n}\right)^3 + \text{etc}\right]$$

Demonſtratio.

Sufficit, demonſtraſſe Theorema pro $\beta = 1$, $n = 1$. Iam aliunde conſtat (**), poſito

$$S = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + \text{etc.},\ \text{eſſe}$$

$$A\,a + B\,b\,x + C\,c\,x^2 + D\,d\,x^3 + \text{etc} =$$

$$A\,s + \Delta\,A\,\frac{x\,d\,s}{d\,x} + \frac{\Delta^2\,A}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2\,d^2\,s}{d\,x^2} + \frac{\Delta^3\,A}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^3\,d^3\,s}{d\,x^3} + \text{etc.}$$

Sit igitur

$$a = 1,\ b = r,\ c = \frac{r\,(r-1)}{1\cdot 2},\ \text{etc.}$$

$$A = 1,\ B = \frac{q}{p},\ C = \frac{q\,(q+1)}{p\,(p+1)},\ \text{etc.}$$

erit primo

$$S = (1+x)^r,\ \frac{d\,s}{d\,x} = r\,(1+x)^{r-1},$$

$$\frac{d^2\,s}{d\,x^2} = r\,(r-1)\,(1+x)^{r-2},\ \text{etc.}$$

Dein-

(*) Ad hoc theorema alia occaſione perveni, eiusque demonſtrationem aliunde petitam exhibui (in Disquiſitionibus analyticis, Disquiſit. II. §. XXV.)

(**) L. Euleri Inſtitutt. Calc. differ. Pars II. Cap. II. §. 26.

Deinde pro ſerie quantitatum A, B, C etc. erit ſeries differentiarum primarum haec:

$$\left(\frac{q-p}{p}\right);\ \left(\frac{q-p}{p}\right).\frac{q}{p+1};\ \left(\frac{q-p}{r}\right).\frac{q(q+1)}{(p+1)(p+2)};$$
$$\left(\frac{q-p}{p}\right).\frac{q(q+1)(q+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)};\ \text{etc.}$$

quae eſt ſeriei primitivae ſimilis, dummodo ſinguli huius termini in factorem communem $\frac{q-p}{p}$ ducantur, et pro p ponatur $p+1$. Quare ſeriem differentiarum primarum ulterius differentiando, ſeries differentiarum ſecundarum, tertiarum etc. eadem ſimilitudine gaudebunt, ac ita erunt comparatae, ut quamlibet $(n+1)^{am}$ ex proxime praecedente derivare liceat, dum pro p ponatur $p+1$, et adiiciatur novus factor communis $\frac{q-p-n}{p+n}$. Ex quo ratiocinio ſponte colligitur, fore $\Delta^{n+1}A =$ termino primo ſeriei $(n+1)^{tae}$

$$=\left(\frac{q-p}{p}\right).\left(\frac{q-p-1}{p+1}\right)\ldots.\left(\frac{q-p-n}{p+n}\right).$$

Quo valore ſubſtituto in formula ſuperiore pro $Aa+Bbx+Ccx^2+$ etc., ſtatim inde conſequitur aequatio, quae erat demonſtranda.

Corollarium 1.

§. 5. Ex theoremate praecedente transformationes ſpecialiores derivare licet. Sic, poſito $q = p-1$, dividendo per $p-1$ erit:

$$1.)\ \frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}r\beta x^n+\frac{1}{p+1}.\frac{r(r-1)}{1.2}\beta^2x^{2n}$$
$$+\frac{1}{p+2}.\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\beta^3x^{3n}+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{p-1}(1+\beta x^n)^r\left[1-\frac{r}{p}\left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right)+\frac{r(r-1)}{p(p+1)}\left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{r(r-1)(r-2)}{p(p+1)(p+2)}\left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right)^3+\text{etc.}\right].$$

 Porro,

Porro, ſumto $r = -1$, habetur

$$2.)\ 1 - \frac{q}{p}\beta x^n + \frac{q(q+1)}{p(p+1)}\beta^2 x^{2n} - \frac{q(q+1)(q+2)}{p(p+1)(p+2)}\beta^3 x^{3n} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{1+\beta x^n}\left[1 + \frac{(p-q)}{p}\cdot\left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right) + \frac{(p-q)(p-q+1)}{p(p+1)}\left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right)^2 + \frac{(p-q)\dots(p-q+2)}{p(p+1)(p+2)}\left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

Quarum aequationum ope, ſeries uſitatae (1.) (2.) (§. 3.) pro $\int x^{n-1}\partial x(\Delta + x^n)^\lambda$ ſponte transformantur in ſeriem novam Euleri (a) (§. 1.). Poſito nimirum in aequatione (1) $\beta = \frac{1}{\Delta}$, $p = \frac{m}{n} + 1$, $r = \lambda$, ſeries (1) (§. 3.) abit in ſeriem (a) (§. 1.); quae eadem ſeries oritur ex ſerie (2) (§. 3.), ope aequationis (2), ſumendo $\beta = \frac{1}{\Delta}$, $p = \frac{m}{n} + 1$, $q = \frac{m}{n} + \lambda + 1$. Simili modo ſeries (3) (§. 3.) ſuppeditat ſeriem (c) (§. 2.), adhibita aequatione (2), et poſito in hac pro q, $-\frac{m}{n} + 1$; pro p, $-\frac{m}{n} - \lambda + 1$; pro n, $-n$; pro β, Δ.

Corollarium 2.

§. 6. Sumatur in theoremate §. 4. r = numero integro affirmativo, ac ſerierum ſibi invicem aequalium termini ordine inverſo collocentur; tum erit:

$$\frac{q(q+1)\dots(q+r-1)}{p(p+1)\dots(p+r-1)}\beta^r x^{rn}\left[1 + \frac{r(p+r-1)}{q+r-1}\cdot\frac{1}{\beta x^n} + \frac{r(r-1)}{1.2}\cdot\frac{(p+r-1)(p+r-2)}{(q+r-1)(q+r-2)}\cdot\frac{1}{\beta^2 x^{2n}} + \text{etc.}\right]$$

$= \pm$

$$= \pm (1+\beta x^n)^r \left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right) \cdot \frac{(p-q)(p-q+1)\ldots(p-q+r-1)}{p(p+1)\ldots(p+r-1)} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{r(p+r-1)}{p-q+r-1}\left(\frac{1+\beta x^n}{\beta x^n}\right) + \frac{r(r-1)(p+r-1)(p+r-2)}{1.2\ (p-q+r-1)(p-q+r-2)}\left(\frac{1+\beta x^n}{\beta x^n}\right)^2\right].$$

Inde, factores communes tollendo, et ponendo loco

$p+r-1$	$-q$
$q+r-1$	$-p$
$\frac{1}{\beta x^n}$	x

haec obtinetur

Transformatio.

$$1 + \frac{rq}{p}x + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{q(q+1)}{p(p+1)}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\frac{q(q+1)(q+2)}{p(p+1)(p+2)}x^3 + \text{etc.}$$

$$= \frac{(p-q)(p-q+1)\ldots(p-q+r-1)}{p(p+1)\ldots(p+r-1)}\left[1 + \frac{rq}{p-q+r-1}(1+x)\right.$$

$$\left. + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{q(q+1)}{(p-q+r-1)(p-q+r-1)}(1+x)^2 + \text{etc.}\right].$$

Corollarium 3.

§. 7. Ponatur in transformatione praecedente $x = -1$, tum haec inde prodit ſatis late patens

Summatio.

$$1 - r\frac{q}{q} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{q(q+1)}{p(p+1)} - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\frac{q(q+1)(q+2)}{p(p+1)(p+2)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{(p-q)(p-q+1)\ldots(p-q+r-1)}{p(p+1)\ldots(p+r-1)}$$

ſive, ſcripto $-q$ pro q,

$$1 + \frac{rq}{p} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{q(q-1)}{p(p+1)} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\frac{q(q-1)(q-2)}{p(p+1)(p+2)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+r-1)}{p(p+1)\ldots(p+r-1)}.$$

Corol-

Corollarium 4.

§. 8. 1.) Factor in alteram ſeriem transformationis . 6. ductus, $\frac{(p-q)(p-q+1)\ldots(p-q+r-1)}{p(p+1)\ldots(p+r-1)}$, ad hanc etiam formam reduci poteſt: $\frac{(p-1)\ldots(p-q)}{(q+r-1)(p+r-2)\ldots(p+r-q)}$, dum q ſit numerus integer affimativus: de qua reductione multiplicando per crucem conſtat. Hinc transformationem ita exprimere licet, ut numeri r tanquam integri affirmativi haud amplius ratio haberi videatur. Quaritur iam, num transformatio iſto modo expreſſa valeat, etiamſi r non fuerit numerus integer affirmativus, dummodo q ſit talis.

2.) Comparando ſeriem (d) (§. 2.) cum ſerie (c.) (§. 3), et ponendo loco

$$\begin{array}{c|c} \frac{m}{n}+\lambda+1 & -r \\ \frac{m}{n}+1 & p \\ \frac{x^n}{\Delta} & x \end{array}$$

haec obtinetur aequatio:

$$1+\frac{r}{p}x+\frac{r(r-1)}{p(p+1)}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{p(p+1)(p+2)}x^3+\text{etc.}$$
$$=\frac{(p-1)}{p+r-1}\left(1+\frac{r}{p+r-2}(1+x)+\frac{r(r-1)}{(p+r-2)(p+r-3)}(1+x)^2+\text{etc.}\right)$$

ſic itaque transformatio (1.) pro $q=1$ probata eſt. Quare reſtat demonſtrandum, legitimam eſſe concluſionem a q ad $q+1$.

3.) Deſignetur ſeries

$$1+\frac{rqx}{p}+\frac{r(r-1)}{1.2}\,\frac{q(q+1)}{p(p+1)}x^2+\text{etc.},$$

a quantitatibus q, p, r, pendens, ſeu earum functio, per $f(q, p, r)$; nec non altera ſeries huic aequalis:

$(p-1)$

$$\frac{(p-1)\dots(p-q)}{(p+r-1)\dots(p+r-q)}\left[1+\frac{rq(1+x)}{p+r-q-1}+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{q(q+1)(1+x)^2}{(p+r-q-1)(p+r-q-2)}+\text{etc.}\right]$$

per F (q, p, r). Iam in ſerie priori reſolvendo coëfficientes binomiales pro r in binos pro $r-1$, habetur

$$f(q,p,r)=1+(r-1)\frac{q}{p}x+\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\frac{q(q+1)}{p(p+1)}x^2+\text{etc.}$$
$$+\frac{q}{p}x\qquad+(r-1)\frac{q(q+1)}{p(p+1)}x^2+\text{etc.}$$

id eſt $=$

$$f(q,p,r-1)+\frac{q}{p}x\,f(q+1,p+1,r-1);\ \text{ſive}$$
$$f(q+1,p+1,r-1)=\frac{p}{qx}[f(q,p,r-1)].$$

Ponantur in hac aequatione pro $f(q,p,r)$ et $f(q,p,r-1)$ ſeries ipſis ex hypotheſi aequales: F (q,p,r), F $(q,p,r-1)$, quarum porro illa ex reſolutione coëfficientium binomialium pro r in binos pro $r-1$, in duas ſeries diſpeſcatur; tum erit $f(q+1,p+1,r-1)$

$$=\frac{p}{qx}\frac{(p-1)\dots(p-q)}{(p+r-2)\dots(p+r-q)}\times$$
$$\times\begin{cases}\frac{1}{p+r-1}\Big(1+(r-1)\frac{q}{p-q+r-1}(1+x)+\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\frac{q(q+1)(1+x)^2}{(p-q+r-1)(p-q+r-2)}+\text{etc.}\\ \qquad\qquad+\frac{q}{p-q+r-1}(1+x)+(r-1)\frac{q(q+1)(1+x)^2}{(p-q+r-1)(p-q+r-2)}+\text{etc.}\Big)\\ -\frac{1}{p+r-q-1}\Big(1+\frac{(r-1)q}{p-q+r-2}(1+x)+\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\frac{q(q+1)(1+x)^2}{(p-q+r-2)(p-q+r-3)}+\text{etc.}\Big)\end{cases}$$

ſive, ſeriem tertiam a prima actu ſubtrahendo,

$$=\frac{p}{qx}\frac{(p-1)\dots(p-q)}{(p+r-2)\dots(p+r-q)}\begin{cases}\Big[\frac{-q}{(p+r-1)(p+r-q-1)}-\frac{(r-1)q(q+1)(1+x)}{(p+r-1)(p-q+r-1)(p-q+r-2)}\\ \quad-\frac{(r-1)(r-2)q(q+1)(q+2)(1+x)^2}{1.2(p+r-1)(p-q+r-1)(p-q+r-2)(p-q+r-3)}-\text{etc.}\Big]\\ +\frac{q(1+x)}{(p+r-1)(p-q+r-1)}+\frac{(r-1)q(q+1)(1+x)^2}{(p+r-1)(p-q+r-1)(p-q+r-2)}+\text{etc.}\end{cases}$$

$$=\frac{p(p-1)\dots(p-q)}{(p+r-1)(p+r-2)\dots(p+r-q-1)}\times$$
$$\times\left[1+\frac{(r-1)(q+1)(1+x)}{(p-q+r-2)}+\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}\frac{(q+1)(q+2)(1+x)^2}{(p-q+r-2)(p-q+r-3)}+\text{etc.}\right]$$

id

id eſt, $= F(q+1, p+1, r-1)$. Sic itaque ſeries ſignis f et F notatae etiam pro $q+1$ invicem aequales ſunt. Inde haec habetur

Transformatio.

$$1 + \frac{rqx}{p} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{q(q+1)}{p(p+1)}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\frac{q(q+1)(q+2)}{p(p+1)(p+2)}x^3 + \text{etc.}$$
$$= \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-q)}{(p+r-1)\ldots(p+r-q)}\left[1 + \frac{rq(1+x)}{(p+r-q-1)} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{q(q+1)(1+x)^2}{(p+r-q-1)(p+r-q-2)} + \text{etc.}\right]$$

quae a transformatione praecedente (§. 6.) ita tantum differt, ut illic r, hic q pro numero integro affirmativo ſumatur.

4.) Poſito $x = -1$, haec inde oritur

Summatio.

$$1 - \frac{rq}{p} + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{q(q+1)}{p(p+1)} - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\frac{q(q+1)(q+2)}{p(p+1)(p+2)} + \text{etc.}$$
$$= \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-q)}{(p+r-1)\ldots(p+r-q)}$$

quae ſummationi §. 7. ſimilis eſt.

Ceterum ea demonſtrandi ratio, quae ( ) et ( ) adhibita eſt, etiam pro transformatione (§. .) et ſummatione (§. 7.) uſurpari potuiſſet, concludendo nimirum ab $r-1$ ad r, ope aequationum *functionalium*, quales ( ) occurrunt. Sic ad demonſtrandas haſce transformationes et ſummationes calculo differentiali haud opus eſt.

Theorema.

Poſito

$$R = 1 + r\frac{(p+r')}{p}\beta x^n + \frac{r(r-1)}{1.2}\frac{(p+r')(p+r'+1)}{p(p+1)}\beta^2 x^{2n}$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\frac{(p+r')(p+r'+1)(p+r'+2)}{p(p+1)(p+2)}\beta^3 x^{3n} + \text{etc.}$$

R′

$$R' = 1 + \frac{r'(p+r)}{p}\beta x^n + \frac{r'(r'-1)}{1.2}\frac{(p+r)(p+r+1)}{p(p+1)}\beta^2 x^{2n} + \frac{r'(r'-1)(r'-2)}{1.2.3}\frac{(p+r)(p+r+1)(p+r+2)}{p(p+1)(p+2)}\beta^3 x^{3n} + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{R}{(1+\beta x^n)^r} = \frac{R'}{(1+\beta x^n)^{r'}}.$$

Demonſtratio.

Sumto (§. 4.) $q = p + r'$, erit $R =$

$$(1+\beta x^n)\left[1+\frac{rr'}{p}\left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right)+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{r'(r'-1)}{p(p+1)}\left(\frac{\beta x^n}{1+\beta x^n}\right)^2+\text{etc.}\right].$$

Hinc $\frac{R}{(1+\beta x^n)^r}$ aequatur ſeriei, in qua r et r' inter ſe invicem permutari poſſunt, quin ſeries inde alteretur. Vnde ſponte ſequitur, expreſſiones $\frac{R}{(1+\beta x^n)^r}$ et $\frac{R'}{(1+\beta x^n)^{r'}}$, quippe eidem ſeriei aequales, etiam inter ſe ipſas convenire.

Scholion.

§. 10. Ad theorema praecedens equidem perveneram, occupatus integratione aequationis differentialis ſecundi gradus:

$$0 = x^2(a+bx^n)\partial\partial y + x(c+ex^n)\partial y\partial x + (f+gx^r)y\partial x^2;$$

qua data occaſione illud protuli in Disquiſitione ſupra §. 4. commemorata (§. XXVIII.). Iam dum *Euleri* opus recens editum, ſupra §. 3. laudatum, perluſtro, hoc deprehendo Lemma (pag. 245.):

 „Po-

„ Poſito $♄ = \left(\frac{f}{0}\right)\left(\frac{h}{e}\right) + \left(\frac{f}{1}\right)\left(\frac{h}{e+1}\right)x + \left(\frac{f}{2}\right)\left(\frac{h}{e+2}\right)x^2 + \text{etc.}$

„ et $♂ = \left(\frac{-h-1}{0}\right)\left(\frac{-f-1}{e}\right) + \left(\frac{-h-1}{1}\right)\left(\frac{-f-1}{e+1}\right)x + \left(\frac{-h-1}{2}\right)\left(\frac{-f-1}{e+2}\right)x^2 + \text{etc.}$

„ fore $\left(\frac{e+f}{e}\right)♄ = \left(\frac{e-h-1}{e}\right)(1-x)^{f+h+1}♂$,

Quod Lemma cum noſtro theoremate, quanquam aliter expreſſo, revera tamen conſpirat, poſito (§. 5.) pro

r	f
p	$e+1$
r'	$-h-1$
βx^n	$-x$

Conſenſus evidens eſt, dummodo notetur, *Eulerum* charactere tali: $\left(\frac{h}{e}\right)$ deſignare coëfficientem binomialem $(e+1)^{tm}$ pro exponente h, 1 pro *primo* habito. Theorema (§. 9) quodammodo pro generaliori haberi poteſt, quod p pro lubitu accipi queat, cum contra ex Euleri deſignatione e = numero integro affirmativo eſſe debeat. Demonſtrationem theorematis vir ſummus l. c. haud protulit, haec tantum aiens: „ iſta relatio - - non ita pridem a me eſt demonſtra„ta - - - cuius demonſtratio profundiſſimae eſt indaginis, „ dum adeo per aequationes differentiales ſecundi gradus „ procedit". Quare operae pretium mihi videbatur, oſtendere, quomodo hoc theorema absque auxilio integrationis aequationis differentialis ſecundi gradus demonſtrari poſſit, quanquam illud ex hac integratione primo mihi innotuerit, id quod etiam *Eulero* accidiſſe videtur. Quin idem theorema vel absque omni uſu differentiationis, ex Analyſi vulgari deducere licet, uti ex ſequenti Lemmate patebit, quod, quippe admodum late patens, nec dum aliunde notum, memoratu haud indignum videtur.

Theo-

Theorema.

§. 11. Summa ſeriei ſequentis, ob l numerum integrum affirmativum abrumpentis,

$$1 + \frac{lrm}{1 \cdot p(l+r+m+p-1)} + \frac{l(l-1)\,r(r-1)\,m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot p(p+1)(l+r+m+p-1)(l+r+m+p-2)}$$
$$+ \frac{l \ldots (l-2) \cdot r \ldots (r-2) \cdot m \ldots (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot p \ldots (p+2) \cdot (l+r+m+p-1) \ldots (l+r+m+p-3)} + \text{etc.}$$
$$= \frac{(p+r)(p+r+1)\ldots(p+r+l-1)}{p(p+1)\ldots(p+l-1)} \cdot \frac{(p+m)(p+m+1)\ldots(p+m+l-1)}{(p+r+m)(p+r+m+1)\ldots(p+r+m+l-1)}$$

Demonſtratio.

Pro $l = 1$ veritas theorematis ſatis manifeſta eſt, quippe

$$1 + \frac{rm}{p(r+m+p)} = \frac{p(r+m+p)+rm}{p(r+m+p)} = \frac{(p+r)(p+m)}{p(r+m+p)}.$$

Quare probandum reſtat, ex ſuppoſita ſummatione pro l, eandem ſequi pro $l+1$.

Cum ſumma ſeriei ab l, r, m, p pendeat, ea tanquam functio harum quantitatum deſignetur per $\Phi(l, r, m, p)$. Jam ponatur $l+1$, loco l, et a ſeriei inde oriundae terminis ex ordine ſubtrahantur termini ſeriei propoſitae, erit, omittendo factores binorum terminorum communes,

$$\frac{l+1}{l+r+m+p} - \frac{l}{l+r+m+p-1} = \frac{r+m+p-1}{(l+r+m+p)(l+r+m+p-1)};$$
$$\frac{l+1}{l+r+m+p} - \frac{(l-1)}{l+r+m+p-2} = \frac{2(r+m+p-1)}{(l+r+m+p)(l+r+m+p-2)};$$
$$\frac{l+1}{l+r+m+p} - \frac{(l-2)}{l+r+m+p-3} = \frac{3(r+m+p-1)}{(l+r+m+p)(l+r+m+p-3)};$$

et ſic porro. Inde fit $\Phi(l+1, r, m, p) - \Phi(l, r, m, p)$

$$= \frac{rm}{p} \cdot \frac{r+m+p-1}{(l+r+m+p)(l+r+m+p-1)} \cdot \Big[1 + \frac{l(r-1)(m-1)}{(p+1)(l+r+m+p-2)}$$
$$+ \frac{l(l-1)(r-1)(r-2)(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot (p+1)(p+2)(l+r+m+p-2)(l+r+m+p-3)} + \text{etc.}\Big]$$
$$= \frac{rm}{p} \cdot \frac{(r+m+p-1)}{(l+r+m+p)(l+r+m+p-1)} \cdot \Phi(l, r-1, m-1, p+1).$$

Ope huius aequationis ſumma pro $l+1$ determinatur ex ſumma pro l. Quod ſi nunc ſummae expreſſio in theoremate enuntiata pro l obtinet, eadem mutatis mutandis obtinebit pro $l+1$. Habetur nimirum

$$\phi(l+1, r, m, p) = \phi(l, r, m, p)$$

$$+\frac{rm}{p}\cdot\frac{(r+m+p-1)}{(l+r+m+p)(l+r+m+p-1)}\cdot\phi(l, r-1, m-1, p+1)$$

$$=\frac{(p+r)(p+r+1)\ldots(p+r+l-1)}{p\cdot(p+1)\ldots\ldots(p+l-1)}\cdot\frac{(p+m)\ldots\ldots(p+m+l-1)}{(p+r+m)\ldots(p+r+m+l-1)}$$

$$+\frac{rm}{p}\cdot\frac{(r+m+p-1)}{(l+r+m+p)(l+r+m+p-1)}\cdot\frac{(p+r)\ldots(p+r+l-1)}{(p+1)\ldots(p+l)}$$

$$\cdot\frac{(p+m)\ldots(p+m+l-1)}{(p+r+m-1)\ldots(p+r+m+l-2)}$$

$$=\frac{(p+r)\ldots(p+r+l-1)}{p(p+1)\ldots(p+l-1)}\cdot\frac{(p+m)\ldots(p+m+l-1)}{(p+r+m)\ldots(p+r+l+m-1)}$$

$$\cdot\left[1+\frac{rm}{(p+l)(l+r+m+p)}\right],$$

ubi eſt

$$1+\frac{rm}{(p+l)(l+r+m+p)}=\frac{(p+l)(l+r+m+p)+rm}{(p+l)(l+r+m+p)}$$

$$=\frac{(p+r+l)(p+m+l)}{(p+l)(p+r+m+l)}.$$

Vnde de veritate aſſerti conſtat.

Corollarium.

§. 12. Quodſi producti

$$(1+x)^{r'-r}\left[1+r\frac{(p+r')}{p}x+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{(p+r')(p+r'+1)}{p(p+1)}x^2+\text{etc.}\right]$$

factor $(1+x)^{r'-r}$ ex formula binomiali in ſeriem evolvatur, erit illud

$$=1+(r'-r).x+\frac{(r'-r)(r'-r-1)}{1.2}.x^2+\frac{(r'-r)(r'-r-1)(r'-r-2)}{1.2.3}.x^3$$

$$+\frac{r(p+r')}{p}\quad+\frac{r(p+r')}{p}.(r'-r)\quad+\frac{r(p+r')}{p}.\frac{(r'-r)(r'-r-1)}{1.2}$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{(p+r')(p+r'+1)}{p(p+1)}+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{(p+r')(p+r'+1)}{p(p+1)}(r'-r)$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\frac{(p+r')(p+r'+1)(p+r'+2)}{p(p+1)(p+2)}+\text{etc.}$$

etc.

In qua ſerie coëfficiens $\tau\breve{\varkappa}\ x^l$ eſt

$$= \frac{(r'-r)\ldots(r'-r-l+1)}{1.2\ldots l}\left[1+\frac{l.r(p+r')}{p(r'-r-l+1)}\right.$$
$$\left.+\frac{l(l-1)}{1.2}\cdot\frac{r(r-1)(p+r')(p+r'+1)}{p(p+1)(r'-r-l+1)(r'-r-l+2)}+\text{etc.}\right].$$

Poſito in praecedenti theoremate $m = -p - r'$, hic coëfficiens fit

$$= \frac{(r'-r)\ldots(r'-r-l+1)}{1.2\ldots l}\cdot\frac{(p+r)\ldots(p+r+l-1)}{p\ldots(p+l-1)}\cdot\frac{(-r')(-r'+1)\ldots(-r'-l-1)}{(r-r')\ldots(r-r'+l-1)}$$
$$= \frac{r'(r'-1)\ldots(r'-1+l)}{1.2\ldots l}\cdot\frac{(p+r)\ldots(p+r+l-1)}{p\ldots(p+l-1)}.$$

Hinc productum illud aequatur ſeriei

$$1+\frac{r'(p+r)x}{p}+\frac{r'(r'-1)}{1.2}\cdot\frac{(p+r)(p+r+1)x^2}{p(p+1)}+\text{etc.};$$

unde ſponte ſequitur theorema §. 9., quod ſic ex principiis mere algebraicis demonſtratum eſt.

Problema.

§. 13. *Integrale $\int y\,x^m\,\partial x$ per ſeriem exprimere, denotante y quamvis functionem variabilis x.*

Solutio.

Series quaeſita obtinetur eadem methodo, quae pro caſu ſpeciali §. 1. adhibita fuit. Eſt nimirum

$$\int y\,x^m\,\partial x = \frac{1}{m+1}x^{m+1}y - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\partial y,$$

ex qua ipſa formula etiam integrale $\int x^{m+1}\partial y$ ulterius reducere licet ad $\int x^{m+2}\frac{\partial^2 y}{\partial x}$, hoc ad $\int x^{m+3}\frac{\partial^3 y}{\partial x^2}$, et ſic porro; ponendo $m+1$, $m+2$, etc. pro m; $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ etc. pro y. Ita fit

$$\int x^{m+1}\partial y = \frac{1}{m+2}x^{m+2}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{m+2}\int x^{m+2}\frac{\partial^2 y}{\partial x};$$
$$\int x^{m+2}\frac{\partial^2 y}{\partial x} = \frac{1}{m+3}x^{m+3}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{m+3}\int x^{m+3}\frac{\partial^3 y}{\partial x^2};$$

etc. etc.

ubi

ubi ∂x pro differentiali conſtanti habetur. Hinc pro integrali propoſito obtinetur ſeries ſine fine procedens haec:

$$\int y\,x^m\,\partial x = \frac{1}{m+1}x^{m+1}y - \frac{1}{(m+1)(m+2)}x^{m+2}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}x^{m+3}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \text{etc.}$$

Corollarium.

§. 14. 1.) Poſito $m = 0$, ex formula generali modo demonſtrata ſequitur haec:

$$\int y\,\partial x = x\,y - \frac{x^2\,\partial y}{1.2\,\partial x} + \frac{x^3\,\partial^2 y}{1.2.3\,\partial x^2} - \frac{x^4\,\partial^3 y}{1.2.3.4\,\partial x^3} + \text{etc.}$$

quae ſub nomine ſeriei Bernoullianae ſatis nota eſt. Quaerebam equidem, num ex hac ſerie integrationem Euleri (§ 1.) deducere liceret: quod cum haud ſucceſſit, ad formulam generaliorem perveni, ex qua iam poſito $\frac{m}{n} - 1$ loco m, et $(1 + x)^\lambda$ pro y, ſeries Euleri ſtatim colligi poteſt: dum poſt evolutionem integralis in ſeriem pro x ponatur x^n.

2.) Quodſi in formula Bernoulliana (1.) pro y ponatur $y\,x^m$, erit

$$\int y\,x^m\,\partial x = x^{m+1}y - \frac{x^2\,\partial(y\,x^m)}{1.2\,\partial x} + \frac{x^3\,\partial^2(y\,x^m)}{1.2.3\,\partial x^2} - \text{etc.}$$

ſive, evolvendo differentialia productorum,

$$\begin{aligned}
&= x^{m+1}y \\
&\quad - \frac{x^2}{1.2}\left(m\,x^{m-1}y + x^m\frac{\partial y}{\partial x}\right) \\
&\quad + \frac{x^3}{1.2.3}\left[m(m-1)\,x^{m-2}y + 2\,m\,x^{m-1}\frac{\partial y}{\partial x} + x^m\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \\
&\quad - \frac{x^4}{1..4}\left[m(m-1)(m-2)x^{m-3}y + 3\,m(m-1)x^{m-2}\frac{\partial y}{\partial x}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + 3\,m\,x^{m-1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^m\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]
\end{aligned}$$

$+$

$$\pm \frac{x^{\lambda+1}}{1\ldots\lambda+1}[m\ldots(m-\lambda+1)x^{m-\lambda}y+\lambda m\ldots$$
$$\ldots(m-\lambda+2)x^{m-\lambda+1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}m\ldots$$
$$\ldots(m-\lambda+3)x^{m-\lambda+2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\text{etc.}]$$

$\mp$ etc.

vel, ordinando ſecundum differentias $\tau\breve{8}\,y$ et poteſtates $\tau\breve{8}\,x$,

$$=x^{m+1}y[\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2}\tfrac{m}{1}+\tfrac{1}{3}\tfrac{m(m-1)}{1.2}-\ldots\pm\frac{1}{\lambda+1}\frac{m(m-1)\ldots(m-\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}\mp\ldots]$$
$$-x^{m+2}\frac{\partial y}{\partial x}[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\tfrac{m}{1}+\tfrac{1}{4}\tfrac{m(m-1)}{1.2}-\ldots\mp\frac{1}{\lambda+1}\frac{m(m-1)\ldots(m-\lambda+2)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\ldots]$$
$$+\frac{x^{m+3}\partial^2 y}{1.2\,\partial x^2}[\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\tfrac{m}{1}+\tfrac{1}{5}\tfrac{m(m-1)}{1.2}-\ldots\pm\frac{1}{\lambda+1}\frac{m(m-1)\ldots(m-\lambda+3)}{1.2\ldots(\lambda-2)}\ldots]$$
$$-\frac{x^{m+4}\partial^3 y}{1.2.3\,\partial x^3}[\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}\tfrac{m}{1}+\tfrac{1}{6}\tfrac{m(m-1)}{1.2}-\ldots\mp\frac{1}{\lambda+1}\frac{m(m-1)\ldots(m-\lambda+4)}{1\ldots(\lambda-3)}\ldots]$$

$+$ etc.

Quam expreſſionem comparando cum formula noſtra §. 13., ſequentes obtinentur ſummationes:

$$\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2}\tfrac{m}{1}+\tfrac{1}{3}\tfrac{m(m-1)}{1.2}-\tfrac{1}{4}\tfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\text{etc.}=\frac{1}{m+1}$$
$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\tfrac{m}{1}+\tfrac{1}{4}\tfrac{m(m-1)}{1.2}-\tfrac{1}{5}\tfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\text{etc.}=\frac{1}{(m+1)(m+2)}$$
$$\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\tfrac{m}{1}+\tfrac{1}{5}\tfrac{m(m-1)}{1.2}-\tfrac{1}{6}\tfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\text{etc.}=\frac{1.2}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

etc.

quas pro quovis numero integro α comprehendit haec:

Summatio.

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}m+\frac{1}{\alpha+2}\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{1}{\alpha+3}\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\text{etc.}$$
$$=\frac{1.2.3\ldots(\alpha-1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\alpha)}.$$

Scho-

Scholion.

§. 15. 1.) Haec ſummatio fluit etiam ex ſummatione generaliori §. 8. (4.), ſumto ibi $q = \alpha$, $p = \alpha + 1$, $r = m$. Illa ſic quoque demonſtrari poteſt: Ob

$$x^{\alpha-1}(1-x)^m = x^{\alpha-1} - m x^{\alpha} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{\alpha+1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{\alpha+2} + \text{etc.},$$

erit multiplicando per ∂x et integrando:

$$\int x^{\alpha-1}(1-x)^m \partial x = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} m x^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} \cdot \frac{m(m-1)}{1.2} x^{\alpha+2} - \text{etc.},$$

cuius igitur ſeriei ſummam integrale illud ab $x = 0$ ad $x = 1$ acceptum (*) ſiſtet. Iam vero eſt

$$\int x^{\alpha-1}(1-x)^m \partial x = -\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1} x^{\alpha-1} + \frac{(\alpha-1)}{m+1} \int (1-x)^{m+1} x^{\alpha-2} \partial x;$$

hinc ſumto $x = 1$, erit

$$\int x^{\alpha-1}(1-x)^m \partial x = \left(\frac{\alpha-1}{m+1}\right) \int (1-x)^{m+1} x^{\alpha-2} \partial x,$$

dummodo ſit $m + 1 > 0$, *quae conditio* etiam pro Euleri ſerie ſupra iam (§. 1.) obſervata fuit, nec non pro integrali §. 1?. et pro ſummatione §. 14. tenenda eſt. Simili ratione poſitis loco m, α; $m + 1$, $\alpha - 1$; erit

$$\int x^{\alpha-2}(1-x)^{m+1} \partial x = \left(\frac{\alpha-2}{m+2}\right) \int (1-x)^{m+2} x^{\alpha-3} \partial x.$$

Quae reductiones continuantur, usque dum perveniatur ad

$$\int (1-x)^{m+\alpha-1} x^{\alpha-\alpha} \partial x = -\frac{1}{m+\alpha}(1-x)^{m+\alpha} + \text{conſt.},$$

quod

(*) Integrale $\int P \partial x$ ab $x = a$ ad $x = b$ accipi ſecundum Eulerum dicitur, dum illud ita ſumitur, ut pro $x = a$ evaneſcat, deinde ponatur $x = b$.

quod integrale, extenſum ab $x = 0$ ad $x = 1$, eſt $= \frac{1}{m+\alpha}$. Sic eodem ſenſu prodit

$$\int x^{\alpha-1}(1-x)^m \partial x = \frac{1.2\ldots\alpha-1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\alpha-1)} \cdot \frac{1}{m+\alpha};$$

unde fluit ſummatio §. 14.

2.) Exiſtente m numero integro, eſt

$$\frac{1.2\ldots\alpha-1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+\alpha)} = \frac{1.2\ldots m}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)},$$

de quo multiplicando numeratores et denominatores conſtat. Inde haec obtinetur, analoga priori (§. 14.)

Summatio.

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} m + \frac{1}{\alpha+2} \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{1}{\alpha+3} \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$= \frac{1.2\ldots m}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m)},$$

quae pro numero quovis integro affirmativo m valet, quicquid ſit α. Eadem ſummatio tamquam corollarium particulare ex ſummatione §. 7. ſponte deducitur.

RECHERCHES SUR LES EQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU SECOND DEGRÉ.

SECOND MEMOIRE.

Par
M. JEAN TREMBLEY.

Préſenté à l'Académie le 9 Janvier 1797.

J'ai envoyé en 1795 à l'Académie Impériale un Mémoire qui contient quelques recherches ſur les équations linéaires aux differences partielles du ſecond degré. Ayant eu occaſion, depuis ce tems là, d'approfondir quelques objets relatifs à ces recherches, je vais expoſer içi le réſultat de mes réflexions. J'ai traité, à ce que je crois, avec toute la généralité poſſible, le cas où l'intégrale a cette forme: $z = \Pi F : \Phi$. Mais lorsque cette intégrale ne ſatisfait pas, on paſſe à des formes plus compoſées, & l'on introduit avec $F : \Phi$, des fonctions $F' : \Phi$, $F'' : \Phi$ etc. telles que

$$F' : \Phi = \frac{\partial . F : \Phi}{\partial \Phi}, \quad F'' : \Phi = \frac{\partial . F' : \Phi}{\partial \Phi}, \text{ etc.}$$

C'eſt ſur ces cas que j'ai fait quelques recherches ulterieures, dans lesquelles je ſuppoſerai celles que contient le Mémoire précédent.

§. 1.

§. 1. Soit la forme de l'intégrale $z = \Pi' F : \Phi + \Pi F' : \Phi$, nous avons vu que pour que cette intégrale conduiſe à l'équation différentielle du ſecond degré :

$$C\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) + D\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + Gz = 0,$$

A, B, C, D, E, G, étant des fonctions de x et y, on doit ſatisfaire aux quatre équations de condition ſuivantes:

$$\text{I. } C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

$$\text{II. } \Pi\left[A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left[2D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right] = 0,$$

$$\text{III. } G\Pi + A\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+\Pi'\left[A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left[2C\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\right]\left[2D\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right] = 0,$$

$$\text{IV. } G\Pi' + A\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right) = 0.$$

Nous avons fait voir dans le Mémoire cité que l'équation I. fourniſſait deux valeurs de Φ, que nous avons nommées Φ' et Φ''. Nous avons fait voir de plus que les deux valeurs de Π qui réſultaient de la ſubſtitution des valeurs Φ' et Φ'' dans l'équation II. ſe reduiſaient à une ſeule. (Il-y-a à ce réſultat une exception dont nous parlerons ci-après,) & que les deux valeurs de Π' qui réſultaient de la ſubſtitution de Φ' et Φ'' dans l'équation III. ſe reduiſaient à une ſeule, enſorte que l'intégrale prenait la forme ſuivante:

$$z = \Pi'(F : \Phi' + f : \Phi'') + \Pi(F' : \Phi' + f' : \Phi'').$$

§. 2. Cela poſé nous ſubſtituerons les valeurs Φ' et Φ'' dans l'équation III. et nous obtiendrons deux équations, que nous retrancherons l'une de l'autre, ce qui donnera:

$$\tfrac{A}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]+\tfrac{B}{D}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]$$
$$+\tfrac{C}{D}\left[\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right]+\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)$$
$$+\tfrac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}\left[\tfrac{2C}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)-\tfrac{2C}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]$$
$$+\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}\left[2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)-2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)-\tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]=0.$$

Or nous avons trouvé dans le Mémoire cité,

$$\tfrac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\tfrac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\tfrac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)=$$
$$\left[+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}\right]\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}\right];$$

$$\tfrac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\tfrac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\tfrac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)=$$
$$\left[-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}\right]\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\right].$$

Subſtituant ces valeurs & celles des coëfficiens de $\frac{\left(\frac{\partial\pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}$, $\frac{\left(\frac{\partial\pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}$, trouvées dans le Mémoire cité, on aura, en diviſant par $\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}$, l'équation ſuivante:

$$\left[\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}\right]\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]$$
$$-\left[\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}\right]\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]=0,$$

équa-

équation dont l'intégrale complette eſt $l\frac{\Pi'}{\Pi} = \sigma : (\Phi' + \Phi'')$, ou $\frac{\Pi'}{\Pi} = e^{\sigma : (\Phi' + \Phi'')}$, ou $\Pi' = \Pi\,\sigma : (\Phi' + \Phi'')$, en changeant la fonction arbitraire.

§. 3. Pour ſavoir maintenant quelle fonction de $\Phi' + \Phi''$ ſatisfait aux autres conditions, il faut ſubſtituer cette valeur de Π' dans les équations III. & IV. Soit pour abréger $\Phi' + \Phi'' = u$, on a $\Pi' = \Pi\,\sigma : u$, donc

$$\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\sigma : u + \Pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma' : u;$$

$$\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\sigma : u + \Pi\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\sigma' : u;$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right)\sigma : u + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma' : u + \Pi\left(\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}\right)\sigma' : u + \Pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\sigma'' : u;$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right)\sigma : u + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\sigma' : u + \Pi\left(\frac{\partial\partial u}{\partial y^2}\right)\sigma' : u + \Pi\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\sigma'' : u;$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x\partial y}\right)\sigma : u + \left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\sigma' : u + \Pi\left(\frac{\partial\partial u}{\partial x\partial y}\right)\sigma' : u + \Pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\sigma'' : u.$$

Subſtituant ces valeurs dans l'équation IV, elle deviendra

$$\left[\tfrac{G}{D}\Pi + \tfrac{A}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + \tfrac{B}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + \tfrac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right) + \tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\sigma : u$$
$$+ \left[\tfrac{2C}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \tfrac{E}{D}\left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \left[\tfrac{A}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \tfrac{B}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \tfrac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial u}{\partial y^2}\right) + \tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial u}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\Pi\right]\sigma' : u$$
$$+ \left[\tfrac{C}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\Pi\,\sigma'' : u = 0.$$

Or $\left[\tfrac{A}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \tfrac{B}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \tfrac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial u}{\partial y^2}\right) + \tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial u}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\Pi =$

$$\left[\tfrac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \tfrac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \tfrac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right) + \tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right]\Pi$$
$$+ \left[\tfrac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \tfrac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \tfrac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right) + \tfrac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\Pi =$$

[en

[en faiſant pour abrêger

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}\Bigg]$$

$$\alpha\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right] - \alpha\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right] \text{ et}$$

$$2\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{F}{D}\left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] =$$
$$\alpha\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\right] + \alpha\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right].$$

Donc le coëfficient total de $\sigma' : u$ eſt $= 0$. De plus

$$\frac{C}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$
$$\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)^2$$
$$+ \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \frac{2C}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = \frac{2C}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) =$$
$$\frac{2\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}$$
$$= -\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}.$$

L'équation IV. donne donc

$$\frac{G}{D}\Pi + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)$$
$$= \frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]^2}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)} \cdot \frac{\Pi \sigma'' u}{\sigma : u}.$$

Subſtituant cette valeur dans l'équation III., on aura en effa-

effaçant ce qui ſe détruit, & diviſant par

$$\frac{[(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}) - (\frac{\partial\Phi''}{\partial y})(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})]^2 \Pi}{(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})}, \quad \frac{\sigma'' : u}{\sigma : u} - \sigma' : u = 0.$$

Donc $\partial u \sigma'' : u - \partial u \sigma' : u \, \sigma : u = 0$, & intégrant $\sigma' : u - \frac{(\sigma : u)^2}{2} = C$. Soit $\mu = \sigma : u$, on a $\frac{\partial \mu}{\partial u} = \sigma' : u$, donc l'équation devient

$$\partial \mu - \frac{\mu^2 \partial u}{2} = \frac{C}{2} \partial u, \quad \partial u = \frac{2 \partial \mu}{C + \mu^2}, \text{ donc}$$

$$\frac{u \sqrt{C}}{2} + D = \text{arc. tang.} \frac{\mu}{\sqrt{C}}, \text{ ou}$$

$$\mu = \sqrt{C} \text{ tang.} (\frac{u \sqrt{C}}{2} + D). \text{ Donc}$$

$$\sigma : (\Phi' + \Phi'') = \sqrt{C} \text{ tang.} [\frac{(\Phi' + \Phi'')}{2} \sqrt{C} + D], \&$$

$$\Pi' = \Pi \sqrt{C} \text{ tang.} [\frac{(\Phi' + \Phi'')}{2} \sqrt{C} + D].$$

Donc l'intégrale aura cette forme :

$$z = \Pi [\sqrt{C} \text{ tang.} \frac{(\Phi' + \Phi'')}{2} \sqrt{C} + D] (F : \Phi' + f : \Phi'') + \Pi (F' : \Phi' + f' : \Phi'').$$

Si $C = 0$, cette formule ne peut pas ſervir : on a alors, en reprenant l'équation différentielle

$$\partial \mu - \frac{\mu^2 \partial u}{2} = 0, \text{ ou } \frac{2 \partial \mu}{\mu^2} - \partial u = 0, \text{ ou}$$

$$-\frac{2}{\mu} - u = D. \text{ Donc}$$

$$\mu = \sigma : (\Phi' + \Phi'') = -\frac{2}{u + D} = -\frac{2}{\Phi' + \Phi'' + D} \;\&$$

$$\Pi' = -\frac{2\Pi}{\Phi' + \Phi'' + D}.$$

L'intégrale aura alors cette forme :

$$z = \Pi [\frac{-2}{\Phi' + \Phi'' + D} (F : \Phi' + f : \Phi'') + F' : \Phi' + f' : \Phi''].$$

On aurait pu arriver plus brièvement au même réſultat, en faiſant d'avance $\Pi = 1$; car en faiſant $\frac{z}{\Pi} = z'$, on a une équa-

équation en z', dans laquelle la quantité Π eſt $= 1$, mais j'ai préferé d'expoſer le calcul dans toute ſon étendue. Mais je me ſervirai dans la ſuite de ce moyen d'abbréviation qui réſulte de la forme même que nous avons propoſée: $z = \Pi' F:\Phi + \Pi F':\Phi$. En effet l'on peut repréſenter ainſi cette forme: $\frac{z}{\Pi} = \frac{\Pi'}{\Pi} F:\Phi + F':\Phi$, ou $z' = \pi' F:\Phi + F':\Phi$ en faiſant $\frac{\Pi'}{\Pi} = \pi'$, $\frac{z}{\Pi} = z'$. On peut auſſi donner à notre équation cette forme: $\frac{z}{\Pi'} = F:\Phi + \frac{\Pi}{\Pi'} F':\Phi$, ou $z' = F:\Phi + \pi' F':\Phi'$, en faiſant $z' = \frac{z}{\Pi'}$, $\pi' = \frac{\Pi}{\Pi}$, & le calcul précédent donne de même l'intégrale, en diviſant par $\sigma:(\Phi' + \Phi'')$.

§. 4. Suppoſons maintenant d'après ce que nous avons dit §. 1. que les deux valeurs de Π diffèrent. Soyent ces deux valeurs σ' & σ' réſultantes des valeurs Φ' & Φ''. L'équation II. donnera les deux équations ſuivantes:

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2} + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right)$$
$$= \alpha\left[\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right)}{\sigma'} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial y}\right)}{\sigma'}\right],$$

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right)$$
$$= -\alpha\left[\frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \sigma''}{\partial x}\right)}{\sigma''} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \sigma''}{\partial y}\right)}{\sigma''}\right].$$

Nous avons prouvé dans le Mémoire précédent que σ' & σ'' ne pouvaient différer qu'en ce que la première de ces quantités peut être multipliée par une fonction de Φ', & la ſeconde par une fonction de Φ''. Soit donc $\sigma' = \sigma\mu:\Phi'$, $\sigma'' = \sigma\mu:\Phi''$, nous aurons en ſubſtituant ces valeurs dans les deux équations précédentes, & ſuppoſant $\Pi' = 1$:

A

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right)$$
$$=\alpha\left[\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)}{\sigma}-\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)}{\sigma}\right] \quad (a)$$

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right)$$
$$=-\alpha\left[\frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)}{\sigma}-\frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)}{\sigma}\right] \quad (b)$$

L'équation III. fournira de même les deux équations ſuivantes en σ', σ'':

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma'}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \sigma'}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma'}{\partial x \partial y}\right)=0,$$
$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \sigma''}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \sigma''}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma''}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \sigma''}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma''}{\partial x \partial y}\right)=0.$$

Ces équations donnent, en ſubſtituant les valeurs de σ' & σ'', & effaçant ce qui ſe détruit, en vertu des équations generales I. & II:

$$\left[\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x \partial y}\right)\right]\mu:\Phi' \quad (c)$$
$$+\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right)=0,$$
$$\left[\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x \partial y}\right)\right]\mu:\Phi'' \quad (d)$$
$$+\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right)=0.$$

On tire de ces deux équations l'équation ſuivante:

$$\left[\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{F}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right)\right]\frac{1}{\mu:\Phi'}$$
$$-\left[\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{F}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right)\right]\frac{1}{\nu:\Phi''}=0,$$

ou faiſant uſage des valeurs contenues dans les équations (a) & (b), & diviſant toute l'équation par Φ, on obtiendra:

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)}{\sigma}-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)}{\sigma}\right]\frac{1}{\mu:\Phi'}$$

$$+\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)}{\sigma}-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)}{\sigma}\right]\frac{1}{\nu:\Phi}=0, \text{ ou}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)}{\sigma}\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\mu:\Phi'}+\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\nu:\Phi''}\right]-\frac{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)}{\sigma}\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{\mu:\Phi'}+\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{\mu:\Phi''}\right]=0.$$

L'Intégrale de cette équation eſt $\sigma=\Sigma:\int\left(\frac{\partial\Phi'}{\mu:\Phi'}+\frac{\partial\Phi''}{\nu:\Phi''}\right)$.

§. 5. Pour déterminer maintenant la nature de cette fonction, nous faiſons

$$\int\left(\frac{\partial\Phi'}{\mu:\Phi'}+\frac{\partial\Phi''}{\nu:\Phi''}\right)=\varrho:\sigma, \text{ on a } \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)\varrho':\sigma=\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{\mu:\Phi'}+\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{\nu:\Phi''};$$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)\varrho':\sigma=\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\mu:\Phi'}+\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\nu:\Phi''};$$

$$\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x^2}\right)\varrho':\sigma+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2\varrho'':\sigma$$
$$=\frac{\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)}{(\mu:\Phi')^2}+\frac{\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)}{\nu:\Phi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2}{(\nu:\Phi'')^2}-\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2}{(\mu:\Phi')^2};$$

$$\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial y^2}\right)\varrho':\sigma+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2\varrho'':\sigma$$
$$=\frac{\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)}{\mu:\Phi'}-\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2}{(\mu:\Phi')^2}+\frac{\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)}{\nu:\Phi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2}{(\nu:\Phi'')^2};$$

$$\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x\,\partial y}\right)\varrho':\sigma+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)\varrho'':\sigma=\frac{\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)}{\mu:\Phi'}$$
$$-\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{(\mu:\Phi')^2}+\frac{\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)}{\nu:\Phi''}-\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{(\nu:\Phi'')^2};$$

donc

donc

$$\left[\tfrac{A}{D}\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right)+\tfrac{B}{D}\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial y}\right)+\tfrac{C}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\sigma}{\partial x^2}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\sigma}{\partial y^2}\right)+\tfrac{E}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\sigma}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\varrho':\sigma=$$
$$\left[\tfrac{A}{D}\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\tfrac{B}{D}\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\tfrac{C}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\tfrac{E}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\tfrac{1}{\mu:\Phi'}$$
$$+\left[\tfrac{A}{D}\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\tfrac{B}{D}\left(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\tfrac{C}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\tfrac{E}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\tfrac{1}{:\Phi''}$$
$$-\left[\tfrac{C}{D}\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2+\tfrac{E}{D}\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial y}\right)\right]\varrho'':\sigma.$$

L'équation (c) deviendra donc

$$(2+\varrho':\sigma)\left[\tfrac{A}{D}\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\tfrac{B}{D}\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\tfrac{C}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\tfrac{E}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$-\left[\tfrac{C}{D}\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2+\tfrac{E}{D}\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\sigma}{\partial y}\right)\right]\varrho'':\sigma=0,$$

ou en mettant pour le ſecond membre ſa valeur,

$$(2+\varrho':\sigma)\left[\tfrac{A}{D}\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\tfrac{B}{D}\left(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\tfrac{C}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(\tfrac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\tfrac{E}{D}\left(\tfrac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right]$$
$$+\frac{2\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\varrho'':\sigma,$$

ou $(2+\varrho':\sigma)\frac{\varrho':\sigma}{\sigma}+\varrho'':\sigma=0$, ou $(2+\varrho':\sigma)\varrho':\sigma + \sigma\varrho'':\sigma=0$. Soit $\varrho':\sigma=\frac{a}{m:\sigma}$, on a $\varrho'':\sigma=-\frac{a\,m':\sigma}{(m:\sigma)^2}$.

L'équation devient donc

$$(2\,m:\sigma+a)\frac{a}{(m:\sigma)^2}-\frac{a\sigma m':\sigma}{(m:\sigma)^2}=0,$$

ou $(2\,m:\sigma+a)=\sigma m':\sigma=\frac{\partial\sigma\,.\,m:\sigma}{\partial\sigma}$, donc $\frac{\partial\sigma}{6}=\frac{\partial m:\sigma}{2m:\sigma+a}$, $l\,C\sigma=\frac{1}{2}l(2\,m:\sigma+a)$, ou $C^2\sigma^2=2\,m:\sigma+a$, ou $m:\sigma=\frac{C^2\sigma^2-a}{2}$, donc $\varrho':\sigma=\frac{2a}{C^2\sigma^2-a}$, donc $\varrho:\sigma=\int\frac{2a\,\partial\sigma}{C^2\sigma^2-a}$, ce qui donne des logarithmes ou des arcs de cercle, ſuivant la valeur de C^2. Soit $C^2=-a$, on a

$$\varrho:\sigma=-\int\frac{2\partial\sigma}{1+\sigma^2}=-2\text{ Arc. tang. }\sigma,\text{ donc}$$
$$\int\left(\frac{\partial\Phi'}{\mu:\Phi'}+\frac{\partial\Phi''}{\nu:\Phi''}\right)=-2\text{ Arc. tang. }\sigma,\text{ et}$$
$$\sigma=-\tfrac{1}{2}\text{ tang.}\int\left(\frac{\partial\Phi'}{\mu:\Phi'}+\frac{\partial\Phi''}{\nu:\Phi''}\right).$$

L'Intégrale ſera donc $z = F:\Phi' + f:\Phi''$

$$- \tfrac{1}{2} \text{tang.} \int \left(\frac{\partial \Phi'}{\mu:\Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu:\Phi''}\right) (\mu:\Phi'\, F':\Phi' + \nu:\Phi''\, f':\Phi'').$$

Si $C^2 = a$, on a

$$\varrho:\sigma = \int \frac{2\partial\sigma}{\sigma^2 - 1} = \int \frac{\partial\sigma}{\sigma - 1} - \int \frac{\partial\sigma}{\sigma + 1} = l\left(\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right), \text{ donc}$$

$$l\left(\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right) = \int \left(\frac{\partial\Phi'}{\mu:\Phi'} + \frac{\partial\Phi''}{\nu:\Phi''}\right) \text{ et } \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} = e^{\int \left(\frac{\partial\Phi'}{\mu:\Phi'} + \frac{\partial\Phi''}{\nu:\Phi'}\right)},$$

donc

$$\sigma = \frac{e^{\int \left(\frac{\partial\Phi'}{\mu:\Phi'} + \frac{\partial\Phi''}{\nu:\Phi''}\right)} + 1}{1 - e^{\int \left(\frac{\partial\Phi}{\mu:\Phi'} + \frac{\partial\Phi''}{\nu:\Phi''}\right)}}.$$

L'Intégrale ſera donc

$$z = F:\Phi' + f:\Phi' + \frac{e^{\int \left(\frac{\partial\Phi'}{\mu:\Phi'} + \frac{\partial\Phi''}{\nu:\Phi''}\right)} + 1}{1 - e^{\int \left(\frac{\partial\Phi'}{\mu:\Phi'} + \frac{\partial\Phi'}{\nu:\Phi''}\right)}} (\mu:\Phi'\, F':\Phi' + \nu:\Phi''\, f':\Phi'').$$

6. Suppoſons maintenant que l'Intégrale ſoit de la forme $z = F:\Phi' + f:\Phi'' + \Pi\, F':\Phi'$, on conſidérera que l'équation II donne dans ce cas les deux équations ſuivantes :

$$\left[\frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$- \alpha\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\frac{\partial\Pi}{\partial x}}{\Pi}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\frac{\partial\Pi}{\partial y}}{\Pi}\right)\right] = 0\ (e).$$

L'équation III donne cette équation unique

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$+ \frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right) = 0,$$

ou

ou

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\frac{B}{D}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+\alpha\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\frac{\partial\Pi}{\partial x}}{\Pi}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\frac{\partial\Pi}{\partial y}}{\Pi}\right)\right]=0.$$

Cette derniere équation coïncidant avec l'équation (e), ſi l'on y change Π et Φ', il eſt clair que $\Pi=\varrho:\Phi'$ en eſt une Intégrale particuliere. Faiſons maintenant $\Pi=\varrho:\Phi'+\mu:\Phi'\,\nu:\Phi''$, & ſubſtituant les valeurs dans la derniere équation, on obtiendra après les reductions,

$$\frac{(\mu':\Phi'\,\nu:\Phi''+\varrho':\Phi'+1)\,\mu:\Phi'\,\nu:\Phi''}{\mu:\Phi'\,\nu:\Phi''+\varrho:\Phi'}-\mu':\Phi'\,\nu':\Phi''=0, \text{ ou}$$

$$\mu:\Phi'\,\varrho':\Phi'+\mu:\Phi'-\mu':\Phi'\,\varrho:\Phi'=0, \text{ ou}$$

$$\frac{\varrho':\Phi'+1}{\varrho:\Phi'}=\frac{\mu':\Phi'}{\mu:\Phi'}, \text{ ou}$$

$$\frac{\partial\Phi'}{\varrho:\Phi'}=\partial l\,\mu:\Phi'-\partial l\,\varrho:\Phi'=\partial l\frac{\mu:\Phi'}{\varrho:\Phi'}, \text{ donc}$$

$$\frac{\mu:\Phi'}{l\varrho:\Phi'}=C\,e^{\int\frac{\partial\Phi}{\varrho:\Phi'}};\ \mu:\Phi'=C\,\varrho:\Phi'\,e^{\int\frac{\partial\Phi'}{\varrho:\Phi'}}, \text{ \&}$$

$$\Pi=\varrho:\Phi'\,[C\,\nu:\Phi''\,e^{\int\frac{\partial\Phi'}{\varrho:\Phi'}}+1.]$$

La forme de l'Intégrale ſera donc

$$z=F:\Phi'+f:\Phi''+\varrho:\Phi'\,(C\nu:\Phi''\,e^{\int\frac{\partial\Phi'}{\varrho:\Phi'}}+1)\,F':\Phi'.$$

§. 7. Revenons aux cas des §§. 4 & 5. Le coëfficient de $F':\Phi'$ eſt, comme nous l'avons vu, $\Pi=\sigma\,\mu:\Phi'$. L'équation II. donnera la valeur de σ, parceque, comme nous l'avons remarqué dans le Mémoire précédent, cette équation reſte la même, quelle que ſoit la valeur de $\mu:\Phi'$. Subſtituant cette valeur de Π dans l'équation III, laquelle dans la ſuppoſition de $\Pi'=1$ ſe reduit à

$\frac{A}{D}$

$$\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+ \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

on aura, en effaçant ce qui ſe détruit en vertu des équations I & II,

$$\left[\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x \partial y}\right)\right] \mu : \Phi'$$
$$+ \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

équation d'où l'on tirera $\mu : \Phi'$, puiſque l'on connoît σ & Φ'. On aura de même

$$\left[\frac{A}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x \partial y}\right)\right] \nu : \Phi''$$
$$+ \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

d'où l'on tirera $\nu : \Phi''$.

§. 8. Prenons le même exemple que nous avons indiqué à la fin du Mémoire précédent,

$$(1 + y^2)\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) + 2\,xy\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) + (1 + x^2)\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Nous aurons ici $A = 0$, $B = 0$, $D = 1 + y^2$, $E = 2\,xy$, $C = 1 + x^2$, ce qui donnera l'équation du premier degré

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{2\,xy}{1 + y^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{(1 + x^2)}{1 + y^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

L'Intégrale de cette équation ſe reduit, comme nous l'avons fait voir dans le Mémoire qui traite des équations aux différences partielles du premier degré, à l'intégration de ces deux équations:

$$[xy + \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}]\,\partial y - (1 + y^2)\,\partial x = 0,$$
$$[xy - \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}]\,\partial y - (1 + y^2)\,\partial x = 0.$$

On

On trouve par la méthode des Intégrales particulieres, expoſée dans les Mémoires de Berlin pour 1793,

$$\Phi' = \frac{xy + \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}}{1 + y^2}, \quad \Phi'' = \frac{xy - \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}}{1 + y^2},$$

puisque

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{xy + \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}}{1 + y^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{xy - \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}}{(1 + y^2)},$$

donc

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = \frac{y\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} - x}{(1 + y^2)\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}},$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = \frac{(x - xy^2)\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} + y + 2x^2y + y^3}{(1 + y^2)^2\sqrt{(-1 - x^2 - y^2}};$$

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = \frac{y\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} + x)}{(1 + y^2)\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = \frac{(x - xy^2)\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} - (y + 2x^2y + y^3)}{(1 + y^2)^2\sqrt{-1 - x^2 - y^2)}}. \quad \text{Or}$$

$$(x - xy^2)\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} + y + 2xy + y^3 = \\ -[xy + \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}]\,[y\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} - x], \;\&$$

$$(x - xy^2)\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} - (y + 2x^2y + y^3) = \\ -[xy - \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}\,[y(\sqrt{-1 - x^2 - y^2}) + x],$$

donc

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = -\Phi'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right), \quad \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = -\Phi''\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right) = -\Phi'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right) = -\Phi'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = \Phi'^2\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right) + 2\Phi'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2;$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right) = -\Phi''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right) = \Phi''^2\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right) + 2\Phi''\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)^2,$$

donc

A′ =

$$A' = \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) = \Phi'^2\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)$$
$$+ 2\,\Phi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) - \frac{2\,x\,y}{1+y^2}\left[\Phi'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2\right] + \left(\frac{1+x^2}{1+y^2}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\Phi'^2 - \frac{2\,x\,y}{1+y^2}\,\Phi' + \frac{1+x^2}{1+y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2\left(\Phi' - \frac{x\,y}{1+y^2}\right) =$$

[à cauſe de $(1+y^2)\,\Phi'^2 - 2\,x\,y\,\Phi' + 1 + x^2 = 0$, & de
$\Phi' - \frac{x\,y}{1+y^2} = \frac{\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}$]

$$\frac{2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}.$$

On trouvera de même

$$A'' = -\frac{2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}.$$

De plus

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = \Phi''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)$$
$$- \Phi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)(\Phi'' - \Phi') =$$
$$- 2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\frac{\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}.$$

Donc (en conſervant toutes les dénominations du Mémoire précédent)

$$\beta = \frac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]^2}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)} =$$
$$-\frac{4\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)(1+x^2+y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

On a encore

$$\partial\Phi' = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\partial y = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)(\partial x - \Phi'\,\partial y),$$
$\partial\Phi'' = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)(\partial x - \Phi''\,\partial y)$, donc

$$\frac{\partial\sigma}{\sigma} = \frac{A'\partial\Phi'' + A''\partial\Phi'}{\beta} =$$

$$\frac{\frac{2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 \frac{\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)(\partial x - \Phi''\partial y)}{-4\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)(1+x^2+y^2)}}{(1+y^2)^2}$$

$$\frac{\frac{-2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2 \frac{\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)(\partial x - \Phi'\partial y)}{-4\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)(1+x^2+y^2)}}{(1+y^2)^2}$$

$$= \frac{(1+y^2)\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)(\partial x - \Phi''\partial y) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)(\partial x - \Phi'\partial y)\right]}{2\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}$$

$$= \frac{1+y^2}{2\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}\left[\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]\partial x + \left[\Phi'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \Phi''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right]\partial y\right]$$

$$= \frac{-x\partial x - y\partial y}{-1-x^2-y^2} = \frac{x\partial x + y\partial y}{1+x^2+y^2}.$$

Donc

$$l\sigma = \tfrac{1}{2}l(1+x^2+y^2) \;\&\; \sigma = \sqrt{(-1-x^2-y^2)}.$$

Donc

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) = \frac{-x}{\sqrt{(-1-x^2-y^2)}},\quad \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) = \frac{-y}{\sqrt{(-1-x^2-y^2)}},$$

$$\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x^2}\right) = \frac{1+y^2}{(-1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x\partial y}\right) = \frac{-xy}{(-1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial y^2}\right) = \frac{1+x^2}{(-1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \;\&$$

$$\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial y^2}\right) = \frac{-2}{(1+y^2)\sqrt{(-1-x-y^2)}}.$$

Donc

$$\mu : \Phi' = \frac{-A'}{\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial y^2}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{-2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 \sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}}{\dfrac{-2}{(1+y^2)\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}} = -\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 (1+x^2+y^2).$$

Or $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\sqrt{(-1-x^2-y^2)} = \frac{y\sqrt{(-1-x^2-y^2)}-x}{1+y^2}$ &

$$-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 (1+x^2+y^2) = -\frac{y^2(1+x^2+y^2)-2xy\sqrt{(-1-x^2-y^2)}+xx}{(1+y^2)^2}$$

$$= \frac{-1-2y^2-y^4-x^2y^2-2xy\sqrt{(-1-x^2-y^2)}+1+x^2+y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$= -1-\left[\frac{xy+\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}\right]^2 = -1-\Phi'^2.$$

Donc $\mu : \Phi' = -1-\Phi'^2$. On trouvera de même

$$\nu : \Phi'' = \frac{-A''}{\frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial y^2}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2 \sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}}{\dfrac{-2}{(1+y^2)\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}} = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)(1+x^2+y^2).$$

Or

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)(1+x^2+y^2) = \frac{y^2(1+x^2+y^2)-2xy\sqrt{(-1-x^2-y^2)}-xx}{(1+y^2)^2}$$

$$= \frac{1+2y^2+y^4+x^2y^2-2xy\sqrt{(-1-x^2-y^2)}-1-x^2-y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2y^2-2xy\sqrt{(-1-x^2-y^2)}-(1+x^2+y^2)}{(1+y^2)^2}$$

$$= 1+\left(\frac{xy-\sqrt{(-1-x^2-y^2)}}{1+y^2}\right)^2 = 1+\Phi''^2,$$

donc

donc $\nu : \Phi'' = 1 + \Phi''^2$. L'Intégrale complette ſera donc

$$z = F : \Phi' + f : \Phi'' + \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} \times$$
$$\times [-(1 + \Phi'^2) F' : \Phi' + (1 + \Phi''^2) f' : \Phi''),$$

comme nous l'avons trouvé à la fin du Mémoire précédent, & cette valeur ſatisfait aux équations de condition.

§. 9. Il me reſte à prouver maintenant que la quan- $\sigma = \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}$ eſt bien de la forme que nous avons déterminée ci-deſſus § 5. On a

$$\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''} = \frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) \partial x + (\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) \partial y}{-1 - \Phi'^2}$$

$$+ \frac{(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}) \partial x + (\frac{\partial \Phi''}{\partial y}) \partial y}{1 + \Phi''^2} = \frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\partial x - \Phi' \partial y)}{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x})^2 (-1 - x^2 - y^2)} + \frac{(\frac{\partial \Phi''}{\partial x})(\partial x - \Phi'' \partial y)}{-(\frac{\partial \Phi''}{\partial x})^2 (-1 - x^2 - y^2)}$$

$$= \frac{(\frac{\partial \Phi''}{\partial x})(\partial x - \Phi' \partial y) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\partial x - \Phi'' \partial y)}{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial \Phi''}{\partial x})(-1 - x^2 - y^2)}$$

$$= \frac{\partial x [(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})] + \partial y [\Phi'' (\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) - \Phi' (\frac{\partial \Phi''}{\partial x})]}{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial \Phi''}{\partial x})(-1 - x^2 - y^2)}$$

$$= \frac{-(2 x \partial x + 2 y \partial y)}{(x^2 + y^2) \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)}}, \text{ donc}$$

$$\int (\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''}) = 2 \text{ arc. tang. } \sqrt{(1 - x^2 - y^2)},$$

donc

$$\sqrt{(-1 - x^2 - y^2)} = \tfrac{1}{2} \text{ tang.} \int (\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''}),$$

ce qui rentre dans la formule.

§. 10. Si Π' n'eſt pas $= 1$, l'opération devient plus compliquée. Il faut alors conſidérer que dans le Mé-

 moire

moire précédent nous avons trouvé:

$$\frac{\Pi'}{\Pi}=\int\left(\frac{\partial\Phi'+\partial\Phi''}{\beta}\right)\left[\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi}+\frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi}\right.$$
$$\left.+\frac{C}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi}+\frac{B}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}+\frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}+\frac{G}{D}\right].$$

Si l'on ſuppoſe maintenant que Π ait deux valeurs $\Pi\mu:\Phi'$, $\Pi\nu:\Phi''$, on trouvera en repetant le procédé du Mémoire cité,

$$\frac{\Pi'}{\Pi}=\int\left(\frac{\partial\Phi'\nu:\Phi''+\partial\Phi''\mu:\Phi'}{\beta}\right)\left[\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi}+\frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi}\right.$$
$$\left.+\frac{C}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi}+\frac{B}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}+\frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}+\frac{G}{D}\right].$$

Connaiſſant Π & Φ'', Φ', on connaitra

$$\left[\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)}{\Pi}+\frac{E}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)}{\Pi}+\frac{C}{D}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)}{\Pi}+\frac{B}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}+\frac{A}{D}\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}+\frac{G}{D}\right]:\beta,$$

quantité que pour abreger je fais $=$ M, & nous aurons

$$\int(\partial\Phi'\nu:\Phi''+\partial\Phi''\mu:\Phi')\,M=$$
$$=\int[[(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial x})\nu:\Phi''+(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial x})\mu:\Phi']\,M$$
$$+[(\tfrac{\partial\Phi'}{\partial y})\nu:\Phi''+(\tfrac{\partial\Phi''}{\partial y})\mu:\Phi']\,M]$$

quantité qui doit être intégrable par elle même, donc

$$\left[\frac{\partial.[(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})\nu:\Phi''+(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})\mu:\Phi']M}{\partial y}\right]=\left[\frac{\partial.[(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})\nu:\Phi''+(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})\mu:\Phi']M}{\partial x}\right],$$

ce qui donne en différentiant & reduiſant:

$$[(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}) - (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x})]\,\nu' : \Phi'' - \mu' : \Phi')$$
$$+ \left[\frac{(\frac{\partial M}{\partial y})}{M}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \frac{(\frac{\partial M}{\partial x})}{M}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\right]\nu : \Phi''$$
$$+ \left[\frac{(\frac{\partial M}{\partial y})}{M}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \frac{(\frac{\partial M}{\partial x})}{M}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]\mu : \Phi' = 0.$$

Il ſera toujours aiſé de tirer de cette équation la forme de $\nu : \Phi'$, $\mu : \Phi'$, & ces fonctions une fois trouvées, on aura Π' par l'équation III.

§. 11. Soit, par exemple, l'équation,

$$(\tfrac{\partial \partial z}{\partial y^2}) - (\tfrac{\partial \partial z}{\partial x^2}) + (\tfrac{2}{y} + \tfrac{2}{x^2 + y})(\tfrac{\partial z}{\partial y})$$
$$+ (\tfrac{2}{x} - \tfrac{4x}{x^2 + y})(\tfrac{\partial z}{\partial x}) + \frac{(\frac{2}{y} + 2)z}{x^2 + y} = 0,$$

on a d'abord l'équation $(\frac{\partial \Phi}{\partial y})^2 - (\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2 = 0$, ce qui donne les deux équations $(\frac{\partial \Phi}{\partial y}) + (\frac{\partial \Phi}{\partial x}) = 0$, $(\frac{\partial \Phi}{\partial y}) - (\frac{\partial \Phi}{\partial x}) = 0$, d'où l'on tire les valeurs $\Phi' = x + y$, $\Phi'' = x - y$, donc

$$(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}) = 1,\ (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}) = 1,\ (\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}) = 1,\ (\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}) = -1.$$

Or

$$\tfrac{A}{D} = \tfrac{2}{x} - \tfrac{4x}{x^2 + y},\ \tfrac{B}{D} = \tfrac{2}{y} + \tfrac{2}{x^2 + y},\ \tfrac{C}{D} = \frac{\frac{2}{y} + 2}{x^2 + y}.$$

Donc

$$A' = \tfrac{A}{D}(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}) + \tfrac{B}{D}(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}) + \tfrac{C}{D}(\tfrac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}) + (\tfrac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}) + \tfrac{E}{D}(\tfrac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y})$$
$$= \tfrac{2}{x} - \tfrac{4x}{x^2 + y} + \tfrac{2}{y} + \tfrac{2}{x^2 + y};$$
$$A'' = \tfrac{A}{D}(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}) + \tfrac{B}{D}(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}) + \tfrac{C}{D}(\tfrac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}) + (\tfrac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}) + \tfrac{E}{D}(\tfrac{\partial \partial \Phi''}{\partial x \partial y})$$
$$= \tfrac{2}{x} - \tfrac{4x}{x^2 + y} - \tfrac{2}{y} - \tfrac{2}{x^2 + y},$$
$$\beta = 4,$$

$\sigma = e$

$$\sigma = e^{\int \frac{A' \partial \Phi'' + A' \partial \Phi'}{\beta}} = \frac{x}{y(x^2 + y)}.$$

Or la formule générale

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \int \frac{B'}{\beta} (\partial \Phi' \nu : \Phi'' + \partial \Phi'' \mu : \Phi')$$

$$= \int \left[\frac{(\partial x + \partial y) \nu : (x - y) + (\partial x - \partial y) \mu : (x + y)}{x x} \right]$$

$$= \int \left[\frac{\partial x [\nu : (x - y) + \mu : (x + y)]}{x x} + \frac{\partial y [\nu : (x - y) - \mu : (x + y)]}{x x} \right].$$

Pour que cette quantité ſoit intégrable, il faut que

$$\left[\frac{\partial . \left[\frac{\nu : (x - y) + \mu : (x + y)}{x x} \right]}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial . \left[\frac{\nu : (x - y) - \mu : (x + y)}{x x} \right]}{\partial x} \right]$$

ou

$$- \frac{\nu' : (x - y) + \mu' : (x + y)}{x x} = \frac{\nu' : (x - y) - \mu' : (x + y)}{x x} - \frac{2 [\nu : (x - y) - \mu : (x + y)]}{x^3},$$

ou

$$\frac{\nu' : (x - y) - \mu' : (x + y)}{\nu : (x - y) - \mu : (x + y)} = \frac{1}{x},$$

donc $\nu : x - y) - \mu : (x + y) = a x$, $\nu' : (x - y) - \mu' : (x + y) = a$,

donc $\nu : (x - y) = - (x - y)$, $\mu : (x + y) = x + y$, $a = - 2$.

donc

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \int \left[- \frac{(\partial x + \partial y)(x - y) + (\partial x - \partial y)(x + y)}{x x} \right]$$

$$= \int \left(\frac{- 2 x \partial y + 2 y \partial x}{x x} \right) = - \frac{2 y}{x}, \text{ donc}$$

$$\Pi' = - \frac{2 y}{x} \cdot \frac{x}{y (x^2 + y)} = - \frac{2}{x^2 + y},$$

ou en général $\Pi' = - \frac{1}{x^2 + y}$. Cette valeur ſatisfait à l'équation IV. donc l'Intégrale complette de l'équation propoſée eſt

$$z = - \frac{1}{x^2 + y} [F : (x + y) + f : (x - y)]$$

$$+ \frac{x}{y (x^2 + y)} [(x + y) F' : (x + y) - (x - y) f' : (x - y)].$$

§. 12.

§. 12. On a remarqué depuis longtems que les équations différentielles du ſecond degré dont l'Intégrale a la forme que nous venons d'examiner, n'ont point d'Intégrale premiere, c'eſt-à-dire qu'on ne peut point aſſigner d'équations différentielles du premier degré, deſquelles elles réſultent. M. Monge, traitant une équation de cette eſpèce dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris pour 1787, a cru trouver cette Intégrale premiere qu'il dit avoir été méconnue par les Géomètres. Mais nous ne croyons pas avec cet illuſtre Mathématicien que cette Intégrale puiſſe être admiſe, nous indiquerons plus bas les raiſons de notre opinion, & il nous ſemble que ce Paradoxe doit être expliqué par d'autres principes. Pour plus de clarté, nous traiterons d'abord l'exemple de M. Monge, enſuite nous conſidérerons la choſe d'une maniere générale.

§. 13. Soit l'Intégrale

$$z = F:(x+y) + f:(x-y) - x\,[F':(x-y) - f':(x-y)],$$

on a en différentiant

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -x\,F'':(x+y) - xf'':(x-y),$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = F':(x+y) - f':(x-y) - xF'':(x+y) + xf'':(x-y),$$

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) = -F'':(x+y) - f'':(x-y) - xF''':(x+y) - xf''':(x-y);$$

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = F'':(x+y) + f'':(x-y) - xF''':(x+y) - xf''':(x-y),$$

donc

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \frac{2}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = o.$$

L'Intégrale ſuppoſée ſatisfait donc à cette équation différentielle du ſecond degré. M. Euler a trouvé cette Intégrale dans

dans le T. III. de ſon Calcul Intégral; mais ce grand Géomètre n'a point trouvé d'Intégrale premiere qui put lui ſatisfaire. Voyons comment M. Monge a cherché à y ſuppléer. Nous avons par ce qui précède,

$$-F'':(x+y)=\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}+f'':(x-y),$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-F':(x+y)+f':(x-y)-2xf'':(x-y).$$

Mais

$$-F':(x+y)=-\int(\partial x+\partial y)F'':(x+y)$$
$$=\int\left[\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}(\partial x+\partial y)+(\partial x+\partial y)f'':(x-y)\right],$$

donc

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f':(x-y)-2xf'':(x-y)$$
$$+\int\left[\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}(\partial x+\partial y)+(\partial x+\partial y)f'':(x-y)\right],$$

équation que trouve M. Monge p. 134. & qu'il dit être une Intégrale premiere de l'équation propoſée du ſecond degré. Mais

$$\int(\partial x+\partial y)f'':(x-y)=-\int(\partial x-\partial y)f'':(x-y)$$
$$+2\int\partial xf'':(x-y)=-f':(x-y)+2\int\partial xf\ :(x-y)$$
$$=-f':(x-y)\ 2xf'':(x-y)$$
$$-\int 2x(\partial x-\partial y)f''':(x-y).$$

On a donc en ſubſtituant cette valeur,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\int\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}(\partial x+\partial y)-2x(\partial x-\partial y)f''':(x-y).$$

On

On a en différentiant

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}-2\,xf''':(x-y)$$

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)=\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}+2\,xf''':(x-y).$$

Si l'on ajoute ces deux équations l'une à l'autre, on a l'équation propoſée,

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)-2\,\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}=0.$$

Si on les retranche l'une de l'autre, on a

$$f''':(x-y)=-\frac{1}{4x}\left[\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)-2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)\right],$$

l'équation eſt donc

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\int\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}(\partial x+\partial y)$$
$$+\tfrac{1}{2}(\partial x-\partial y)\left[\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)-2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)\right].$$

Si l'on différentie cette équation, on retrouve l'équation propoſée. Cette Intégrale premiere eſt donc illuſoire, puiſque la fonction arbitraire qu'elle contient, ne peut ſe déterminer que par le moyen de différences partielles du ſecond degré. Dans les équations différentielles ordinaires les Intégrales indéfinies ont lieu. parceque $\int X\partial x$ ne contient qu'une ſeule variable; mais $\int(\partial x+\partial y)f'':(x-y)$ contient deux variables & la quantité ſous le ſigne peut ne pas ſatisfaire à la condition d'intégrabilité. L'équation que trouve M. Monge n'eſt donc qu'une transformation de l'équation propoſée, & non une véritable intégration. Il parait par le Mémoire de M. *Monge* qu'on lui a déjà fait des objections

de ce genre. On remarquera de plus que l'Intégrale premiere doit dériver par une ſeule différentiation de l'Intégrale finie, ce qui n'a pas lieu dans ce cas là.

§. 14. Voyons maintenant s'il n'eſt pas poſſible de tirer de la nature même de ces Intégrales la raiſon de ce paradoxe. Reprenons l'équation:

$$z = F:(x+y)+f:(x-y)-xF':(x+y)-xf':(x-y),$$

on a en différentiant

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-F':(x+y)+f':(x-y)-2xf'':(x-y),$$

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)=-2F'':(x+y)-2f'':(x-y),$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)-\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)=-4f''':(x-y),$$

$$\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\right)-2\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)=0.$$

Mais nous avons trouvé dans le §. précédent

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}=-F'':(x+y)-f'':(x-y),$$

donc

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)=\frac{2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x},$$

ce qui donne l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)-\frac{2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x}=0,$$

équation qui réſulte, comme on voit, de la comparaiſon de deux différentielles qui contiennent les mêmes fonctions arbitraires, & non de la différentiation réguliere de l'Intégrale, c'eſt-à-dire de l'élimination complette des fonctions ar-

bi-

bitraires par le moyen de la différentiation. On aurait pu, en éliminant d'une maniere différente les fonctions arbitraires, parvenir à une équation du troiſième degré ſeulement, comme en le voit par le tableau ſuivant:

$$z = F:(x+y) + f:(x-y) - xF':(x+y) - xf':(x-y),$$

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x} = - F'':(x+y) - f'':(x-y),$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right)}{x} - \frac{\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right)}{x} - \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x^2} = - 2f''':(x-y).$$

$$\frac{\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)}{x} - \frac{\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right)}{x} - \frac{2\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right)}{x^2} + \frac{2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{x^3} = 0.$$

Mais il n'y a aucune maniere d'éliminer une équation de ce genre, qui conduiſe à une équation du ſecond degré ſeulement. Voilà pourquoi les équations de ce genre, qu'on obtient par la comparaiſon dont nous venons de parler, & dont nous donnerons plus bas la théorie générale n'ont point d'Intégrale premiere. Nous démontrerons en même tems l'impoſſibilité dont nous venons de parler. Nous remarquerons ſeulement içi que l'équation du quatrième degré, à laquelle nous ſommes parvenus, a une Intégrale complette, laquelle eſt $z = F:(x+y)$ [illegible] $f:(x-y) - x[$[illegible]$:(x-y) +$ [illegible]$:(x-y)]$, comme on peut s'en convaincre par la différentiation.

§. 15. Pour traiter donc cette matiere généralement, ſuppoſons d'abord l'Intégrale z' [illegible] $F:\Phi' + f:\Phi'' + \Pi F':\Phi' + \Pi f':\Phi''$. On aura en différentiant:

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)F:\Phi' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)f:\Phi'' + \Pi\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)F':\Phi' + \Pi\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)f':\Phi'',$$
$$\qquad + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) \qquad\qquad + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)F':\Phi'+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)f':\Phi''+\Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)F'':\Phi'+\Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)f'':\Phi''.$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\qquad\qquad+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$

On tire de là:

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}=z''=(\mu+1)F':\Phi'+f':\Phi''+\Pi\mu F'':\Phi',$$

en faiſant pour abrêger

$$\mu=\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}.$$

On tire de là

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)F':\Phi'+(\mu+1)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)F'':\Phi'+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)f'':\Phi''$$
$$+\left(\frac{\partial.\Pi\mu}{\partial x}\right)$$
$$+\Pi\mu\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)F''':\Phi'$$

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)F':\Phi'+(\mu+1)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)F'':\Phi'+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)f'':\Phi''$$
$$+\left(\frac{\partial.\Pi\mu}{\partial y}\right)$$
$$+\Pi\mu\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)F''':\Phi'$$

On tire de là

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)=\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\right]F':\Phi'$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]f'':\Phi''$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\Pi\mu}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\Pi\mu}{\partial y}\right)\right]F'':\Phi'.\ (e)$$

Donc prenant α' & β' pour deux quantités indéterminées, on aura:

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)+\alpha'\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)+\beta'\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)=$$

$\partial\Phi'$

$$\begin{array}{ll}
\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\right]F':\Phi' & +\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\Pi\mu}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\Pi\mu}{\partial y}\right)\right]F'':\Phi' \\
\quad+\alpha'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\right] & \quad+\alpha'\Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) \\
\quad+\beta'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right] & \quad+\beta'\Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) \\
 & +\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]f'':\Phi'' \\
 & +\alpha'\Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\
 & +\beta'\Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) \\
\quad+\alpha'\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\right]f':\Phi''. & \\
\quad+\beta'\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right] &
\end{array}$$

Si l'on fait

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)\right]+\alpha'\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)+\beta'\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)=0;$$

on aura les quatre équations ſuivantes:

$$\alpha'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\beta'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\alpha'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\beta'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)=0,$$

$$\alpha'\Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\beta'\Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)=0,$$

$$\alpha'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\beta'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\alpha'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\beta'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=0,$$

$$\alpha'\Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\beta'\Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\Pi\mu}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\Pi\mu}{\partial y}\right)=0.$$

On tire des deux premieres équations:

$$\alpha'=\frac{\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\Pi\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right]}$$

$$=-\frac{\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right]\mu}{\Pi},$$

$$\beta'=-\frac{\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\Pi\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right]}$$

$$=\frac{\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\right]\mu}{\Pi}.$$

§. 16.

§. 16. Pour que l'intégrale ſuppoſée conduiſit à une équation du ſecond degré ſeulement, il faudrait qu'on eut $\alpha' = \beta' = 0$, ce qui donne ou $\mu = 0$ & par conſéquent $\Phi' = \Phi''$, ou $\Pi = \Phi''$. Or cette ſuppoſition eſt inadmiſſible; car nous avons démontré §. 2. que Π doit être une fonction de $\Phi' + \Phi''$; de plus cette ſuppoſition rendrait μ infini, ce qui exclud cette maniere d'éliminer. De quelque maniére qu'on élimine les fonctions arbitraires, on parviendra toujours à de ſemblables concluſions.

§. 17. Maintenant l'équation 4me du §. 15. peut ſe mettre ſous cette forme:

$$\alpha'\Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\beta'\Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\Pi\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\right]$$
$$+\mu\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right]=0.$$

Retranchons la de la 3me équation multipliée par Π, & l'on aura:

$$\alpha'\Pi\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\beta'\Pi\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)-\mu\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right]=0.$$

Subſtituant les valeurs de α' & β' dans cette équation & reduiſant, elle deviendra:

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)-\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)=0,$$

équation dont l'Intégrale eſt $\Pi = \varphi : (\Phi' + \Phi'')$, cela donne $\mu = \frac{1}{\varphi : (\Phi' + \Phi'')}$. Or la 4me équation devient, en y ſubſtituant les valeurs de α' & β':

$$-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\right]\mu+\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\right]\mu$$

$$+\Pi\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)\right]$$

$$+\mu\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\right]=0, \text{ ou}$$

$$\mu\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]+2\mu\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\right]$$

$$+\Pi\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)\right]=0,$$

ou en ſubſtituant les valeurs de Π & μ & diviſant par

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{\rho':(\Phi'+\Phi'')}+\frac{2\rho:(\Phi'+\Phi'')}{\rho':(\Phi'+\Phi'')}-\frac{\rho:(\Phi'+\Phi'')\,\rho'':(\Phi'+\Phi'')}{\rho':(\Phi'+\Phi'')^2}=0, \text{ ou}$$

$$1+2\rho:(\Phi'+\Phi'')-\frac{\rho:(\Phi'+\Phi'')\,\rho'':(\Phi'+\Phi'')}{\rho':(\Phi'+\Phi'')}=0.$$

Faiſons $\rho:(\Phi'+\Phi'')=\frac{1}{\sigma.(\Phi'+\Phi'')}$, & l'équation deviendra $\frac{\sigma''.(\Phi'+\Phi'')}{\sigma.(\Phi'+\Phi'')}\quad\sigma':(\Phi'+\Phi'')=0$. C'eſt l'équation à la quelle nous ſommes parvenus §. 3., & de laquelle on tirera les mêmes réſultats.

§. 18. Les deux Intégrales que nous avons trouvées dans le §. 3. peuvent ſe mettre ſous cette forme:

$$\frac{z}{\Pi\sqrt{C}\,\text{Tang}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]}=z'=F:\Phi'+f:\Phi''$$

$$+\frac{\cot.\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]}{\sqrt{C}}(F':\Phi'+f':\Phi''),$$

$$-\tfrac{z}{2}(\Phi'+\Phi''+D)=z'=F:\Phi'+f:\Phi''$$

$$-\tfrac{1}{2}(\Phi'+\Phi''+D)(F':\Phi'+f':\Phi'').$$

Pre-

Prenons d'abord cette ſeconde équation, ce qui donne $\Pi = -\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi'' + D)$, $\mu = -z$. Faiſons pour abréger

$$a = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \pi}{\partial y}\right),$$

nous aurons

$$z'' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{a}.$$

Subſtituant cette valeur dans l'équation

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)\right] + \alpha'\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) + \beta'\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = 0,$$

on aura en multipliant toute l'équation par a:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x^2}\right) - \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x \partial y}\right) \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y^2}\right) \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) \qquad - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) \\
&- \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right) \qquad + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right) \\
&- \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)}{a} \qquad + \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)}{a} \\
&+ \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)}{a} \qquad - \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)}{a} \\
&+ \alpha a \qquad + \beta a
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Subſtituant maintenant la valeur de Π dans la valeur de a, on aura:

$$a = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\right],$$

$$\alpha' = \frac{2\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\Phi' + \Phi'' + D}, \quad \beta' = \frac{2\left[\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\right]}{\Phi' + \Phi'' + D}.$$

Sub-

Subſtituant ces valeurs dans l'équation, nous aurons:

$$
\begin{aligned}
&\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \partial z'}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\tfrac{\partial \partial z'}{\partial x \partial y}\right) \\
&\qquad +\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \partial z'}{\partial y^2}\right) \\
&+\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\tfrac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right)+\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right)\right]}{\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)} \\
&-\frac{\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\tfrac{\partial \partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right)+\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}\right)\right]}{\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)} \\
&+\frac{\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)-\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}{\Phi'+\Phi''+D}\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}
\right\}\times\left(\tfrac{\partial z'}{\partial x}\right) \\
&+\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\begin{aligned}&\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \partial \Phi''}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\tfrac{\partial \partial \Phi''}{\partial x \partial y}\right)+\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \partial \Phi''}{\partial y^2}\right)\right] \\ &-\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left[\left(\tfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \partial \Phi'}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)+\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\right]\left(\tfrac{\partial \partial \Phi'}{\partial x \partial y}\right)+\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \partial \Phi'}{\partial y^2}\right)\right]\end{aligned}}{\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\tfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)} \\
&+\frac{\left[\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right]-\left[\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right]}{\Phi'+\Phi''+D}\left[\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}
\right\}\times\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

§. 19. Voilà la premiere forme générale d'équations ſuſceptibles de l'intégrale propoſée. Soit par exemple propoſée l'équation:

$$-\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x^2}\right)+(2x-1)\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x\,\partial y}\right)+2x\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{10x^2+10x+1}{x(x+1)(2x+1)}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)$$
$$-\left(\frac{8x^3+2x^2-4x-1}{x(x+1)(2x+1)}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)=0,$$

on trouve d'abord par les méthodes connues $\Phi'=x^2+y$, $\Phi''=x-y$, & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation générale, je vois qu'en faiſant $D=0$, elle coïncide avec l'équation propoſée. Je fais donc

$$\Pi=-\tfrac{1}{2}(\Phi'+\Phi'')=-\tfrac{1}{2}(x^2+x)$$

& j'ai l'intégrale complette

$$z'=F:(x^2+y)+f:(x-y)-\tfrac{1}{2}(x^2+x)[F':(x^2+y)+f':(x-y)].$$

§. 20. Si l'on prend la premiere équation du §. 18. on a

$$\Pi=\frac{\text{cot.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]}{\sqrt{C}}, \text{ donc}$$

$$\mu=-2\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]^2,$$

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)=-\frac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]}{2\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]^2},$$

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)=-\frac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]}{2\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]^2}.$$

$$a=\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{2\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]^2},$$

$\alpha' =$

$$\alpha'=-\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{2\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right]^2}-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\frac{2\,\text{ſin}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right]^3\sqrt{C}}{\text{coſ}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right]},$$

$$\beta'=\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{2\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right]^2}-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]\frac{2\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right]^3\sqrt{C}}{\text{coſ.}\left[\left(\frac{\Phi'-\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right]}.$$

Donc

$$l\,a = l\frac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]}{2} - 2\,l\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right] =$$

(en appellant A la valeur de a dans le cas précedent)

$$l\,A - 2\,l\left[\text{ſin.}\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right].$$ Donc

$$\frac{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)}{a}=\frac{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)}{A}-\sqrt{C}\,\text{cot.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right]\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]$$

$$\frac{\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)}{a}=\frac{\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)}{A}-\sqrt{C}\,\text{cot.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right]\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right].$$

Il ſuffira donc d'ajouter dans l'équation du cas précédent, au coëfficient de $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ la quantité

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\sqrt{C}\,\text{cot.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right],$$

& au coëfficient de $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ la quantité

$$-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\sqrt{C}\,\text{cot.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right]$$

& en mettant pour $\alpha' a$, $\beta' a$ les valeurs que nous venons de trouver, on parviendra à l'équation ſuivante:

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)\times\left\{\begin{array}{l}
+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\dfrac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}\\
-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\dfrac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}\\
+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\sqrt{C}\,\text{cot.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]\\
-\frac{\sqrt{C}}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\dfrac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\left[1-2\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]^2\right]}{\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]\text{coſ.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]}
\end{array}\right\}$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)\times\left\{\begin{array}{l}
+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\dfrac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}\\
-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\dfrac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}\\
-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\sqrt{C}\,\text{cot.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]\\
+\frac{\sqrt{C}}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\dfrac{\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]\left[1-2\,\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]^2\right]}{\text{ſin.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]\text{coſ.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C}+D\right]}
\end{array}\right\}$$

§. 21.

§. 21. Voilà la ſeconde forme d'équations ſuſceptibles de la même Intégrale. Soit par exemple propoſée l'équation:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - \frac{2a\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)}{\text{ſin.}(ax+b)\,\text{coſ.}(ax+b)} = 0.$$

On trouve $\Phi' = x + y$, $\Phi'' = x - y$, $\frac{\Phi' + \Phi''}{2} = x$, $\sqrt{C} = a$, $D = b$. Je fais donc $\Pi = \frac{\text{coſ.}(ax+b)}{a}$; ces valeurs coïncident avec l'équation propoſée, & l'on a l'Intégrale

$$z' = F:(x+y) + f:(x-y) + \frac{\text{coſ.}(ax+b)}{a}[F':(x+y) + f':(x-y)].$$

§. 22. Nous avons ſuppoſé jusqu'ici $\Pi' = 1$. Faiſons maintenant $z' = \frac{z}{\Pi}$, nous aurons les deux Intégrales

$$z = \Pi'(F:\Phi' + f:\Phi'') + \Pi'\text{cot.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C} + D\right](F':\Phi' + f':\Phi''),$$

$$z = \Pi'(F\cdot\Phi' + f:\Phi'') - \frac{\Pi'}{2}(\Phi' + \Phi'' + D)(F':\Phi' + f':\Phi'').$$

Il s'agit de ſavoir quelles équations différentielles en réſulteront, & comment on pourra remonter de ces différentielles à l'Intégrale ſuppoſée. En ſuppoſent $\Pi' = 1$, l'équation différentielle aura cette forme:

$$\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y^2}\right) + \frac{E'}{D'}\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{C'}{D'}\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x^2}\right) + \frac{B'}{D'}\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) + \frac{A'}{L'}\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = 0.$$

Faiſant maintenant $z' = \frac{z}{\Pi'}$, & ſubſtituant les valeurs, on aura l'équation ſuivante:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)}{\Pi'} + \frac{E'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi'} + \frac{C'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)}{\Pi'} \\
\quad - \frac{E'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{2C'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{C'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)}{\Pi'^2} \\
\quad - 2\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'^2} - \frac{E'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'^2} + \frac{2C'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)^2}{\Pi'^3} \\
\quad + \frac{\frac{B'}{D'}}{\Pi'} + \frac{\frac{A'}{D'}}{\Pi'} - \frac{E'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y}\right)}{\Pi'^2} \\
\quad + \frac{2E'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'^3} \\
\quad - \frac{\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)}{\Pi'^2} \\
\quad + 2\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)^2}{\Pi'^3} \\
\quad - \frac{A'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'^2} \\
\quad - \frac{B'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'^2}
\end{array}\right\} = 0.$$

on

ou ſi l'on fait $\frac{1}{u'} = \pi$, cette équation deviendra en la diviſant toute par π:

$$\left.\begin{array}{llll}
\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + \frac{E'}{L'}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{C'}{D'}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) & & & \\
& + \frac{E'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\pi} & + \frac{2C'}{L'}\frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\pi} & + \frac{C'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial\partial \pi}{\partial x^2}\right) z}{\pi} \\
& + \frac{2\left(\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)}{\pi} & + \frac{E'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)}{\pi} & + \frac{E'}{L'}\frac{\left(\frac{\partial\partial \pi}{\partial x \partial y}\right)}{\pi} \\
& + \frac{B'}{D'} & + \frac{A'}{D'} & + \frac{\left(\frac{\partial\partial \pi}{\partial y^2}\right)}{\pi} \\
& & & + \frac{A'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)}{\pi} \\
& & & + \frac{B'}{L'}\frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)}{\pi}
\end{array}\right\} = 0.$$

Lors donc qu'on aura à intégrer une équation différentielle de la forme:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{G}{D} z = 0,$$

on aura en comparant les deux équations:

$$\frac{E}{D} = \frac{E'}{L'}; \quad \frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}; \quad \frac{B}{D} = \frac{E'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)}{\pi} + 2\frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)}{\pi} + \frac{B'}{L'};$$

$$\frac{A}{D} = \frac{2C'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)}{\pi} + \frac{E'}{D'}\frac{\left(\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)}{\pi} + \frac{A'}{D'};$$

$$\frac{G}{D} = \frac{C'}{D'} \frac{\left(\frac{\partial\partial\pi}{\partial x^2}\right)}{\pi} + \frac{E'}{D'} \frac{\left(\frac{\partial\partial\pi}{\partial x \partial y}\right)}{\pi} + \frac{\left(\frac{\partial\partial\pi}{\partial y^2}\right)}{\pi}$$
$$+ \frac{A'}{D'} \frac{\left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\right)}{\pi} + \frac{B'}{D'} \frac{\left(\frac{\partial\pi}{\partial y}\right)}{\pi}.$$

Les valeurs Φ' & Φ'' ſeront donc les mêmes pour ce cas & pour le précédent où $\Pi' = 1$. Connaiſſant Φ' & Φ'' on trouvera les valeurs de $\frac{A'}{D'}$, $\frac{B'}{D'}$ d'après les équations des §. précédens. On aura maintenant:

$$\frac{\left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\right)}{\pi} = \frac{\frac{2A}{D} - \frac{B}{D}\cdot\frac{E'}{D'} - \frac{2A'}{D'} + \frac{B'\cdot E'}{D'\cdot D'}}{\frac{4C'}{D'} - \frac{E'E'}{D'D'}},$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\pi}{\partial y}\right)}{\pi} = - \frac{\frac{A}{D}\cdot\frac{E'}{D'} + \frac{2C'}{D'}\cdot\frac{B}{D} + \frac{A'E'}{D'D'} - \frac{2B'C'}{D'D'}}{\frac{4C'}{D'} - \frac{E'E'}{D'D'}}.$$

Donc

$$\frac{\partial\pi}{\pi} = \frac{\left[2\left(\frac{A}{D} - \frac{A'}{D'}\right) - \frac{E'}{D'}\left(\frac{B}{D} - \frac{B'}{D'}\right)\right]\partial x + \left[\frac{2C'}{D'}\left(\frac{B}{D} - \frac{B'}{D'}\right) - \frac{E'}{D'}\left(\frac{A}{D} - \frac{A'}{D'}\right)\right]\partial y}{\frac{4C'}{D'} - \frac{E'E'}{D'D'}}.$$

On connaitra donc π & par conſéquent Π'. Enſuite ſubſtituant cette valeur dans l'équation que donne la valeur de $\frac{G}{D}$, on déterminera les conſtantes C & D qui étaient reſtées indéterminées, ſi elles ne l'ont pas été auparavant.

§. 23. Soit propoſée l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{2aa}{cof.(ax+b)^2} z = 0.$$

On a ici

$$\frac{C}{D} = -1,\ \frac{E}{D} = 0,\ \frac{A}{D} = 0,\ \frac{B}{D} = 0,\ \frac{G}{D} = \frac{2aa}{cof.(ax+b)^2};$$

On trouve $\Phi' = x + y$, $\Phi'' = x - y$, donc $\surd C = a$;

D =

$D = b$, donc

$$\frac{C'}{D'} = -1,\ \frac{E'}{D'} = 0,\ \frac{A'}{D'} = -\frac{2a}{ſin.(ax+b\ coſ.(ax+b)},\ \frac{B'}{D'} = 0,\ \text{donc}$$

$$\frac{\partial\pi}{\pi} = -\frac{a\,\partial x}{ſin.(ax+b)\,coſ.(ax+b)},\ \pi = \cot.(ax+b),\ \Pi' = T(ax+b),$$

ce qui ſatisfait à l'équation où entre $\frac{G_2}{D}$. L'Intégrale complette ſera donc

$$z = aT(ax+b)[F:(x+y)+f:(x-y)]+F':(x+y)+f':(x-y).$$

§. 24. Au reſte ces deux formes d'Intégrales conduiſent, ſi l'on pouſſe la différentiation juſqu'au bout, à des équations différentielles du 4e. degré. Reprenons l'équation (e) du §. 15, & faiſons y ſuivant la premiere ſuppoſition $\Pi = -\left(\frac{\Phi'+\Phi''+D}{2}\right)$, $\mu = -z$, on aura en diviſant par

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right),\ \text{l'équation}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)} = z''' = f':\Phi'' - F'':\Phi'.$$

Donc

$$\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) f'':\Phi'' - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) F''':\Phi';$$

$$\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) f'':\Phi' - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) F''':\Phi'\ \&$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)} = F''':\Phi' = z''''.$$

Donc

$$\left(\frac{\partial z''''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) F'''':\Phi',\ \left(\frac{\partial z''''}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) F'''':\Phi',$$

& enfin

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial y}\right) = 0,$$

équation différentielle du quatrième degré. L'Intégrale com-

plette de cette équation eſt

$$z' = F : \Phi' + f : \Phi'' - \left(\frac{\Phi' + \Phi'' + D}{2}\right)(\sigma : \Phi' + \varrho : \Phi'').$$

On pourrait démontrer cette propoſition en ſubſtituant les valeurs de z & intégrant l'équation différentielle du quatrième degré. Mais comme le calcul ſerait fort long, on y parviendra plus ſimplement de la maniere ſuivante.

§. 25. Soit

$$z' = F : \Phi' + f : \Phi'' - \left(\frac{\Phi' + \Phi'' + D}{2}\right)(F' : \Phi' + f' : \Phi''),$$

on aura

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)} = z'' = -\tfrac{1}{2} F' : \Phi' + f' : \Phi'' - (\Phi' + \Phi'' + D) F'' : \Phi',$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)} = z''' = f'' : \Phi'' - F'' : \Phi'$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)} = z'''' = F''' : \Phi'$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial y}\right) = 0.$$

Soit maintenant

$$z' = F : \Phi' + f : \Phi'' - \left(\frac{\Phi' + \Phi'' + D}{2}\right)(\sigma : \Phi' + \varrho : \Phi''),$$

on aura

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)} = z'' = -F' : \Phi' + \tfrac{1}{2}\sigma : \Phi' + \tfrac{1}{2}\varrho : \Phi'' + \left(\frac{\Phi' + \Phi'' + D}{2}\right)\sigma' : \Phi',$$

∂Φ′

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}=z'''=\tfrac{1}{2}\sigma':\Phi'+\tfrac{1}{2}\varsigma':\Phi'',$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}=z''''=-\tfrac{1}{2}\sigma'':\Phi',$$

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial y}\right)=0.$$

Il eſt évident que dans les deux cas l'équation différentielle du 4e. degré ſera la même, puisque z'', z''', z'''' ſe déterminent de la même maniere par le moyen de z. Donc l'équation différentielle du 4e. degré, à laquelle nous ſommes parvenus dans le §. prec. a bien l'Intégrale complette que nous avons [a] ſignée. Et cette Intégrale renferme, comme l'on voit, deux valeurs doubles Φ' & Φ''.

§. 26. Si l'on prend la ſeconde ſuppoſition

$$\Pi=\text{cot.}\left[\left(\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right)\sqrt{C+D}\right],$$

faiſons pour abrêger $\left[\frac{\Phi'+\Phi''}{2}\right]\sqrt{C+D}=\Sigma$, & nous aurons les formules ſuivantes:

$$z'=F:\Phi'+f:\Phi''+\text{cot.}\,\Sigma\,[F':\Phi'+f':\Phi''],$$

$$\frac{\text{ſin.}\,\Sigma^2\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)\right]}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}=z''=\left(\frac{\sqrt{C}}{2}-\text{ſin.}\,\Sigma^2\right)F':\Phi'$$
$$+\frac{\sqrt{C}}{2}f':\Phi''-\frac{\text{ſin.}\,2\Sigma}{2}F'':\Phi',$$

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}=z'''=-\frac{\sqrt{C}}{2}\text{ſin.}\,2\,\Sigma\,F':\Phi'$$
$$-\frac{\sqrt{C}}{2}\text{coſ.}\,2\,\Sigma\,F'':\Phi'+\frac{\sqrt{C}}{2}f'':\Phi'',$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right)}{\text{coſ.}\, 2\Sigma\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}=z''''=\frac{c}{2}F':\Phi'+\frac{\surd c}{2}F'''':\Phi',$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial y}\right)=0.$$

Mais l'on ne peut pas trouver l'Intégrale complette de cette équation, comme dans le cas précédent, quoiqu'elle renferme bien auſſi les deux fonctions doubles Φ', Φ''. Soit

$$z'=F:\Phi'+f:\Phi''+\cot.\Sigma\,(\sigma:\Phi'+\varrho:\Phi''),$$

on aura

$$\frac{\text{ſin.}\Sigma^2\left[\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)\right]}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}=z''=-\text{ſin.}\,\Sigma^2 F':\Phi'+\frac{\surd c}{2}\sigma:\Phi'$$
$$+\frac{\surd c}{2}\varrho:\Phi''-\frac{\text{ſin.}\,2\Sigma}{2}\sigma':\Phi',$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}=z'''=-\frac{\surd c}{2}\,\text{ſin.}\,2\Sigma F':\Phi'$$
$$-\frac{\surd c}{2}\text{coſ.}\,2\Sigma\sigma':\Phi'+\frac{\surd c}{2}\varrho':\Phi'',$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right)}{\text{coſ.}\,2\Sigma\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]}=z''''=\frac{c}{2}F':\Phi'+\frac{\surd c}{2}\sigma'':\Phi'$$
$$+\frac{\surd c}{2}T\,2\Sigma\,(F'':\Phi'-\sigma':\Phi'),$$

$$\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''''}{\partial y}\right)\right](\text{coſ.}\,2\Sigma)^2}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}=z'''''=\frac{c}{2}(F'':\Phi'-\sigma':\Phi'),$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''''}{\partial y}\right)=0.$$

On voit que pour que les deux équations coïncident, il faut faire $\sigma':\Phi'=F'':\Phi'$, ou $\sigma:\Phi'=F':\Phi'$, ce qui donnerait $z'=F:\Phi'+f:\Phi''+\cot.\Sigma(F:\Phi'+\varrho:\Phi'')$. Cette Intégrale n'eſt que particuliere, par ce qu'elle ne contient que trois fonctions arbitraires. Au reſte, il y a pluſieurs remarques à faire ſur ce ſujet, que je ſupprime pour ne pas allonger trop ce Mémoire. J'y reviendrai ailleurs.

§. 27.

§. 27. Soit maintenant

$$z' = F:\Phi + f:\Phi'' + \sigma(\mu:\Phi' F':\Phi' + \nu:\Phi'' f':\Phi''),$$

on aura en procédant comme ci-deſſus,

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)} = z'' = mF':\Phi' + \nu:\Phi'' f':\Phi'' + \sigma m\mu:\Phi' F'':\Phi' \\ + \mu:\Phi' \\ + \sigma m\mu':\Phi'$$

en faiſant comme ci-deſſus

$$m = \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)}.$$

On tire de là

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = \left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)\right] F':\Phi' \\ + \nu':\Phi''\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right] f':\Phi'' \\ + \mu':\Phi'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\sigma m}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\sigma m}{\partial y}\right)\right] \\ + \mu:\Phi'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\sigma m}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\sigma m}{\partial x}\right)\right] F'':\Phi' \\ + \nu:\Phi''\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right] f'':\Phi'',$$ donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) + \alpha'\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) + \beta'\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) \\ = \left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)\right] F:\Phi' \\ + \nu':\Phi''\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right] f':\Phi'' \\ + \mu':\Phi'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\sigma m}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\sigma m}{\partial y}\right)\right. \\ + \alpha'\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)\nu:\Phi'' + \sigma\nu':\Phi''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right] \\ + \alpha'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \mu:\Phi'\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + \sigma\mu':\Phi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right] \\ + \beta'\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)\nu:\Phi'' + \sigma\nu':\Phi''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right] \\ + \beta'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \mu:\Phi'\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) + \sigma\mu':\Phi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right]$$

+

$$+ \mu : \Phi' [(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial . \sigma m}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial . \sigma m}{\partial y})] F'' : \Phi'$$
$$+ \alpha' \sigma \mu : \Phi' (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})$$
$$+ \beta' \sigma : \Phi' (\frac{\partial \Phi'}{\partial y})$$
$$+ \nu : \Phi'' [(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial \Phi''}{\partial y})] f'' : \Phi'$$
$$+ \alpha' \sigma \nu : \Phi'' (\frac{\partial \Phi''}{\partial x})$$
$$+ \beta' \sigma \nu : \Phi'' (\frac{\partial \Phi''}{\partial y}).$$

Faiſant maintenant

$$(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial z''}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial z''}{\partial y}) + \alpha' (\frac{\partial z'}{\partial x}) + \beta' (\frac{\partial z'}{\partial y}) = 0,$$

on aura les quatre équations ſuivantes:

$$\text{I. } (\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial m}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial m}{\partial y})$$
$$+ \mu' : \Phi' [(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial . \sigma m}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial . \sigma m}{\partial y})]$$
$$+ \alpha' [(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) + \mu : \Phi' (\frac{\partial \sigma}{\partial x}) \sigma \mu' : \Phi' (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})]$$
$$+ \beta' [(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) + \mu : \Phi' (\frac{\partial \sigma}{\partial y}) + \sigma \mu' : \Phi' (\frac{\partial \Phi'}{\partial y})] = 0.$$

$$\text{II. } (\nu' : \Phi'') [(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial \Phi''}{\partial y})]$$
$$+ \alpha' [(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}) + (\frac{\partial \sigma}{\partial x}) \nu : \Phi'' + \sigma \nu' : \Phi'' (\frac{\partial \Phi''}{\partial x})]$$
$$+ \beta' [(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}) + (\frac{\partial \sigma}{\partial y}) \nu : \Phi'' + \sigma \nu' : \Phi'' (\frac{\partial \Phi''}{\partial x})] = 0,$$

$$\text{III. } (\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial . \sigma m}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial . \sigma m}{\partial y}) + \alpha' \sigma (\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) + \beta' \sigma (\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) = 0,$$

$$\text{IV. } (\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}) + \alpha' \sigma (\frac{\partial \Phi''}{\partial x}) + \beta' \sigma (\frac{\partial \Phi''}{\partial y}) = 0.$$

Eliminant α' & β' au moyen des équations III & IV, on aura

$$\alpha' = - \frac{[(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}) + (\frac{\partial \sigma}{\partial y}) \nu : \Phi'' + \sigma \nu' : \Phi'' (\frac{\partial \Phi''}{\partial y})] m}{\sigma \nu : \Phi''} + \frac{m (\frac{\partial \Phi''}{\partial y}) \nu' : \Phi''}{\nu : \Phi''}$$

$\beta' =$

$$\beta' = \frac{[(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}) + (\frac{\partial \sigma}{\partial x}) \nu : \Phi'' + \sigma \nu' : \Phi'' (\frac{\partial \Phi''}{\partial x})]\, m}{\sigma \nu : \Phi''} - \frac{m (\frac{\partial \Phi''}{\partial x}) \nu' : \Phi''}{\nu : \Phi''}.$$

Maintenant l'équation I peut ſe mettre ſous cette forme:

$$\begin{aligned}&(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial m}{\partial x}) - (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})(\tfrac{\partial m}{\partial y})]\,(1 + \sigma \mu' : \Phi')\\ &\quad + m \mu' : \Phi' [(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial \sigma}{\partial x}) - (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})(\tfrac{\partial \sigma}{\partial y})]\\ &\quad + \alpha' (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}) + \alpha' \mu : \Phi' (\tfrac{\partial \sigma}{\partial x}) + \alpha' \sigma \mu' : \Phi' (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})\\ &\quad + \beta' (\tfrac{\partial \Phi}{\partial y}) + \beta' \mu : \Phi' (\tfrac{\partial \sigma}{\partial y}) + \beta' \sigma \mu' : \Phi' (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}) = 0;\end{aligned}$$

& l'équation III peut ſe mettre ſous celle-ci:

$$\begin{aligned}&[(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial m}{\partial x}) - (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})(\tfrac{\partial m}{\partial y})]\,\sigma + m [(\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y})(\tfrac{\partial m}{\partial x}) - (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x})(\tfrac{\partial m}{\partial y})]\\ &\quad + \alpha' \sigma (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial x}) + \beta' \sigma (\tfrac{\partial \Phi'}{\partial y}) = 0.\end{aligned}$$

Eliminant de là $(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial m}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial m}{\partial y})$ & reduiſant, on aura l'équation:

$$\alpha' \sigma (\tfrac{\partial \sigma}{\partial x})\ \beta' \sigma (\tfrac{\partial \sigma}{\partial y}) - m \frac{[(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})(\frac{\partial \sigma}{\partial x}) - (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})(\frac{\partial \Phi}{\partial y})]}{\mu : \Phi'} = 0;$$

Subſtituant les valeurs de α' & β' & reduiſant, on aura]

$$\left[\frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x})}{\mu : \Phi'} + \frac{(\frac{\partial \Phi''}{\partial x})}{\nu : \Phi''}\right] \frac{(\frac{\partial \sigma}{\partial y})}{\sigma} - \left[\frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial y})}{\mu : \Phi'} + \frac{(\frac{\partial \Phi''}{\partial y})}{\nu : \psi''}\right] \frac{(\frac{\partial \sigma}{\partial x})}{\sigma} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\sigma = \Sigma' : \int (\tfrac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \tfrac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''}).$$

Faiſon maintenant

$$\int (\tfrac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \tfrac{\partial \Phi''}{\nu : \psi''}) = \varrho : \sigma,$$ on a

$(\frac{\partial \varrho}{\partial y})$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) = \frac{\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{\mu:\Phi'} + \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{\nu:\Phi'}}{\varrho':\sigma}, \quad \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) = \frac{\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\mu:\Phi'} + \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\nu:\Phi''}}{\varrho':\sigma},$$

$$m = \mu:\Phi'\,\varrho':\sigma.$$

Subſtituant maintenant ces valeurs dans l'équation III & reduiſant, on aura

$$(2 + \varrho':\sigma)\frac{\varrho':\sigma}{\sigma} + \varrho'':\sigma = 0,$$

équation identique avec celle du §. 5. On en tirera les mêmes conſéquences, c'eſt-à-dire les deux valeurs de σ rapportées à la fin du § cité. On pourrait traiter ce cas avec le même détail que le précédent; mais cela nous entrainerait trop loin. D'ailleurs le but de ce Mémoire eſt principalement de faire connaître la véritable nature des Intégrales dont il eſt ici queſtion.

§. 18. Venons maintenant au cas traité dans le §. 6, où nous avons ſuppoſé,

$$z' = F:\Phi' + f:\Phi'' + \Pi\,F':\Phi',$$

on aura en différentiant,

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)F':\Phi' + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)f':\Phi'' + \Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)F'':\Phi', + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)F':\Phi' + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)f':\Phi'' + \Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)F'':\Phi', + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$

donc

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\Pi\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right]}=z''=\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right]}F':\Phi'+F'':\Phi'$$
$$+\frac{1}{\Pi}$$

$=\frac{\mu+1}{\Pi}F':\Phi'+F'':\Phi'$, en faiſant

$$\mu=\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}.$$

donc

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial.\frac{\mu+1}{\Pi}}{x}\right)F':\Phi'+\left(\frac{\mu+1}{\Pi}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)F'':\Phi'+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)F''':\Phi'$$

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial.\frac{\mu+1}{\Pi}}{\partial y}\right)F':\Phi'+\left(\frac{\mu+1}{\Pi}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)F'':\Phi'+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)F''':\Phi';$$

donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)=\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\frac{\mu+1}{\Pi}}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\frac{\mu+1}{\Pi}}{\partial y}\right)\right]F':\Phi'.$$

Pour avoir donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)=0;$$

il faut que $\frac{\mu+1}{\Pi}=\sigma:\Phi'$, ou (en remettant pour μ ſa valeur)

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}=\Pi\sigma:\Phi'-1;$$

donc

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right] \Pi\,\sigma : \Phi'$$
$$- \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = 0.\right.$$

Faiſons $\Pi = \Pi' + \varrho : \Phi'$, l'équation deviendra en ſubſtituant les valeurs,

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right] \Pi\,\sigma : \Phi'$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right]\left(\sigma : \Phi'\,\varrho : \Phi' - \varrho' : \Phi' - 1\right) = 0.$$

Faiſons $\sigma : \Phi'\,\varrho : \Phi' - \varrho' : \Phi' - 1 = 0$, on aura $\sigma : \Phi' = \frac{\varrho' : \Phi' + 1}{\varrho : \Phi'}$, & l'équation deviendra

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right] \Pi' \frac{(\varrho' : \Phi + 1)}{\varrho : \Phi'} = 0.$$

Il eſt évident que la fonction arbitraire de la valeur de Π' eſt une fonction de Φ''. Faiſons $\Pi' = \Pi''\,\nu : \Phi''$, il s'agit de trouver une valeur particuliere de Π'' qui ſatisfaſſe à l'équation:

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right] \frac{\Pi''\,(\varrho' : \Phi' + 1)}{\varrho : \Phi'} = 0.$$

Faiſons $\Pi'' = \tau : \Phi'$, l'équation deviendra, en diviſant par

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right),$$

$$- \tau' : \Phi' + \frac{\tau : \Phi'\,(\varrho' : \Phi' + 1)}{\varrho : \Phi'} = 0, \text{ donc}$$

$$\frac{\tau' : \Phi'}{\tau : \Phi'} = \frac{\varrho' : \Phi' + 1}{\varrho : \Phi'} \;\&\; \tau : \Phi' = \varrho : \Phi'\, e^{\int \frac{\partial \Phi'}{\varrho : \Phi'}},$$

donc

$$\Pi = \varrho : \Phi'\, e^{\int \frac{\partial \Phi'}{\varrho : \Phi'}}\, \nu : \Phi'' + \varrho : \Phi',$$

comme nous l'avons trouvé dans le § cité.

§. 29.

§. 29. Soit maintenant l'équation

$$z' = \mathrm{F} : \Phi' + f : \Phi'' + \Pi' (\mathrm{F}' : \Phi' + f' : \Phi'')$$
$$+ \Pi (\mathrm{F}'' : \Phi' + f'' : \Phi''),$$

on a

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \mathrm{F}' : \Phi' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) f : \Phi'' + \Pi' \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) \mathrm{F}'' : \Phi' + \Pi' \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) f'' : \Phi''$$
$$\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) \quad + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) \quad + \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) \quad + \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$$
$$+ \Pi \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) \mathrm{F}''' : \Phi' + \Pi' \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) f''' : \Phi''$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) \mathrm{F}' : \Phi' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) f' : \Phi'' + \Pi' \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) \mathrm{F}'' : \Phi' + \Pi' \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) f'' : \Phi''$$
$$+ \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) \quad + \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) \quad + \quad \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) \quad + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ \Pi \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) \mathrm{F}''' : \Phi' + \Pi \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) f''' : \Phi''$$

Donc en faiſant

$$\mu = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}, \quad \nu = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)},$$

on a

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\Pi \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)} = z'' = \frac{(\mu + 1)}{\Pi} \mathrm{F} : \Phi'$$
$$+ \frac{\mu}{\Pi} f' : \Phi'' + \left(\frac{\Pi' + \nu}{\Pi}\right) \mathrm{F}'' : \Phi' + \frac{\nu}{\Pi} f'' : \Phi'' + \mathrm{F}''' : \Phi',$$

donc

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial . \frac{\mu + 1}{\Pi}}{\partial x}\right) \mathrm{F}' : \Phi' + \frac{(\mu + 1)}{\Pi} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) \mathrm{F}'' : \Phi'$$
$$+ \left(\frac{\partial . \frac{\Pi' + \nu}{\Pi}}{\partial x}\right)$$
$$+ \left(\frac{\Pi' + \nu}{\Pi}\right) \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) \mathrm{F}''' : \Phi' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) \mathrm{F}'''' : \Phi'$$

$$+\frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)}{\Pi}f' : \Phi'' + \frac{\mu}{\Pi}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)f'' : \Phi'' + \nu\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)f''' : \Phi';$$

$$+ \left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . \frac{\mu + 1}{\Pi}}{\partial y}\right)F' : \Phi' + \left(\frac{\mu + 1}{\Pi}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)F'' : \Phi'$$

$$+ \left(\frac{\partial . \frac{\Pi' + \nu}{\Pi}}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(\frac{\Pi' + \nu}{\Pi}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)F''' : \Phi' + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)F'''' : \Phi'$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}{\Pi}f' : \Phi' + \frac{\mu}{\Pi}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)f'' : \Phi'' + \nu\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)f''' : \Phi'';$$

$$+ \left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)$$

donc

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)$$

$$= \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial . \frac{\mu + 1}{\Pi}}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial . \frac{\mu + 1}{\Pi}}{\partial y}\right)\right]F' : \Phi'$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial . \frac{\Pi' + \nu}{\Pi}}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial . \frac{\Pi' + \nu}{\Pi}}{\partial y}\right)\right]F'' : \Phi'$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)}{\Pi} - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}{\Pi}\right]f' : \Phi'' + \frac{\mu}{\Pi}\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]f'' : \Phi''$$

$$+ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial . \frac{\nu}{\Pi}}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial . \frac{\nu}{\Pi}}{\partial y}\right)$$

$$+ \frac{\nu}{\Pi}\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]f''' : \Phi''.$$

Si l'on fait maintenant

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) + \alpha'\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) + \beta'\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = 0,$$

on aura l'équation ſuivante:

$[(\frac{\partial z'}{}$

$$\left.\begin{array}{l}
\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\frac{\mu+1}{\Pi}}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\frac{\mu+1}{\Pi}}{\partial y}\right)\right]F':\Phi' \\
\quad+\alpha'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\right] \\
\quad+\beta'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\right] \\
\qquad\qquad+\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\frac{\Pi'+\nu}{\Pi}}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\frac{\Pi'+\nu}{\Pi}}{\partial y}\right)\right]F'':\Phi' \\
\qquad\qquad\quad+\alpha'\left[\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\right] \\
\qquad\qquad\quad+\beta'\left[\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right] \\
+\alpha'\Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)F''':\Phi'+\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)}{\Pi}-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)}{\Pi}\right]f':\Phi'' \\
+\beta'\Pi\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\qquad\quad+\alpha'\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\right] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad+\beta'\left[\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\right] \\
\qquad\qquad\quad+\frac{\mu}{\Pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]f'':\Phi'' \\
\qquad\qquad\quad+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial.\frac{\nu}{\Pi}}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial.\frac{\nu}{\Pi}}{\partial y}\right) \\
\qquad\qquad\quad+\alpha'\left[\Pi'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\right] \\
\qquad\qquad\quad+\beta'\left[\Pi'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\right] \\
+\frac{\nu}{\Pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right]f''':\Phi'' \\
+\alpha'\Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\
+\beta'\Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)
\end{array}\right\}=0$$

Égalant à zero les coëfficiens de $F''':\Phi'$, $f''':\Phi''$, on aura $\alpha'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\beta'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)=0$

$$\alpha\,\Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\beta\,\Pi\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{\nu}{\Pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]=0.$$

On

On tire de la

$$\alpha' = -\nu \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}{\Pi^2}, \quad \beta' = \nu \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)}{\Pi^2}.$$

Égalant à zero les quatre autres coëfficiens, developpant & reduiſant, on aura les quatre équations ſuivantes:

$$\text{I. } \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)\right] - (\mu+1)\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}\right]$$

$$- \frac{\nu}{\Pi}\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)\right] = 0,$$

$$\text{II. } \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\right.$$

$$- (\Pi' + 2\nu)\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}\right] = 0,$$

$$\text{III. } \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) - \mu\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}\right]$$

$$- \frac{\nu}{\Pi}\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{\nu}{\Pi}\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)\right] = 0,$$

$$\text{IV. } \mu\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$$

$$- 2\nu\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}\right]$$

$$= \frac{\nu \Pi'}{\Pi}\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right] = 0.$$

Retranchant la premiere équation de la troiſiéme, on aura

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) - \nu\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right] = 0,$$

ce qui donne

$$\nu = -\frac{\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\right.}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)},$$

d'où

d'où l'on tire

$$[(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})+(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})](\frac{\partial\Pi}{\partial x})-[(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})+(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})](\frac{\partial\Pi}{\partial y})=0;$$

équation dont l'intégrale eſt $\Pi=\sigma:(\Phi'+\Phi'')$. Subſtituant cette valeur dans les équations II & IV, on aura en diviſant par $(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})-(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})$,

$$\frac{(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})(\frac{\partial\Pi'}{\partial x})-(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Pi'}{\partial y})}{(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})-(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})}+\sigma'':(\Phi'+\Phi'')$$
$$-\frac{\Pi'\sigma':(\Phi'+\Phi'')}{\sigma:(\Phi'+\Phi'')}-\frac{2[\sigma'(\Phi'+\Phi'')^2]}{\sigma:(\Phi'+\Phi'')}=0$$

$$\mu+\sigma'':(\Phi'+\Phi'')-\frac{\Pi'\sigma':(\Phi'+\Phi'')}{\sigma:(\Phi'+\Phi''}-\frac{2[\sigma':(\Phi'+\Phi'')]^2}{\sigma:(\Phi'+\Phi''}=0,$$

parceque la ſubſtitution de la valeur de Π dans celle de ν, donne $\nu=\sigma':(\Phi'+\Phi'')$. Rétranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a

$$\mu=-\frac{[(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})(\frac{\partial\Pi'}{\partial x})-(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})(\frac{\partial\Pi'}{\partial y})]}{(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})-(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})}=\frac{(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})(\frac{\partial\Pi'}{\partial x})-(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})(\frac{\partial\Pi'}{\partial y})}{(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})(\frac{\partial\Phi'}{\partial x})-(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})},$$

ce qui donne

$$[(\frac{\partial\Phi'}{\partial y})+(\frac{\partial\Phi''}{\partial y})](\frac{\partial\Pi'}{\partial x})-[(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})+(\frac{\partial\Phi''}{\partial x})](\frac{\partial\Pi'}{\partial y})=0,$$

équation dont l'intégrale eſt $\Pi'=\varrho:(\Phi'+\Phi'')$; on tire de là $\mu=\varrho':(\Phi'+\Phi'')$. Cela poſé, nos quatre équations ſe reduiront aux deux ſuivantes:

$$\varrho'':(\Phi'+\Phi'')-\frac{[\varrho':(\Phi'+\Phi'')+1]\,\sigma':(\Phi'+\Phi'')}{\sigma:(\Phi'+\Phi'')}$$
$$-\frac{\sigma':(\Phi'+\Phi'')\,\varrho:(\Phi'+\Phi'')}{\sigma:(\Phi'+\Phi'')}=0,$$

$$\varrho':(\Phi'+\Phi'')+\sigma'':(\Phi'+\Phi'')-\frac{\varrho:(\Phi'+\Phi'')\,\sigma':(\Phi'+\Phi'')}{\sigma:(\Phi'+\Phi'')}$$
$$-\frac{2[\sigma':(\Phi'+\Phi'')]^2}{\sigma:(\Phi'+\Phi'')}=0.$$

La

La premiere équation donne

$$\frac{\sigma' : (\phi' + \phi'')}{\sigma : (\phi' + \phi'')} = \frac{\varrho : (\phi' + \phi'')}{2\varrho' : (\phi' + \phi'') + 1};$$

d'où l'on tire

$$C\sigma : (\phi' + \phi'') = \sqrt{[2\varrho' : (\phi' + \phi'') + 1]},$$

donc

$$C\sigma' : (\phi' + \phi'') = \frac{\varrho'' : (\phi' + \phi'')}{\sqrt{[2\varrho' (\phi' + \phi'') + 1]}};$$

$$C\sigma'' : (\phi' + \phi'') = \frac{\varrho''' : (\phi' + \phi'')}{\sqrt{[2\varrho' (\phi' + \phi'') + 1]}} - \frac{[\varrho'' : (\phi' + \phi'')]^2}{[2\varrho' : (\phi' + \phi'') + 1]^{\frac{3}{2}}}.$$

Subſtituant ces valeurs dans la ſeconde équation, on aura l'éqnation ſuivante;

$$\varrho' : (\phi' + \phi'') + \frac{\varrho''' : (\phi' + \phi'')}{C\sqrt{[2\varrho' : (\phi' + \phi'') + 1]}}$$

$$- \frac{3[\varrho'' : (\phi' + \phi'')]^2}{C[2\varrho' : (\phi' + \phi'') + 1]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\varrho'' : (\phi' + \phi'')\, \varrho : (\phi' + \phi'')}{2\varrho' : (\phi' + \phi'') + 1} = 0.$$

Voilà l'équation à laquelle la valeur de $\varrho : (\phi' + \phi'')$ doit ſatisfaire pour que l'intégrale ſoit poſſible. Si $\varrho' : (\phi' + \phi'') = -\frac{1}{2}$, l'équation devient identiquement nulle. On a alors

$$\varrho : (\phi' + \phi'') = -\tfrac{1}{2}(\phi' + \phi'').$$

Subſtituant ces valeurs dans nos équations, la premiere devient identiquement nulle, la ſeconde devient

$$-\tfrac{1}{2} + \sigma'' : \frac{(\phi' + \phi'')}{2}\, \frac{\sigma' : (\phi' + \phi'')}{\sigma : (\phi' + \phi'')} - \frac{2[\sigma' : \phi' + \phi'')]^2}{\sigma : (\phi' + \phi'')} = 0.$$

Faiſons

$$\sigma : (\phi' + \phi'') = \frac{1}{\tau : (\phi' + \phi'')},$$ on a

σ' :

$$\sigma'.(\Phi'+\Phi'') = -\frac{\tau':(\Phi'+\Phi'')}{[\tau:(\Phi'+\Phi'')]^2},$$

$$\sigma'':(\Phi'+\Phi'') = -\frac{\tau'':(\Phi'+\Phi'')}{[\tau:(\Phi'+\Phi'')]^2} + \frac{2[\tau':(\Phi'+\Phi'')]^2}{[\tau:(\Phi'+\Phi'')]^3}.$$

L'équation deviendra donc

$$\frac{1}{2} + \frac{\tau'':(\Phi'+\Phi'')}{[\tau:(\Phi'+\Phi'')]^2} + \frac{(\Phi'+\Phi'')\,\tau:(\Phi'+\Phi'')^2}{2\,\tau:(\Phi'+\Phi'')} = 0.$$

Pour intégrer cette équation, faiſons

$\Phi'+\Phi'' = 2u$, $\tau:2u = y$, on aura $\tau':u = \frac{\partial y}{2\partial u}$, $\tau'':u = \frac{\partial\partial y}{4\partial u^2}$. En faiſant du conſtant, l'équation deviendra donc

$$\frac{1}{2} + \frac{\partial\partial y}{4y^2\partial u^2} + \frac{u\partial y}{2y\partial u} = 0, \text{ ou}$$

$$\partial\partial y + 2uy\frac{\partial y}{\partial u} + 2y^2 = 0.$$

Cherchant les Intégrales particulières de cette équation par la méthode que nous avons expoſée dans les Mémoires de Berlin pour 1793, nous trouverons $\frac{u\partial y}{\partial u} - y + u^2y^2 = 0$. Cette Intégrale particuliere donne tout de ſuite $\frac{u\partial y}{\partial u} - y + u^2\partial y^2 = C$, pour l'Intégrale complette de l'équation différentielle propoſée. Mais cette équation n'eſt pas intégrable, à moins que l'on ne faſſe $C = 0$, dans ce cas elle peut ſe mettre ſous cette forme :

$$\frac{u\partial y - y\partial u}{yy} + u^2\partial u = 0,$$

équation dont l'integrale eſt $-\frac{u}{y} + \frac{u^3}{y} = D$, ou

$$y = \frac{3u}{u^3 - 3D} = \tau:2u, \text{ donc}$$

$$\tau:(\Phi'+\Phi'') = \frac{3(\Phi'+\Phi'')}{2[(\frac{\Phi'+\Phi''}{2})^3 - 3D]}, \text{ donc}$$

$$\sigma:(\Phi'+\Phi'') = \frac{\frac{(\Phi'+\Phi'')^3}{4} - 6D}{3(\Psi'+\Phi'')}.$$

L'Intégrale complette aura donc cette forme :

$$z' = F : \Phi' + f : \Phi'' - \frac{(\Phi' + \Phi'')}{2} (F' : \Phi' + f' : \Phi'')$$
$$+ \left[\frac{\frac{(\Phi' + \Phi'')^3}{4} - 6D}{3(\Phi' + \Phi'')} \right] (F'' : \Phi' + f'' : \Phi'').$$

Conſervant la valeur générale

$$\sqrt{[2\varrho' : (\Phi' + \Phi'') + 1]} = C\sigma : (\Phi' + \Phi''),$$

ou faiſant pour abreger $u = \Phi' + \Phi''$, on fera

$$\sqrt{(2\varrho' : u + 1)} = \frac{C}{\tau : 2}, \text{ donc}$$

$$2\varrho' : u + 1 = \frac{C^2}{(\tau : u)^2}, \quad \varrho' : u = \frac{C^2}{2(\tau : u)^2} - \frac{1}{2},$$

$$\varrho'' : u = -\frac{C^2 \tau' : u}{(\tau : u)^3}, \quad \varrho''' : u = -\frac{C^2 \tau'' : u}{(\tau : u)^3} + \frac{3C^2 (\tau' : u)^2}{(\tau : u)^4},$$

l'équation générale donnera en reduiſant

$$\varrho : u = -\frac{C^2}{2\tau' : u\, \tau : u} + \frac{\tau : u}{2\tau' : u} + \frac{\tau'' : u}{\tau u : \tau' : u}.$$

Différentiant cette quantité & égalant les deux valeurs de $\varrho' : u$, on aura

$$\frac{\tau''' : u}{\tau'' : u} - \frac{\tau'' : u}{\tau' : u} - \frac{\tau' : u}{\tau : u} + \frac{\tau : u\, \tau' : u}{\tau'' : u} + \frac{C^2 - (\tau : u)^2}{2\tau' : u} = 0.$$

On peut mettre auſſi cette équation ſous la forme

$$\frac{C^2}{2\tau' : u\, \tau : u} - \frac{\tau : u}{2\tau' : u} - \frac{\tau'' : u}{\tau : u\, \tau' : u} + \int \frac{C^2\, \partial u}{2(\tau : u)^2} - \frac{1}{2} u = 0.$$

Si $C = 0$, on a

$$\frac{1}{2} u + \frac{\tau : u}{2\tau' : u} + \frac{\tau'' : u}{\tau : u\, \tau' : u} = 0,$$

ce qui eſt l'équation que nous avons intégrée ci-deſſus.

§. 30. On parvient aux mêmes réſultats en employant la méthode directe, dont nous avons fait uſage au commencement de ce Mémoire. Prenons la troiſième des équations générales expoſées pour ce cas dans le Mémoire précédent

cédent, & conſervant toutes les dénominations de ce Mémoire, ſubſtituons les valeurs de Φ' & Φ'', nous obtiendrons deux équations que nous retrancherons l'une de l'autre, ce qui donnera

$$A' - A'' - \alpha \left[\frac{[(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) + (\frac{\partial \Phi''}{\partial y})] (\frac{\partial \Pi'}{\partial x})}{\Pi'} \right. \\ \left. - \frac{[(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) + (\frac{\partial \Phi''}{\partial x})] (\frac{\partial \Pi'}{\partial y})}{\Pi'} \right] = 0.$$

La quatrième équation fournit auſſi deux équations qui retranchées l'une de l'autre donnent $A' = A''$, donc

$$\frac{[(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) + (\frac{\partial \Phi''}{\partial y})] (\frac{\partial \Pi'}{\partial x})}{\Pi'} - \frac{[(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) + (\frac{\partial \Phi''}{\partial x})] (\frac{\partial \Pi'}{\partial y})}{\Pi'} = 0,$$

ce qui donne $\Pi' = \varrho : (\Phi' + \Phi'')$. L'équation ſeconde donnera auſſi $\Pi = \sigma : (\Phi' + \Phi'')$. Différentiant ces valeurs & ſubſtituant les différentielles dans l'équation III, on aura,

$$(A' + A'') \sigma' : (\Phi' + \Phi'') + \beta \sigma'' : (\Phi' + \Phi'') \\ + A' \varrho : (\Phi' + \Phi'') - \beta \varrho' : (\Phi' + \Phi'') = 0,$$

ou à cauſe de $A' = A''$,

$$A' [2 \sigma' : (\Phi' + \Phi'') + \varrho : (\Phi' + \Phi'')] \\ - \beta [(\sigma'' : (\Phi' + \Phi'') + \varrho' : (\Phi' + \Phi'')] = 0,$$

ou en ſubſtituant la valeur de

$$A' = \alpha \left[\frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) (\frac{\partial \Pi}{\partial x})}{\Pi} - \frac{(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) (\frac{\partial \Pi}{\partial y})}{\Pi} \right] = \frac{\beta \sigma' : (\Phi' + \Phi'')}{\sigma : (\Phi' + \Phi')},$$

$$\varrho' : (\Phi' + \Phi'') + \sigma'' : (\Phi' + \Phi'') \\ - \frac{\sigma : (\Phi' + \Phi'') \, \varrho : (\Phi' + \Phi'')}{\sigma : (\Phi' + \Phi'')} - \frac{2 [\sigma : (\Phi' + \Phi'')]^2}{\sigma : (\Phi' + \Phi'')} = 0.$$

C'eſt la ſeconde des équations trouvées dans le §. précédent.

L'équation IV. donnera

$$(A' + A'')\,\varrho' : (\Phi' + \Phi'') - \beta\,\varrho'' : (\Phi' + \Phi'') + A' = 0, \text{ ou}$$

$$2A'\,\varrho' : (\Phi' + \Phi'') - \beta\,\varrho'' : (\Phi' + \Phi'') + A' = 0, \text{ ou}$$

$$\varrho'' : (\Phi' + \Phi'') - \frac{[2\varrho' . (\Phi' + \Phi'') + 1]\,\sigma' . (\Phi' + \Phi'')}{\sigma . (\Phi' + \Phi'')} = 0.$$

C'eſt la premiere des équations trouvées dans le §. précédent. Les deux méthodes conduiſent donc aux mêmes réſultats, ce qui confirme pleinement l'explication que nous avons donnée de le nature de ces ſortes d'Intégrales.

§. 31. Si l'on paſſe maintenant à la forme

$$z' = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Pi''(F' : \Phi' + f' : \Phi'')$$
$$+ \Pi'(F'' : \Phi' + f'' : \Phi'') + \Pi(F''' : \Phi' + f''' : \Phi''),$$

la cinquième des équations générales expoſées pour ce cas dans le Mémoire précédent donnera $A' = A''$, celà poſé, la ſeconde équation donnera:

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left[\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) = 0,$$

ce qui donne $\Pi = \sigma : (\Phi' + \Phi'')$. La troiſième équation donnera de même $\Pi' = {}_{(1)}\sigma : (\Phi' + \Phi'')$, la quatrième équation donnera $\Pi'' = {}_{(2)}\sigma : (\Phi' + \Phi'')$. Subſtituant maintenant ces valeurs, en faiſant $\Phi' + \Phi'' = u$, la ſeconde équation donnera $A' = \frac{\beta\,\sigma' : u}{\sigma : u}$, & les équations III, IV & V donneront les trois équations ſuivantes:

$$(2\,\sigma' : u + {}_{(1)}\sigma : u)\frac{\sigma' : u}{\sigma : u} - \sigma'' : u - {}_{(1)}\sigma' : u = 0,$$

$$(2\,{}_{(1)}\sigma' : u + {}_{(2)}\sigma : u)\frac{\sigma' : u}{\sigma : u} - {}_{(1)}\sigma'' : u - {}_{(2)}\sigma' : u = 0,$$

$$(2\,{}_{(2)}\sigma' : u + 1)\frac{\sigma' : u}{\sigma : u} - {}_{(2)}\sigma'' : u = 0,$$

équations auxquelles il faut que les fonctions ſatisfaſſent pour que l'Intégrale ſoit poſſible. On parvient au même ré-

réſultat par la méthode indirecte. Le procédé ne renferme aucune difficulté, ce qui fait que je me diſpenſerai de rapporter ici le calcul.

§. 32. Si l'on prend maintenant la formule générale

$$z' = F:\Phi' + f:\Phi'' + \Pi^{(n-1)}(F':\Phi' + f':\Phi'')$$
$$+ \Pi^{(n-2)}(F'':\Phi' + f'':\Phi'') + \Pi^{(n-3)}(F''':\Phi' + f''':\Phi'')$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \Pi''(F^{(n-2)}:\Phi' + f^{(n-2)}:\Phi'')$$
$$+ \Pi'(F^{(n-1)}:\Phi' + f^{(n-1)}:\Phi'') + \Pi(F^{(n)}:\Phi' + f^{(n)}:\Phi'').$$

En procédant préciſément comme dans les §. précédens on trouvera que l'équation $(n+2)^e$ des équations générales expoſées pour ce cas dans le Mémoire précédent donnera $A' = A$, cela poſé les équations 2, 3, 4, ... $(n+1)^e$ donneront ſucceſſivement, en faiſant $u = \Phi' + \Phi''$:

$$\Pi = \sigma:u, \; \Pi' = {}_{(1)}\sigma:u, \; \Pi'' = {}_{(2)}\sigma:u \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\Pi^{(n-3)} = {}_{(n-3)}\sigma:u, \; \Pi^{(n-2)} = {}_{(n-2)}\sigma:u, \; \Pi^{(n-1)} = {}_{(n-1)}\sigma:u.$$

Maintenant la ſeconde équation donnera $A' = \beta \frac{\sigma':u}{\sigma:u}$, & la ſubſtitution de toutes ces valeurs dans les équations 3, 4, 5 . . . . . $n+2$ donnera les n équations ſuivantes:

$$(2\,\sigma':u + {}_{(1)}\sigma:u)\frac{\sigma':u}{\sigma:u} - \sigma'':u - {}_{(1)}\sigma':u = 0,$$
$$(2\,{}_{(1)}\sigma':u + {}_{(2)}\sigma:u)\frac{\sigma':u}{\sigma:u} - {}_{(1)}\sigma'':u - {}_{(2)}\sigma':u = 0,$$
$$(2\,{}_{(2)}\sigma':u + {}_{(3)}\sigma:u)\frac{\sigma':u}{\sigma:u} - {}_{(2)}\sigma'':u - {}_{(3)}\sigma':u = 0,$$
$$(2\,{}_{(3)}\sigma':u + {}_{(4)}\sigma:u)\frac{\sigma':u}{\sigma:u} - {}_{(3)}\sigma'':u - {}_{(4)}\sigma':u = 0,$$

\- - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - -

$$(2\,{}_{(n-4)}\sigma':u + {}_{(n-3)}\sigma:u)\frac{\sigma':u}{\sigma:u} - {}_{(n-4)}\sigma'':u - {}_{(n-3)}\sigma':u = 0,$$

(2

$$\left(2\,{}_{(n-3)}\sigma':u+{}_{(n-2)}\sigma:u\right)\frac{\sigma':u}{\sigma:u}-{}_{(n-3)}\sigma'':u-{}_{(n-2)}\sigma':u=0,$$

$$\left(2\,{}_{(n-2)}\sigma':u+{}_{(n-1)}\sigma:u\right)\frac{\sigma':u}{\sigma:u}-{}_{(n-2)}\sigma'':u-{}_{(n-1)}\sigma':u=0,$$

$$\left(2\,{}_{(n-1)}\sigma':u+1\right)\frac{\sigma':u}{\sigma:u}-{}_{(n-1)}\sigma'':u=0.$$

Voilà les équations auxquelles il faudra ſatisfaire dans chaque cas. On parvient au même réſultat par la méthode indirecte.

§. 33. Soit $2\,{}_{(n-1)}\sigma':u+1=0$, la derniere équation devient identiquement nulle, & l'on a ${}_{(n-1)}\sigma':u=-\frac{1}{2}$, ${}_{(n-1)}\sigma:u=-\frac{1}{2}$. Suppoſons, comme l'indique la nature des équations ſupérieures, ${}_{(n-2)}\sigma:u=a^{(n-2)}u^2$, ${}_{(n-3)}\sigma:u=a^{(n-3)}u^3$, - - - - - ${}_{(3)}\sigma:u=a'''u^{n-3}$, ${}_{(2)}\sigma:u=a''u^{n-2}$, ${}_{(1)}\sigma:u=a'u^{n-1}$, $\sigma:u=au^n$, a, a', &c. étant des coëfficiens indéterminés. On trouvera en ſubſtituant ces valeurs dans les équations des §. précédens & reduiſant:

$$a'=\frac{a\,n(n+1)}{1},\quad a''=-\frac{a'(n+2)(n-1)}{2},$$

$$a'''=-\frac{a''(n+3)(n-2)}{3},\quad a''''=-\frac{a'''(n+4)(n-3)}{4}\quad\ldots\ldots$$

$$a^{(n-2)}=\frac{a^{(n-3)}(2n-2)\,3}{n-2},$$

$$a^{(n-1)}=-\frac{a^{(n-2)}(2n-1)\,2}{n-1},\quad a^{(n)}=-\frac{a^{(n-1)}\,2n}{n}.$$

On ſait d'avance que l'on doit avoir $a^{(n)}=1$, $a^{(n-1)}=-\frac{1}{2}$, & cela s'accorde fort bien avec la marche de nos formules. Car faiſant $a^{(n)}=1$, on trouve en retrogradant:

$$a^{(n-1)}=-\frac{1}{2},=-\frac{n}{2n},$$

$$a^{(n-2)}=\frac{n(n-1)}{2.2n(2n-1)},\quad a^{(n-3)}=-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.2n\ldots(2n-2)},$$

$$a^{(n-4)}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4.2n\ldots(2n-3)},$$

- - - - - - - - -
- - - - - - - - -

a

$$a'''' = \pm \frac{n(n-1)\ldots5}{2.3\ldots(n-4)2n\ldots(n+5)},$$
$$a''' = \mp \frac{n(n-1)\ldots4}{2.3\ldots(n-3)2n\ldots(n+4)},$$
$$a'' = \pm \frac{n(n-1)\ldots3}{2.3\ldots(n-2)2n\ldots(n+3)},$$
$$a' = \mp \frac{n(n-1)\ldots2}{2.3\ldots(n-1)2n\ldots(n+2)},$$
$$a = \pm \frac{n(n-1)\ldots1}{2.3\ldots n.2n\ldots(n+1)}.$$

On aura maintenant en reprenant l'ordre inverſe:

$$a = \pm \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots2n},$$
$$a' = \mp \frac{n(n+1)}{1.(n+1)\ldots2n},$$
$$a'' = \pm \frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2.(n+1)\ldots2n},$$
$$a''' = \mp \frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2.3(n+1)\ldots2n},$$
$$a'''' = \pm \frac{(n-3)\ldots(n+4)}{2.3.4(n+1)2n}$$

- - - - - - - - - -

$$a^{(n-4)} = \frac{5\ldots(2n-4)}{2\ldots(n-4)(n+1)\ldots2n},$$
$$a^{(n-3)} = -\frac{4\ldots(2n-3)}{2\ldots(n-3)(n+1)\ldots2n},$$
$$a^{(n-2)} = \frac{3\ldots(2n-2)}{2\ldots(n-2)(n+1)\ldots2n},$$
$$a^{(n-1)} = -\frac{2\ldots(2n-1)}{2\ldots(n-1)(n+1)\ldots2n},$$
$$a^{(n)} = \frac{1\ldots2n}{2\ldots n(n+1)\ldots2n} = 1.$$

L'Intégrale ſera donc, en faiſant pour abréger $\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots2n} = C$:

$$\frac{z'}{C} = (n+1)\ldots2n\,(F:\Phi' + f:\Phi'')$$
$$-n\ldots(2n-1)\,u\,(F':\Phi' + f':\Phi'')$$
$$+\frac{(n-1)}{2}\ldots(2n-2)\,u^2\,(F'':\Phi' + f''\cdot\Phi'')$$
$$-(n-2)\ldots(2n-3)\,u^3\,(F''':\Phi' + f''':\Phi'')$$
$$+\frac{(n-3)}{2.3}\ldots(2n-4)\,u^4\,(F'''':\Phi' + f'''':\Phi'')$$

- - - - - - - - - -

±

$$\pm \frac{(n-3)\ldots(n+4)}{2.\,3.\,4} u^{n-4} (F^{(n-4)} : \Phi' + f^{(n-4)} : \Phi'')$$
$$\mp \frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2.\,3} u^{n-3} (F^{(n-3)} : \Phi' + f^{(n-3)} : \Phi'')$$
$$\pm \frac{(n-1)\ldots(n+2)}{1.\,2} u^{n-2} (F^{(n-2)} : \Phi' + f^{(n-2)} : \Phi'')$$
$$\mp \frac{n(n+1)}{1} u^{n-1} (F^{(n-1)} : \Phi' + f^{(n-1)} : \Phi'')$$
$$\pm u^n (F^{(n)} : \Phi' + f^{(n)} : \Phi'').$$

Soyent $\Phi' = Ax + By$, $\Phi'' = Ax - By$, on aura $u = 2Ax$, & l'on aura alors, en faiſant $\frac{(2A)^n}{(n+1)\ldots 2n} = C$:

$$\frac{z'}{C} = \frac{(n+1)\ldots\ldots 2n}{(2A)^n} (F : \Phi' + f : \Phi'')$$
$$- \frac{n\ldots\ldots(2n-1)}{(2A)^{n-1}} x (F' : \Phi' + f' : \Phi'')$$
$$+ \frac{(n-1)\ldots(2n-2)}{(2A)^{n-2}} x^2 (F'' : \Phi' + f'' : \Phi'') \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2(2A)^n} x^{n-2} (F^{(n-2)} : \Phi' + f^{(n-2)} : \Phi'')$$
$$\mp \frac{n(n+1)}{2A} x^{n-1} (F^{(n-1)} : \Phi' + f^{(n-1)} : \Phi'')$$
$$\pm x^n (F^{(n)} : \Phi' + f^{(n)} : \Phi'').$$

Ce ſont les formules que nous avons trouvées dans le Mémoire précédent pour les cas intégrables de l'équation:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \frac{BB}{AA}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - \frac{2BBm}{AAx}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

que traite M. Euler Calc. Intégr. T. III. p. 280. Si l'on fait $\Phi' = (2n+1)\,a\,x^{\frac{1}{2n+1}} + by$, $\Phi'' = (2n+1)\,a\,x^{\frac{1}{2n+1}} - by$, on aura $u = (2n+1)\,2\,a\,x^{\frac{1}{2n+1}}$. Il ſuffira donc de ſubſtituer dans nos formules cette valeur pour u, & l'on aura les for-

formules que nous avons trouvées dans le Mémoire précédent pour les cas intégrables de l'équation

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - \frac{bb}{aa}\, x^{\frac{4m}{2m-1}} \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) = 0,$$

que traite M. Euler p. 282. Cette équation donne auſſi les valeurs:

$$\Phi' = -(2n+1)\, a\, x^{-\frac{1}{2n-1}} + by,$$

$$\Phi'' = -(2n+1)\, a\, x^{-\frac{1}{2n-1}} - by, \text{ donc}$$

$$u = -(2n+1)\, 2\, a\, x^{-\frac{1}{2n-1}}.$$

Subſtituant cette ſeconde valeur, on aura les ſecondes formules trouvées pour ce cas dans le Mémoire précédent. Si l'on fait $\Phi' = x$, $\Phi'' = y$, on aura $u = x + y$. Subſtituant cette valeur, on a les formules trouvées dans le Mémoire précédent pour les cas intégrables de l'équation:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\, \partial y}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{m}{x+y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{m}{(x+y)^2}\, z = 0,$$

que traité M. Euler p. 262. Ainſi toutes les équations de ce genre, qu'a intégré M. Euler, dérivent d'une ſeule & même ſuppoſition, & n'en ſont que des cas particuliers.

§. 34. Si l'on veut maintenant traiter le ſecond cas, dans lequel Π a deux valeurs $\sigma\mu : \Phi'$, $\sigma\nu : \Phi''$, on trouvera que dans les équations générales du Mémoire précédent l'équation $(n+2)^e$ donnera $A' = A''$, en y ſubſtituant ſucceſſivement les deux valeurs Φ', Φ'', & retranchant l'une de l'autre les équations qui en proviendront. Par le même procédé, les équations II, IV, V, VI &c. donneront

$$\sigma = \sigma : u;\ \Pi'' = {}_{(2)}\sigma : u;\ \Pi''' = {}_{(3)}\sigma : u \ldots;\ \Pi^{(n-3)} = {}_{(n-3)}\sigma : u;$$

$$\Pi^{(n-2)} = {}_{(n-2)}\sigma : u;\ \Pi^{(n-1)} = {}_{(n-1)}\sigma : u.$$

Enſuite la ſeconde équation donnera $A' = \frac{\beta \sigma' : u}{\sigma : u}$. La troiſiéme équation donnera, en ſubſtituant pour Π ſes deux valeurs $\sigma\mu : \Phi'$, $\sigma\nu : \Phi''$, les deux équations ſuivantes:

$$\left[\frac{G}{D}\sigma + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x\partial y}\right)\right]\mu.\Phi'\ (A)$$
$$+\Pi' A' + \left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left[\frac{2C}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left[\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right] = 0;$$
$$\left[\frac{G}{D}\sigma + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x\partial y}\right)\right]\nu : \Phi''$$
$$+\Pi' A' + \left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left[\frac{2C}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right] + \left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left[\frac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right] = 0.$$

Eliminant de ces deux équations la valeur

$$\frac{G}{D}\sigma + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\partial\sigma}{\partial x\partial y}\right),$$

& mettant pour $\frac{2C}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)$ &c. les valeurs trouvées dans le Mémoire précédent, on aura

$$\frac{A'}{\alpha}\Pi'\left(\frac{1}{\mu:\Phi'} - \frac{1}{\nu:\Phi''}\right) - \left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\mu:\Phi'} + \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\nu:\Phi''}\right]$$
$$+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{\mu:\Phi'} + \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{\nu:\Phi''}\right] = 0.$$

Or nous avons trouvé dans le §. 4.

$$\frac{A'}{\alpha} = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)}{\sigma} - \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)}{\sigma} =$$

[en mettant pour σ ſa valeur]

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\frac{\sigma' : u}{\sigma : u}.$$

Notre équation deviendra donc:

$$\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{\mu:\Phi'} + \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{\nu:\Phi''}\right] - \left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left[\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\mu:\Phi'} + \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\nu:\Phi''}\right]$$
$$+\Pi'\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right]\frac{\sigma' : u}{\sigma : u}\left(\frac{1}{\mu:\Phi'} - \frac{1}{\nu:\Phi''}\right) = 0.$$

L'In-

L'Intégrale de cette équation eſt

$$\Pi' = \sigma : u\, \Sigma : \int \left(\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''} \right).$$

Subſtituant cette valeur dans l'équation (A), & effaçant ce qui ſe détruit, on a

$$\left[\frac{G}{D}\sigma + \frac{A}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) + \frac{B}{D}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) + \frac{C}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial y^2}\right) + \frac{E}{D}\left(\frac{\partial \partial \sigma}{\partial x \partial y}\right) \right] \mu : \Phi' - \frac{\beta : \sigma}{\nu : \Phi''} \Sigma' : \int \left(\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''} \right) = 0,$$

ou en mettant pour σ ſa valeur $\sigma : u$:

$$\frac{2(\sigma' : u)^2}{\sigma : u} \mu : \Phi' - \sigma'' : u\, \mu : \Phi' - \frac{\sigma : u}{\nu : \Phi''} \Sigma' : \int \left(\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu . \Phi''} \right) = 0.$$

On conclud de là que

$$\frac{\Sigma' : \int \left(\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''} \right)}{\mu : \Phi'\, \nu : \Phi''} = \text{fonction de } \Phi' + \Phi'' = \tau' : (\Phi' : \Phi''),$$

donc

$$\Sigma' : \int \left(\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''} \right) = \mu : \Phi'\, \nu : \Phi''\, \tau' . (\Phi' + \Phi'') \ \&$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''} \right) \Sigma' : \int \left(\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu . \Phi''} \right) = \int \partial \Phi' \nu : \Phi'' + \partial \Phi'' \mu : \Phi')\, \tau' : (\Phi' + \Phi'') \ \&$$

$$\Sigma : \int \left(\frac{\partial \Phi'}{\mu : \Phi'} + \frac{\partial \Phi''}{\nu : \Phi''} \right) = \int (\partial \Phi' \nu : \Phi'' + \partial \Phi'' \mu : \Phi')\, \tau' : (\Phi' + \Phi'').$$

Pour ſatisfaire généralement à cette équation, ſans faire dépendre Φ' de Φ'', ou réciproquement, il faut faire $\mu : \Phi' = 1$, $\nu : \Phi'' = 1$, ce qui ramène au cas précédent.

§. 35. Je remarquerai en finiſſant que les expreſſions que nous avons examiné jusqu'ici d'aprés M. Euler, peuvent ſe préſenter ſous la forme d'Intégrales indéfinies. Reprenons l'Intégrale $z' = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Pi\,(F' : \Phi' + f' : \Phi'')$. Soyent A une fonction de Φ' & B une fonction de Φ'', nous avons vu qu'on pouvait aſſigner à Π deux valeurs, enſorte que l'Intégrale prenait cette forme:

$$z' = F : \Phi' + f : \Phi'' + \sigma(\mu : \Phi' F' : \Phi' + \nu : \Phi'' f' : \Phi'').$$

Faiſons

$$\mu:\Phi' = \frac{1}{A},\ \nu:\Phi'' = \frac{1}{B},\ \frac{F'.\Phi'}{A} = \Sigma:\Phi',\ \frac{f'.\Phi''}{B} = \tau:\Phi'',$$

nous aurons

$$F':\Phi' = A\,\Sigma:\Phi',\ f':\Phi'' = B\,\tau:\Phi'',$$
$$F:\Phi' = \int A\,\partial\Phi'\,\Sigma:\Phi',\ f:\Phi'' = \int B\,\partial\Phi''\,\tau:\Phi''.$$

L'Intégrale prendra donc cette forme:

$$z' = \sigma(\Sigma:\Phi' + \tau:\Phi'') + \int A\,\partial\Phi'\,\Sigma:\Phi' + \int B\,\partial\Phi''\,\tau:\Phi''.$$

Dans le cas où $\mu:\Phi' = 1$, $\nu:\Phi'' = 1$, on a $A = 1$, $B = 1$ &

$$z' = \sigma(\Sigma:\Phi' + \tau:\Phi'') + \int\partial\Phi'\,\Sigma:\Phi' + \int\partial\Phi''\,\tau:\Phi''.$$

Si l'on a l'Intégrale

$$z' = F:\Phi' + f:\Phi'' + \Pi'(F':\Phi' + f':\Phi'') + \Pi(F'':\Phi' + f'':\Phi''),$$

ſi l'on fait

$$F'':\Phi' = \Sigma:\Phi',\ f'':\Phi'' = \tau:\Phi'',\ \text{on a}$$
$$F':\Phi' = \int\partial\Phi'\,\Sigma:\Phi' = {}_{,}\Sigma:\Phi',\ F:\Phi' = \int\partial\Phi'\,{}_{,}\Sigma:\Phi' = {}_{,,}\Sigma:\Phi',$$
$$f':\Phi'' = \int\partial\Phi''\,\tau:\Phi'' = {}_{,}\tau:\Phi'',\ f:\Phi'' = \int\partial\Phi''\,{}_{,}\tau:\Phi'' = {}_{,,}\tau:\Phi'',$$

donc

$$z' = \Pi(\Sigma:\Phi' + \tau:\Phi'') + \Pi'({}_{,}\Sigma:\Phi' + {}_{,}\tau:\Phi'') + {}_{,,}\Sigma:\Phi' + {}_{,,}\tau:\Phi'',$$

& ainſi de ſuite. Ainſi ces formes dont M. de la Place fait uſage dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour 1773, & après lui M. Couſin dans les Mémoires de 1784, ſe déduiſent de celles de M. Euler par une ſimple transformation, & on doit leur appliquer toutes les conſidérations que nous avons expoſées dans ce Mémoire.

SO-

SOLUTION DU PROBLÈME DE DÉCOMPOSER LES NOMBRES ENTIERS NON-CARRÉS EN DEUX, TROIS OU QUATRE CARRÉS.

Par

C. F. KAUSLER.

Préſenté à l'Académie le 26 Avril, 1798.

§. 1.

L'Analyſe de Diophante offre un champ auſſi vaſte que fertile à ceux qui aiment à s'occuper des propriétés des nombres, & depuis l'immortel inventeur de ces ſortes de recherches, les plus grands Géomètres y ont exercé leur ſagacité. Bachet, Fermat, Wallis, Euler, La Grange & Le Gendre y ont fait tant & de ſi belles découvertes, qu'en les réuniſſant en un ſeul ouvrage ſyſtematique, on pourroit en faire une des plus intéreſſantes ſciences. Mais malgré les ſublimes inventions de ces grands hommes, il y a encore bien des vuides à remplir, & ces illuſtres auteurs n'ont ſouvent fait qu'indiquer les routes que doivent prendre ceux qui viennent après eux. Tel eſt le cas du ſujet que je me propoſe de traiter ici. Diophante paroît déja avoir connu la propriété remarquable que tous les nombres entiers non-carrés peuvent ſe décompoſer en deux, trois ou quatre carrés

rés entiers. Bachet en a envain cherché la démonſtration; Fermat prétend l'avoir trouvée, mais l'ouvrage, dans lequel il avoit promis de la donner, n'a point paru. Enfin M. la Grange, profitant de quelques beaux théorèmes, par lesquels le grand Euler avoit frayé le chemin, eut le bonheur de trouver cette démonſtration générale, qui ne laiſſe plus rien à déſirer, & qu'on peut voir dans les Mémoires de l'Académie Royale des ſciences & belles-lettres de Berlin de l'année 1770 page 123-133. Cependant tous ces auteurs ſe ſont contentés de connoître & de démontrer cette propriété des nombres entiers, ſans montrer comment on doit s'y prendre pour décompoſer les nombres en effet. Il eſt vrai que Bachet dans ſon Commentaire de Diophante, Livre IV. Queſtion XXXI. donne une liſte de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 120 décompoſés en carrés; mais il n'y dit rien de la méthode dont il s'eſt ſervi pour les décompoſer, & il eſt probable qu'il n'a trouvé ces carrés que par tâtonnement. C'eſt ce qui m'a engagé à faire quelques recherches là-deſſus qui m'ont conduit à une méthode directe & générale.

Définition.

§. 2. Un nombre *pronic* eſt le produit de deux nombres entiers, qui ne diffèrent que d'une unité: tels ſont les nombres 2, 6, 12, 20, 30 &c. dont les facteurs 1 & 2, 2 & 3, 3 & 4, 4 & 5, 5 & 6 &c. ne diffèrent que d'une unité.

Corollaire.

§. 3. L'expreſſion générale d'un nombre pronic étant $m(m+1)$, ce produit nous fournit un moyen très-ſimple, pour connoître d'abord, ſi un nombre donné eſt un nombre pro-

pronic ou non? Pour cela il ſuffit d'en extraire la racine carrée en nombres entiers, & de la comparer à ce qui reſte après l'extraction. Si ce reſte eſt égal à la racine trouvée, le nombre donné eſt un nombre pronic. Par exemple la racine carrée de 210 eſt $= 14$, & le reſte après l'extraction (c'eſt-à-dire $210 - 14^2$) eſt auſſi $= 14$; par conſéquent 210 eſt un nombre pronic, provenant de la multiplication du facteur 14 par le facteur $14 + 1$, ou 15.

Ces nombres ſont d'un très-grand uſage dans l'analyſe indéterminée, comme on va le voir en partie par ce que nous allons expoſer ici.

Problème.

§. 4. *Un nombre entier non-carré A étant donné, on doit examiner s'il peut ſe décompoſer en deux carrés entiers ou non?*

Solution.

Le nombre A peut être pair ou impair. Commençons par examiner le dernier cas, & ſuppoſons:

I.) $A = 2B + 1$, & les deux carrés dont ce nombre eſt compoſé $= p^2$ & q^2. Or comme un nombre impair ne peut être que la ſomme d'un nombre pair & d'un nombre impair, il faut donc auſſi, ſi toutefois A eſt réſoluble en deux carrés p^2 & q^2, que l'un ſoit pair & l'autre impair. Soit $p = 2P$ & $q = 2Q + 1$, & nous aurons: $B = 2P^2 + 2Q(Q + 1)$; il faut donc que $\frac{B}{2}$, c'eſt-à-dire $\frac{A-1}{4}$, ſoit un nombre entier que nous nommerons C, ce qui donne $C - P^2 = Q(Q + 1)$.

Si

Si donc pour un certain nombre impair A, le reſte $A - 1$ n'eſt pas diviſible par 4, ce nombre ne peut pas être décompoſé en deux carrés entiers. Mais ſi, comme nous avons ſuppoſé, ce quotient C eſt un nombre entier, il faut de nouveau diſtinguer les deux cas: C pair & C impair. Si C eſt $= 2D + 1$, il faut que P ſoit auſſi impair & $= 2T + 1$, & parconſéquent $2[D - 2T(T+1)] = Q(Q+1)$. Poſons $D - 2T(T+1) = \alpha$, & nous aurons les deux équations: $\frac{Q(Q+1)}{2} = \alpha$, & $T(T+1) = \frac{D-\alpha}{2}$ qui, combinées donnent la ſolution ſuivante de ce cas: Qu'on retranche ſucceſſivement de D, c'eſt-à-dire de $\frac{A-5}{8}$, les moitiés paires de tous les nombres pronics au deſſous de D, ſi D eſt pair, & les moitiés impaires, ſi D eſt impair, & ſi parmi les reſtes aucun n'eſt un nombre pronic, ce cas n'eſt point réſoluble: mais ſi un ou pluſieurs de ces reſtes ſont en même tems des nombres pronics, on en aura autant de ſolutions différentes. Si C eſt pair, il faut que P le ſoit auſſi. Poſons donc $C = 2D$, & $P = 2T$, & l'équation $C - P^2 = Q(Q+1)$ ſe changera en: $2(D - 2T^2) = Q(Q+1)$. Soit $D - 2T^2 = \alpha$ & nous aurons les deux équations $\frac{Q(Q+1)}{2} = \alpha$ & $\frac{D-\alpha}{2} = T^2$, deſquelles réſulte la ſolution ſuivante de ce cas: Qu'on retranche de D les moitiés paires de tous les nombres pronics moindres que D (ſi D eſt pair) & les moitiés impaires, (ſi D eſt impair); & ſi parmi les moitiés des différences trouvées aucune n'eſt en même tems un carré parfait, il ſera impoſſible de réſoudre ce cas; mais ſi parmi ces demi-différences une ou pluſieurs ſont

en

en même tems des carrés, on en aura autant de ſolutions différentes. Pour faciliter ces recherches, j'ai ajouté à la fin de ce traité une table des nombres pronics depuis 2 jusqu'à 50400 & de leurs moitiés paires & impaires.

II. Si A eſt un nombre pair non diviſible par 4, & par conſéquent de la forme $2(2B+1)$, il ne peut être que la ſomme de deux carrés impairs (car ſi ce nombre étoit la ſomme de deux carrés pairs, $2(2B+1)$ devroit être diviſible par 4, ce qui eſt impoſſible). Soit donc $p = 2P+1$, & $q = 2Q+1$, & nous aurons: $B = P(P+1) + Q(Q+1)$. Il faut donc, pour que ce cas ſoit poſſible, que B, c'eſt-à-dire $\frac{A-2}{4}$, ſoit non ſeulement un nombre entier, mais encore un nombre pair, puiſque la ſomme des deux nombres pronics $P(P+1)$ & $Q(Q+1)$ eſt toujours néceſſairement paire. Faiſons donc $B = 2C$ & $P = Q + R$ (R étant un nombre encore indéterminé) & ſubſtituant pour P^2 & P les valeurs $Q^2 + 2RQ + R^2$, & $Q + R$ dans cette équation, elle ſe changera en $2C = 2Q^2 + 2(R+1)Q + R^2 + R$, de laquelle on obtient $Q = -\frac{(R+1) \pm \sqrt{(4C^2+1-R^2)}}{2}$, & cette valeur de Q ſera toujours un nombre entier, ſi l'expreſſion $\sqrt{(4C^2+1-R^2)}$ eſt un nombre rationel & entier. Soit donc $4C^2 + 1 - R^2 = S^2$, & nous aurons $4C^2 + 1 = R^2 + S^2$. Or $4C^2 + 1$ eſt un nombre impair; donc le nombre donné $A = 2(2B+1)$ pourra toujours être décompoſé en deux carrés, pourvû que $4C^2 + 1$, c'eſt-à-dire $(\frac{A-2}{4})^2 + 1$ puiſſe

l'être: ce qui eſt le cas de l'article précédent. De cette manière la ſolution du cas $A = 2(2B + 1)$ eſt reduite à celle de $A = 2B + 1$.

III. Si enfin A étoit un nombre pair, diviſible par 4, on n'auroit qu'à faire $p = 2P$, $q = 2Q$, & l'équation $A = p^2 + q^2$ deviendroit $\frac{A}{4} = P^2 + Q^2$; et $\frac{A}{4}$ ſeroit de nouveau diviſible par 4, ou par deux, ou un nombre impair. Dans le premier cas on pourroit continuer de faire $P = 2T$, $Q = 2V$, $T = 2U$, $V = 2W$, &c. jusqu'à ce que $\frac{A}{16}$, $\frac{A}{64}$, &c. ne feroit plus diviſible par 4, ce qui doit néceſſairement arriver, A n'étant pas un carré parfait, & alors ce cas ſe reduiroit aux deux autres, où $\frac{A}{4} = P^2 + Q^2$ diviſible ſeulement par 2, ou un nombre impair, & pour lesquels les articles précédens contiennent la ſolution complette.

Eclairciſſons ces raiſonnemens par quelques exemples.

Exemple 1.

On doit examiner, ſi le nombre 230 peut ſe décompoſer en 2 carrés entiers.

§. 5. Comme 230 eſt un nombre pair, il ne peut être que la ſomme de deux carrés pairs, ou de deux carrés impairs. Suppoſons 1.) $230 = p^2 + q^2$, & $p = 2P$, $q = 2Q$, par conſéquent $230 = 4(P^2 + Q^2)$. Il faudroit donc que 230 fut diviſible par 4, ce qui n'eſt pas; donc cette ſuppoſition ne peut pas avoir lieu. Si 2.) $230 = p^2 + q^2$, &

$p =$

$p = 2P + 1$; $q = 2Q + 1$, il y aura $228 = 4P(P + 1) + 4Q(Q + 1)$ ou, en diviſant de part & d'autre par 4, $57 = P(P + 1) + Q(Q + 1)$; ce qui ne peut pas être non plus, puiſque la ſomme de deux nombres pronics eſt néceſſairement toujours paire. On voit donc que 230 n'eſt ni la ſomme de deux carrés pairs, ni celle de deux carrés impairs; & comme ce nombre ne ſauroit être non plus le ſomme d'un carré pair & d'un carré impair, il eſt donc impoſſible de le décompoſer en deux carrés entiers.

Exemple 2.

Décompoſer le nombre 872 en deux carrés entiers.

§. 6. Poſons $872 = p^2 + q^2$, & comme ce nombre eſt diviſible par 4, faiſons d'abord $p = 2P$; $q = 2Q$, ce qui donnera $218 = P^2 + Q^2$. Or 218 n'étant plus diviſible par 4, P & Q ne peuvent être que des nombres impairs. Soit donc $P = 2T + 1$ & $Q = 2V + 1$, & il y aura:

$$54 = T(T + 1) + V(V + 1):$$

le problème eſt donc reduit à trouver deux nombres pronics, dont la ſomme ſoit $= 54$. Pour cela ſuppoſons (§. 4. II.) $T = V + R$, & ſubſtituant les valeurs de T^2 & T dans l'équation $54 = T(T + 1) + V(V + 1)$, on en deduira:

$$V = -\frac{(R + 1) \pm \sqrt{(109 - R^2)}}{2},$$

où il s'agit de trouver toutes les valeurs de R, qui rendent la quantité $109 - R^2$ égale à un carré parfait. Faiſons donc $109 - R^2 = S^2$, pour avoir $109 = R^2 + S^2$. Or 109 étant impair, ce nombre, s'il eſt la ſomme de deux carrés, ne peut être que celle d'un carré pair & d'un carré

ré impair. Soit $R = 2K$, & $S = 2L + 1$; ces valeurs changent notre équation en $L(L + 1) = 27 - K^2$, où l'on voit que K doit être impair. Suppoſons donc $K = 2M + 1$, & nous aurons $L(L + 1) = 2[13 - 2M(M + 1)]$. Poſons enfin $13 - 2M(M + 1) = \alpha$, & il y aura 1.) $\frac{L(L+1)}{2} = \alpha$, équation qui fait voir que α doit être la moitié d'un nombre pronic quelconque; & 2.) $\frac{13 - \alpha}{2} = M(M + 1)$, laquelle équation ſert à déterminer α plus poſitivement, puis qu'elle exige que cette valeur de α ſoit moindre que 13, & en même tems impaire & telle que $\frac{13 - \alpha}{2}$ devienne en outre un nombre pronic.

Or tous les nombres pronics, dont nous avons beſoin ici, ſont:

2, 6, 12, par conſéquent leurs moitiés

1, 3, 6,

dont deux ſont impaires, & la troiſiéme paire. Rejettant donc cette derniere, comme inutile ici, nous n'avons que les ſuppoſitions $\alpha = 1$, & $\alpha = 3$. Or en faiſant $\alpha = 1$, la ſeconde équation devient $6 = M(M + 1)$, & comme 6 eſt un nombre pronic, cette ſuppoſition eſt donc bonne, & on a $M = 2$. Remontant donc de ces valeurs jusqu'à p & q, nous aurons $L = 1$, $K = 2M + 1 = 5$; $P = 2L + 1 = 3$; $R = 2K = 10$; $V = -\frac{(R+1) \pm S}{2}$, c'eſt-à-dire $V = -4$, ou $V = -7$; $T = V + R$, & par conſéquent $T = 6$, & $= 3$; Mais $P = 2T + 1$, & $Q = 2V + 1$, donc $P = 13$ & $Q = -7$, ou $P = 7$ & $Q = -13$, & par conſéquent $p = 2P = 26$, & $q = 2Q = -14$, ou $p = 14$ & $q = -26$, donc

$872 = 26^2 + (-14)^2 = 26^2 + 14^2$, ou

$872 = 14^2 + (-26)^2 = 14^2 + 26^2$,

lesquelles ſolutions ſe reduiſent à une ſeule.

La ſeconde moitié impaire, c'eſt-à-dire $\alpha = 3$, ne mène à rien; car cette valeur ſubſtituée dans l'équation $\frac{13-\alpha}{2} = M\ M+1)$, la change en $5 = M(M+1)$. Or 5 n'eſt pas un nombre pronic; & par conſéquent il n'y a que la valeur $\alpha = 1$ qui ſatisfaſſe à la fois aux deux conditions $\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} = \alpha$, & $\frac{13-\alpha}{2} = M(M+1)$. Donc il n'y a auſſi que les deux nombres 26 & 14, dont les carrés ajoutés faſſent 872.

Exemple 3.

Décompoſer 5960 en deux carrés entiers.

§. 7. Soit $5960 = p^2 + q^2$, & puiſque ce nombre eſt diviſible par 4, poſons $p = 2P$; $q = 2Q$, ce qui donnera $1490 = P^2 + Q^2$. Or 1490 n'étant plus diviſible par 4, ce nombre ne ſauroit être la ſomme de deux carrés pairs. Soit donc $P = 2T + 1$; $Q = 2V + 1$, & il y aura $372 = T(T+1) + V(V+1)$. Faiſons encore $T = V + R$, & cette valeur étant ſubſtituée dans notre équation, la change en $372 = 2V^2 + 2(R+1)V + R^2 + R$, par conſéquent $V = -\frac{(R+1) \pm \surd(745 - R^2)}{2}$. Il faut donc que l'expreſſion compriſe ſous le ſigne radical devienne un nombre rationel & entier S. Donc $745 = R^2 + S^2$; & comme un de ces carrés doit être pair, & l'autre impair, poſons $R = 2K$, & $S = 2\alpha + 1$, ce qui donne $\alpha(\alpha+1) = 186 - K^2$. Or

α

$\alpha(\alpha+1)$ eſt un nombre pair, donc K doit l'être auſſi. Faiſons donc $K = 2M$, & $(\alpha+1)$ ſera $= 2(93 - 2M^2)$, par conſéquent, ſi $93 - 2M^2 = \alpha$, on aura les deux équations 1.) $\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} = \alpha$, & 2.) $\frac{93-\alpha}{2} = M^2$, qui renferment toutes les conditions néceſſaires pour la ſolution de ce problème. Par la premiere on voit que α doit être la moitié d'un nombre pronic, & la ſeconde exige que cette moitié ſoit impaire, plus petite que 93 & telle que $\frac{93-\alpha}{2}$ devienne un carré parfait. Or les nombres pronics, dont nous avons beſoin ici, ſont:

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, & leurs moitiés:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, par conſéquent les valeurs de α, qu'il faut éprouver ſucceſſivement, ſont 1, 3, 15, 21, 45, 55, 91, parmi lesquelles, comme on peut s'aſſurer trés-facilement, il n'y a que 21 & 91 qui changent l'expreſſion $\frac{93-\alpha}{2}$ en un carré parfait, ce qui donne les deux ſolutions ſuivantes:

1.) $\alpha = 21$, $L = 6$, $M = 6$, $K = 12$, $R = 24$,
$S = 13$, $V = -6$, $T = 18$, $P = 37$, $Q = -11$,
$p = 74$, $q = -22$ & $5960 = 74^2 + 22^2$.

2.) $\alpha = 91$, $L = 13$, $M = 1$, $K = 2$, $R = 4$, $S = 27$,
$V = 11$, $T = 15$, $P = 31$, $Q = 23$, $p = 62$, $q = 46$
& $5960 = 62^2 + 46^2$.

Et comme ces deux valeurs de α ſont les ſeules qui ſatisfont à la fois aux deux équations

$$\frac{L(L+1)}{2} = \alpha, \quad \& \quad \frac{93-\alpha}{2} = M^2,$$

on

on peut être ſûr que le nombre 5960 ne peut être décompoſé en deux carrés que des deux manieres que nous venons d'indiquer.

Paſſons maintenant à l'examen des nombres compoſés de trois carrés.

Problème.

§. 8. *Examiner ſi un nombre donné A eſt la ſomme de trois carrés entiers.*

Solutio.

I.) Si A eſt un nombre pair & diviſible par 4, & que p^2, q^2, r^2, déſignent les trois carrés dont il eſt compoſé, on fera $p = 2P$, $q = 2Q$, $r = 2R$, ce qui donne $\frac{A}{4} = P^2 + Q^2 + R^2$; & ſi $\frac{A}{4}$ eſt de nouveau diviſible par 4, on fera comme auparavant $P = 2T$, $Q = 2U$, $R = 2V$, &c.; ſi non, ce cas ſe reduit à ceux des articles ſuivans.

II.) Si A eſt un nombre pair non diviſible par 4 de la forme $2(2B + 1)$, on ne pourra faire que cette ſuppoſition: $p = 2P + 1$, $q = 2Q + 1$, $r = 2R$; & ces valeurs changent l'équation $2(2B + 1) = p^2 + q^2 + r^2$ en $B - R^2 = P(P + 1) + Q(Q + 1)$, où il faut diſtinguer les deux cas ſuivans.

1.) Si B eſt pair, & par conſéquent $= 2D$, R doit l'être auſſi. Suppoſons donc $R = 2T$, & nous aurons:

$$2(D - 2T^2) = P(P+1) + Q(Q+1)$$

Soit $D - 2T^2 = \alpha$, & $P = Q + V$, & cette valeur ſubſtituée dans l'équation

$$2\alpha = P(P+1) + Q(Q+1)$$

nous donnera

$$Q = -\frac{(V+1) \pm \sqrt{(4L+1-V^2)}}{2}.$$

Il faut donc, pour que Q ſoit un nombre rationel & entier, que $4\alpha + 1 - V^2$ ſoit un carré parfait S^2, & par conſéquent $4\alpha + 1 = V^2 + S^2$. Combinant donc cette équation avec $D - 2T^2 = \alpha$, nous aurons, pour ce cas, la ſolution ſuivante: Qu'on retranche ſucceſſivement de D, c'eſt-à-dire de $\frac{A-2}{8}$, tous les nombres de la forme $2T^2$, ou qui ſont le double d'un carré parfait, & on aura autant de restes α, qu'il y a de ces doubles carrés au deſſous de D. Qu'on examine enſuite d'après les principes que nous avons établis dans le problême 1 & 2, ſi parmi ces valeurs de α il s'en trouve une ou pluſieurs qui ſoient telles que $4\alpha + 1$ puiſſe être décompoſé en deux carrés V^2 & S^2. Si aucune ne ſatisfait à cette condition, il ſera impoſſible de décompoſer le nombre A en trois carrés; mais ſi une ou pluſieurs valeurs de α lui ſatisfont, on pourra aiſément remonter de T, V & S jusqu'à p, q & r, & l'on obtiendra autant de ſolutions de ce problême, qu'on aura trouvé de valeurs différentes pour V & S.

2.) Si B eſt impair, & par conſéquent de la forme $2D+1$, R doit l'être auſſi. Soit donc $R = 2T+1$; en ce cas la formule

B —

$$B - R^2 = P(P+1) + Q(Q+1)$$

deviendra

$$2[D - 2T(T+1)] = P(P+1) + Q(Q+1).$$

Faiſons $D - 2T(T+1) = \alpha$ & $P = Q + V$, & il y aura

$$Q = -\frac{(V+1) \pm \sqrt{(4\alpha + 1 - V^2)}}{2};$$

donc $\sqrt{(4\alpha + 1 - V^2)}$ doit être un nombre rationnel & entier S, & par conſéquent $4\alpha + 1 = V^2 + S^2$. Ainſi, pour réſoudre ce cas, il ſuffit de retrancher ſucceſſivement de D, c'eſt-à-dire de $\frac{A-6}{2}$, le produit de tous les nombres pronics (moindres que $\frac{D}{2}$) par 2, & de voir, ſi parmi les reſtes α il s'en trouve un ou pluſieurs qui ſoient tels que $4\alpha + 1$ puiſſe être décompoſé en deux carrés S^2 & V^2, & l'on aura autant de ſolutions différentes qu'on aura trouvé de valeurs pour V & S.

III. Si A eſt un nombre impair de la forme $2B + 1$, on ne pourra faire que les deux ſuppoſitions ſuivantes: $p = 2P$, $q = 2Q$, $r = 2R + 1$ & $p = 2P + 1$; $q = 2Q + 1$, $r = 2R + 1$. Commençons par en examiner la premiere. Soit donc

1.) $A = 2B + 1 = p^2 + q^2 + r^2$ & $p = 2P$; $q = 2Q$, $r = 2R + 1$; ainſi il y aura $\frac{B}{2} - R(R+1) = P^2 + Q^2$. Il faut donc, pour que ce cas ſoit poſſible, que B, c'eſt-à-dire $\frac{A-1}{2}$, ſoit diviſible par 2. Si ce quotient s'appelle C, on aura par conſéquent $C - R(R+1) =$

 $P^2 +$

$P^2 + Q^2$. Donc on n'a qu'a retrancher de $C = \frac{A-1}{4}$, tous les nombres pronics au deſſous de cette quantité, & à voir leſquels des reſtes peuvent être décompoſés en deux carrés P^2 & Q^2. Pour faciliter d'avantage ces recherches on peut encore diſtinguer les deux cas où le nombre C eſt pair, ou impair, & on trouvera des ſolutions analogues à celles que nous avons données Article II, N. 1 & 2. Voyez auſſi plus bas les exemples II & III.

2.) Si A eſt impair & $p = 2P + 1$, $q = 2Q + 1$, $r = 2R + 1$, on aura

$$\frac{B-1}{2} = P(P+1) + Q(Q+1) + R(R+1);$$

il faut donc, pour que ce cas ſoit poſſible, que $\frac{B-1}{2}$, c'eſt-à-dire $\frac{A-3}{4}$ ſoit un nombre entier & pair $2D$, donc il y aura:

$$2D - P(P+1) = Q(Q+1) = Q(Q+1) + R(R+1).$$

Soit

$$2D - P(P+1) = 2\alpha, \ \& \ Q = V + R,$$

donc $2(D-\alpha) = P(P+1)$,

$$R = -\frac{(V+1) \pm \sqrt{(4\alpha + 1 - V^2)}}{2} \ \& \ 4\alpha + 1 = V^2 + S^2,$$

équations qui renferment la ſolution ſuivante: Qu'on cherche tous les α qui rendent la quantité $2(D-\alpha)$ égale à un nombre pronic. Qu'on choiſiſſe enſuite parmi ces nombres les valeurs de α qui ſont telles que $4\alpha + 1$ peut ſe décompoſer en deux carrés V^2 & S^2, & on aura autant de ſolutions qu'on trouve de valeurs différentes pour V & S.

Au

Au reſte pour trouver tous les α qui rendent $2(D-\alpha)$ égal à un nombre pronic, il n'eſt pas néceſſaire d'eſſayer pour α tous les nombres entiers au deſſous de D. Voyez l'exemple N. II. & III.

I. Exemple.

Décompoſer le nombre 3784 en trois carrés entiers.

§. 9. Comme ce nombre eſt diviſible par 4, tout revient à voir ſi le nombre 946 peut être décompoſé en trois carrés, & à en multiplier enſuite les racines par 2. Soit donc $946 = p^2 + q^2 + r^2$, & comme 946 eſt de la forme $2(2B+1)$, on ne peut faire que la ſuppoſition $p = 2P+1$, $q = 2Q+1$, $r = 2R$, (Voyez l'article II de la ſolution précédente) par conſéquent

$$236 - R = P(P+1) + Q(Q+1).$$

Il faut donc que R ſoit pair & $= 2T$; ce qui donne

$$4(59 - T^2) = P(P+1) + Q(Q+1).$$

Faiſons $59 - T^2 = \alpha$, & $P = Q + V$, & nous aurons les conditions ſuivantes à remplir: 1.) $59 - T^2 = \alpha$,

$$2.)\ Q = -\frac{(V+1) \pm \sqrt{(8\alpha + 1 - V^2)}}{2}$$

& par conſéquent 3.) $8\alpha + 1 = V^2 + S^2$. Ainſi on retranchera ſucceſſivement de 59 tous les carrés au deſſous de cette quantité, & on choiſira enſuite parmi ces reſtes les valeurs de α qui ſont telles que $8\alpha + 1$ peut être décompoſé en deux carrés V^2 & S^2. Or en mettant pour T tous les nombres depuis 1 jusqu'à 7, on aura:

 $T = 1$

$T = 1$	$\alpha = 58$	$8\alpha + 1 = 465$
$T = 2$	$\alpha = 55$	$8\alpha + 1 = 441$
$T = 3$	$\alpha = 50$	$8\alpha + 1 = 401$
$T = 4$	$\alpha = 43$	$8\alpha + 1 = 345$
$T = 5$	$\alpha = 34$	$8\alpha + 1 = 273$
$T = 6$	$\alpha = 23$	$8\alpha + 1 = 185$
$T = 7$	$\alpha = 10$	$3\alpha + 1 = 81$

Ainſi toute la ſolution du problème dépend de la décompoſition des nombres de la troiſième colonne en deux carrés entiers:

En décompoſant 1.) le nombre 81, on ne trouve que les deux carrés o & q^2, par conſéquent $V = 0$, $S = 9$; $T = 7$, $R = 14$, $Q = 4$, $P = 4$, $p = 9$, $q = 9$, $r = 28$, donc $2p = 18$, $2q = 18$, $2r = 56$, & $3784 = 18^2 + 18^2 + 56^2$.

2.) Le ſecond nombre traité comme nous l'avons enſeigné problème I, donne les valeurs ſuivantes: $185 = 11^2 + 8^2$ & $= 13^2 + 4^2$; par conſéquent $T = 6$, $V = 11$, $S = 8$, $Q = -2$, $P = 9$, $R = 12$, $p = 19$, $q = -3$, $r = 24$, donc $2p = 38$, $2q = -6$, $2r = 48$, & $3784 = 38^2 + 6^2 + 48^2$, ou bien $T = 6$, $V = 13$, $S = 4$, $Q = -5$, $P = 8$, $R = 12$, $p = 17$, $q = -9$, $r = 24$, donc $2p = 34$, $2q = -18$, $2r = 48$ & $3784 = 34^2 + 18^2 + 48^2$.

3.) Les nombres 273 & 345 ne peuvent pas être décompoſés en deux carrés entiers.

4.)

4.) 401 ne peut être décompoſé que d'une manière, ſavoir: $401 = 20^2 + 1$, ce qui donne les valeurs $2p = 42$, $2q = 38$, $2r = 29$, & par conſéquent $3784 = 42^2 + 38^2 + 24^2$.

5.) Les nombres 465 & 441 ſont dans le cas de N°. 3.

Donc le nombre donné 3784 ne peut être décompoſé en 3 carrés que des quatre manières ſuivantes:

1.) $3784 = 18^2 + 18^2 + 56^2$.
2.) $3784 = 38^2 + 6^2 + 48^2$.
3.) $3784 = 34^2 + 18^2 + 48^2$.
4.) $3784 = 42^2 + 38^2 + 24^2$.

II. Exemple.

Décompoſer le nombre 413 en trois carrés entiers.

§. 10. Le nombre 413 étant impair, doit être la ſomme de deux carrés pairs & d'un carré impair, ou de trois carrés impairs. Dans le dernier cas ſoit

$$413 = p^2 + q^2 + r^2,\ p = 2P + 1,$$
$$q = 2Q + 1,\ r = 2R + 1,$$

par conſéquent

$$410 = 4[P(P+1) + Q(Q+1) + R(R+1)].$$

Mais 410 n'eſt pas diviſible par 4, donc cette ſuppoſition ne peut pas avoir lieu. Il ne reſte donc qu'à ſuppoſer $p = 2P$, $q = 2Q$, $r = 2R + 1$, ce qui donne:

$$103 = P^2 + Q^2 + R(R+1).$$

Mais 103 eſt impair & $R(R+1)$ pair, donc, ſi P eſt impair,

pair, Q doit être pair. Faiſons $P = 2T + 1$, & $Q = 2V$, par conſéquent:

$$\frac{102 - R(R+1)}{4} = T(T+1) + V^2.$$

Soit $\frac{102 - R(R+1)}{4} = \alpha$; donc $2[51 - 2\alpha] = R(R+1)$, & comme il y a auſſi $\alpha - V^2 = T(T+1)$, on voit que pour réſoudre ce problème on n'a qu'à prendre parmi les nombres au deſſous de 25 ceux qui rendent $2(51 - 2\alpha) =$ à un nombre pronic, & qui ſont en même tems tels, qu'étant diminués d'un carré parfait T^2, le reſte ſoit également un nombre pronic. Mais quant à la premiere condition, il n'eſt pas néceſſaire de ſubſtituer pour α tous les nombres depuis 1 jusqu'à 25. Car comme $51 - 2\alpha$ eſt multiplié par deux, la formule $2(51 - 2\alpha)$ renferme les nombres pronics ſuivans:

$$\left.\begin{matrix}2.\ 1\\2.\ 3\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}2.\ 2.\ 3\\2.\ 2.\ 5\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}2.\ 3.\ 5\\2.\ 3.\ 7\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}2.\ 4.\ 7\\2.\ 4.\ 9\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}2.\ 5.\ 9\\2.\ 5.\ 11\end{matrix}\right\}\ \text{\&c.}$$

par conſéquent, en rejettant les produits pairs

$$\begin{aligned}51 - 2\alpha &= 1, \text{ donc } \alpha = 25.\\ &= 3, \text{ - - - } \alpha = 24.\\ &= 15, \text{ - - } \alpha = 18.\\ &= 21, \text{ - - } \alpha = 15.\\ &= 45, \text{ - - } \alpha = 3.\end{aligned}$$

Ainſi nous n'avons à examiner que ces cinq valeurs de α: 3, 15, 18, 24, 25. Or $3 - 0 = 3$.

$$3 - 1 = 2$$

& ce reſte eſt un nombre pronic. Donc $\alpha = 3$,

$$V = 1,\ T = 1,\ P = 3,\ Q = 2,\ R = 9,$$

$$p = 6,\ q = 4,\ r = 19,\ \&\ 413 = 6^2 + 4^2 + 19^2.$$

La

La ſeconde valeur $\alpha = 15$ donne:

$$15 - 0 = 15.$$
$$15 - 1 = 14.$$
$$15 - 4 = 11.$$
$$15 - 9 = 6.$$

qui eſt auſſi un nombre pronic. Donc $\alpha = 15$;

$V = 3$, $T = 2$, $R = 6$, $P = 5$, $Q = 6$,

$p = 10$, $q = 12$, $r = 13$, & $413 = 10^2 + 12^2 + 13^2$.

La troiſième valeur $\alpha = 18$ donne:

$$18 - 0 = 18.$$
$$18 - 1 = 17.$$
$$18 - 4 = 14.$$
$$18 - 9 = 9.$$
$$18 - 16 = 2.$$

qui eſt un nombre pronic. Par conſéquent $\alpha = 18$;

$V = 4$, $T = 1$, $R = 5$, $P = 3$, $Q = 8$,

$p = 6$, $q = 16$, $r = 11$, & $413 = 6^2 + 16^2 + 11^2$.

La quatrième valeur $\alpha = 24$ donne:

$$24 - 0 = 24.$$
$$24 - 1 = 23.$$
$$24 - 4 = 20.$$
$$24 - 9 = 15.$$
$$24 - 16 = 8.$$

où 20 eſt un nombre pronic. Donc $\alpha =$.

$V = 2$, $T = 4$, $R = 2$, $P = 9$, $Q = 4$,

$p = 18$, $q = 8$, $r = 5$ & $413 = 18^2 + 8^2 + 5^2$.

La

La cinquième valeur $\alpha = 25$ donne:

$$25 - 0 = 25.$$
$$25 - 1 = 24.$$
$$25 - 4 = 21.$$
$$25 - 9 = 16.$$
$$25 - 16 = 9.$$
$$25 - 25 = 0.$$

qu'on peut auſſi regarder comme un nombre pronic. Donc $\alpha = 25$,

$$V = 5, \; T = 0, \; R = 1, \; P = 1, \; Q = 10,$$
$$p = 2, \; q = 20, \; r = 3, \text{ donc } 413 = 2^2 + 20^2 + 3^2.$$

Ainſi ce problême n'a que les cinq ſolutions ſuivantes:

1.) $413 = 6^2 + 4^2 + 19^2.$
2.) $413 = 10^2 + 12^2 + 13^2.$
3.) $413 = 6^2 + 16^2 + 11^2.$
4.) $413 = 18^2 + 8^2 + 5^2.$
5.) $413 = 2^2 + 20^2 + 3^2.$

III. Exemple.

Décompoſer le nombre 5268 en trois carrés p^2, q^2, r^2.

§. 11. Comme ce nombre eſt diviſible par 4, commençons par faire $p = 2P$, $q = 2Q$, $r = 2R$, pour avoir $1317 = P^2 + Q^2 + R^2$. Or le nombre 1317 étant impair, ne peut être que la ſomme de deux carrés pairs & d'un carré impair, ou celle de trois carrés impairs. Mais le dernier cas ne peut pas avoir lieu, puiſqu'en ſuppoſant $P = 2T + 1$; $Q = 2U + 1$; $R = 2V + 1$; 1314 devroit être diviſible par 4. Faiſons donc $P = 2T$; $Q = 2U$; $R = 2K + 1$; & il

il y aura: $329 - K(K+1) = T^2 + U^2$. Il faut donc que T & U ſoient l'un pair, l'autre impair. Suppoſons $T = 2V$, & $U = 2W + 1$, par conſéquent $\frac{328 - K(K+1)}{4} = W(W+1) + V^2$. Soit encore $\frac{328 - K(K+1)}{4} = \alpha$, & nous aurons:

1.) $4(82 - \alpha) = K(K+1)$ & 2.) $\alpha - V^2 = W(W+1)$.

Or pour trouver toutes les valeurs de α qui ſatisfont à ces deux équations, je remarque qu'il eſt inutile d'eſſayer ſucceſſivement dans la première tous les nombres entiers au deſſous de 82. Car, comme $82 - \alpha$ eſt multiplié par 4, ce produit ne peut être égal à un nombre pronic que dans les cas ſuivans:

$4.(82 - \alpha) = 4.3$, d'où l'on tire $\alpha = 79$.
$= 4.5$, - - - $= 77$.
$= 4.2.7$, - - - $= 68$.
$= 4.2.9$, - - - $= 64$.
$= 4.3.11$, - - - $= 49$.
$= 4.3.13$, - - - $= 43$.
$= 4.4.15$, - - - $= 22$.
$= 4.4.17$, - - - $= 14$.
$= 4x(4x \pm 1)$ - - - $\alpha = 82 - x(4x \pm 1)$.

Examinons maintenant leſquelles d'entre ces valeurs de α ſatisfont auſſi à la ſeconde équation.

1.) Suppoſons donc $\alpha = 14$, & nous aurons:

$14 - 0 = 14$,
$14 - 1 = 13$,
$14 - 4 = 10$,
$14 - 9 = 5$,

& comme parmi ces reſtes aucun n'eſt un nombre pronic, la valeur $\alpha = 14$ ne mène à rien.

Soit 2.) $\alpha = 22$, & il y aura:
$22 - 0 = 22$,
$22 - 1 = 21$,
$22 - 4 = 18$,
$22 - 9 = 13$,
$22 - 16 = 6$,

qui eſt un nombre pronic; par conſéquent $\alpha = 22$,
$K = 15$, $V = 4$, $W = 2$, $U = 5$, $T = 8$, $P = 16$, $Q = 10$, $R = 31$,
$p = 32$, $q = 20$, $r = 62$, & $5268 = 32^2 + 20^2 + 62^2$.

3.) $\alpha = 43$, & il y aura:
$43 - 0 = 43$,
$43 - 1 = 42$,
$43 - 4 = 39$,
$43 - 9 = 34$,
$43 - 16 = 27$,
$43 - 25 = 18$,
$43 - 36 = 7$.

où 42 eſt auſſi un nombre pronic. Donc $\alpha = 43$,
$K = 12$, $V = 1$, $W = 6$, $U = 13$, $T = 2$, $P = 4$, $Q = 26$, $R = 25$,
$p = 8$, $q = 52$, $r = 50$ & $5268 = 8^2 + 52^2 + 50^2$.

4.) $\alpha = 49$, & il y aura:
$49 - 0 = 49$,
$49 - 1 = 48$,
$49 - 4 = 45$,
$49 - 9 = 40$,
$49 - 16 = 33$,
$49 - 25 = 24$,
$49 - 36 = 13$,
$49 - 49 = 0$,

qu'on peut regarder comme un nombre pronic. Donc $\alpha = 49$,
$V = 7$, $W = 0$, $K = 11$, $U = 1$, $T = 14$, $P = 28$, $Q = 2$, $R = 23$,
$p = 56$, $q = 4$, $r = 46$ & $5268 = 56^2 + 4^2 + 46^2$.

5.)

5.) $\alpha = 64$, & il y aura:

$$\begin{aligned} 64 - 0 &= 64, \\ 64 - 1 &= 63, \\ 64 - 4 &= 60, \\ 64 - 9 &= 55, \\ 64 - 16 &= 48, \\ 64 - 25 &= 39, \\ 64 - 36 &= 28, \\ 64 - 49 &= 15, \\ 64 - 64 &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\alpha = 64$,

$V=8$, $W=0$, $K=8$, $U=1$, $T=16$, $P=32$, $Q=2$, $R=17$,
$p=64$, $q=4$, $r=34$ & $5268=64^2+4^2+34^2$.

6.) $\alpha = 68$, & il y aura:

$$\begin{aligned} 68 - 0 &= 68, \\ 68 - 1 &= 67, \\ 68 - 4 &= 64, \\ 68 - 9 &= 59, \\ 68 - 16 &= 52, \\ 68 - 25 &= 43, \\ 68 - 36 &= 32, \\ 68 - 49 &= 19, \\ 68 - 64 &= 4, \end{aligned}$$

& comme aucun de ces reſtes n'eſt un nombre pronic, la valeur de $\alpha = 68$, ne mène à rien.

7.) $\alpha = 77$, & il y aura:

$$\begin{aligned} 77 - 0 &= 77, \\ 77 - 1 &= 76, \\ 77 - 4 &= 73, \\ 77 - 9 &= 68, \\ 77 - 16 &= 61, \\ 77 - 25 &= 52, \\ 77 - 36 &= 41, \\ 77 - 49 &= 28, \\ 77 - 64 &= 13, \end{aligned}$$

par conſéquent cette valeur de α eſt dans le cas du N°. précédent.

8.) $\alpha = 79$, & il y aura: $79 - 0 = 79$,
$79 - 1 = 78$,
$79 - 4 = 75$,
$79 - 9 = 70$,
$79 - 16 = 63$,
$79 - 25 = 54$,
$79 - 36 = 43$,
$79 - 49 = 30$,
$79 - 64 = 15$,

où 30 eſt un nombre pronic. Donc $\alpha = 79$,
$K=3$, $V=7$, $W=5$, $U=11$, $T=14$, $P=28$, $Q=22$, $R=7$,
$p=56$, $q=44$, $r=14$ & $5268=56^2+44^2+14^2$.
Donc ce Problème n'a que les 5 ſolutions ſuivantes:

$$5268 = 32^2 + 20^2 + 62^2,$$
$$5268 = 8^2 + 52^2 + 50^2,$$
$$5268 = 56^2 + 44^2 + 14^2,$$
$$5268 = 64^2 + 4^2 + 34^2,$$
$$5268 = 56^2 + 4^2 + 46^2.$$

Problème.

§. 12. *Examiner ſi un nombre non-carré A peut être décompoſé en quatre carrés entiers* p^2, q^2, r^2, s^2.

Solution.

I.) Si A eſt diviſible par 4, on fera $p = 2P$, $q = 2Q$, $r = 2R$, $s = 2S$, & il y aura $\frac{A}{4} = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$, & cette ſuppoſition, ſi $\frac{A}{4}$ eſt de nouveau diviſible par 4, peut ſe repeter jusqu'à ce que $\frac{A}{16}$, $\frac{A}{64}$ &c. ſera un nombre impair, ou un nombre pair de la forme $2(2B+1)$. Alors ce cas ſe reduit à ceux que nous allons examiner dans les articles ſuivans:

II.) Si $A = 2(2B + 1)$, on peut faire les deux ſuppoſitions ſuivantes:

$p = 2P$; $q = 2Q$; $r = 2R + 1$; $s = 2S + 1$ &

$p = 2P + 1$; $q = 2Q + 1$; $r = 2R + 1$; $s = 2S + 1$.

Soit 1.) $p = 2P$; $q = 2Q$; $r = 2R + 1$; $s = 2S + 1$; & il y aura:

$$B - P^2 - Q^2 = R(R + 1) + S(S + 1),$$

mais comme la ſomme de deux nombres pronics eſt toujours paire, il faut auſſi que $B - P^2 - Q^2$ ſoit un nombre pair & $= 2\alpha$, & en poſant, comme dans les problèmes précédens, $R = S + W$, nous aurons les équations:

1.) $B - (P^2 + Q^2) = 2\alpha$;

2.) $S = -\frac{(W + 1) \pm \sqrt{(4\alpha + 1 - W^2)}}{2}$;

3.) $4\alpha + 1 = W^2 + V^2$;

qui renferment la ſolution ſuivante: Qu'on retranche de B, c'eſt-à-dire de $\frac{A-2}{4}$, toutes les ſommes de deux carrés au-deſſous de cette quantité, & telles que la différence eſt paire, & $= 2\alpha$. Qu'on choiſiſſe enſuite parmi les valeurs de α toutes celles où $4\alpha + 1$ peut être décompoſé en deux carrés V^2 & W^2, & on obtiendra autant de ſolutions qu'on trouvera de valeurs différentes pour V & W. On peut encore ſimplifier d'avantage cette ſolution, en diſtinguant les deux cas, où B eſt un nombre pair ou impair.

2.) Si $A = 2(2B + 1)$, on peut encore ſuppoſer $p = 2P + 1$, $q = 2Q + 1$, $r = 2R + 1$, $s = 2S + 1$; mais comme, dans ce cas, le nombre impair $2B + 1$ feroit

$$= 2P(P + 1) + 2Q(Q + 1) + 2R(R + 1) + 2S(S + 1),$$

c'eſt

c'eſt-à-dire égal à un nombre pair, on voit d'abord que cette ſuppoſition ne peut pas avoir lieu.

III.) Si A eſt impair, & $= 2B + 1$, on peut faire les deux ſuppoſitions ſuivantes:

$p = 2P$; $q = 2Q$; $r = 2R$; $s = 2S + 1$, &

$p = 2P + 1$; $q = 2Q + 1$; $r = 2R + 1$; $s = 2S$.

Soit 1.) $p = 2P$; $q = 2Q$; $r = 2R$; $s = 2S + 1$, & nous aurons:

$$\frac{B}{2} = P^2 + Q^2 + R^2 + S(S+1).$$

Il faut donc que B ſoit un nombre pair 2 C, par conſéquent ſi B étoit impair, cette ſuppoſition ne pourroit pas ſe faire, & on auroit recours au cas du N°. ſuivant. Si donc $B = 2C$, il y aura: $C - (P^2 + Q^2) = R^2 + S(S+1)$. Soit enfin $C - (P^2 + Q^2) = \alpha$, & les conditions pour la ſolution de ce cas ſeront contenues dans les deux équations:

$$C - (P^2 + Q^2) = \alpha; \text{ \& } \alpha - R^2 = S(S+1).$$

On prendra donc tous les carrés P^2 & Q^2, dont la ſomme eſt au deſſous de C, c'eſt-à-dire de $\frac{A-2}{8}$, & retranchant cette ſomme de D, pour avoir α, on ſouſtraira ſucceſſivement de cette dernière valeur tous les nombres carrés au-deſſous d'elle, & autant qu'on trouvera de reſtes qui ſont en même tems des nombres pronics, autant ce cas aura de ſolutions différentes.

2.) Si pour $A = 2B + 1$, on fait $p = 2P + 1$; $q = 2Q + 1$, $r = 2R + 1$, $s = 2S$, on obtient

$$\frac{B-1}{2} = P(P+1) + Q(Q+1) + R(R+1) + S^2,$$

& ce cas exige donc que $B - 1$, c'eſt-à-dire $A - 3$, ſoit diviſible

par

par 2. Faiſons $B - 1 = 2C$, & il y aura:

$$C - [S^2 + R(R+1)] = P(P+1) + Q(Q+1);$$

d'où l'on voit que $C - [S^2 + R(R+1)]$ doit être un nombre pair 2α; & par conſéquent, ſi $P = Q + V$, on obtient les équations ſuivantes pour la ſolution de ce cas:

1.) $C - [S^2 + R(R+1)] = 2\alpha$

2.) $Q = -\frac{(V+1) \pm \sqrt{(4\alpha + 1 - V^2)}}{2}$,

où $4\alpha + 1 - V^2$ doit être un carré parfait que nous nommerons W^2; donc

3.) $4\alpha + 1 = V^2 + W^2$.

On retranchera donc de C, c'eſt-à-dire de $\frac{A-3}{4}$, tous les nombres au deſſous de cette quantité qui ſont le ſomme d'un nombre pronic & d'un carré (dont le dernier doit être pair, ſi C eſt pair; & impair, ſi C eſt impair) pour avoir 2α. On décompoſera enſuite les différentes valeurs de $4\alpha + 1$ en deux carrés V^2 & W^2, & autant qu'on trouvera de ces carrés V^2 & W^2, autant ce problème aura auſſi de différentes ſolutions.

Exemple.

Décompoſer le nombre 2106 en quatre carrés.

§. 13. Comme 2106 eſt un nombre de la forme $2(2B+1)$, il eſt la ſomme de quatre carrés impairs, ou de 2 carrés pairs & de deux impairs. La première ſuppoſition ne peut pas avoir lieu, puiſque le nombre 2106 n'eſt pas diviſible par 4. Faiſons donc $p = 2P$, $q = 2Q$,

$r =$

$r = 2R + 1$, $s = 2S + 1$, & nous aurons $526 - (P^2 + Q^2) = R(R+1) + S(S+1)$. Soit, comme dans les ſolutions précédentes, $R = S + V$, & $526 - (P^2 + Q^2) = 2\alpha$, & il y aura

$$S = -\frac{(V+1) \pm \sqrt{(4\alpha + 1 - V^2)}}{2};$$

par conſéquent $\sqrt{(4\alpha + 1 - V^2)}$ doit être un nombre rationnel & entier W; donc $4\alpha + 1 = V^2 + W^2$, & cette équation combinée avec $526 - (P^2 + Q^2) = 2\alpha$, renferme la ſolution complette de ce problême. On peut donc prendre pour Q & R des nombres entiers quelconques, pourvu que la ſomme de leurs carrés ſoit paire & plus petite que 526. Le reſte ſera $= 2\alpha$. Mais pour ſatisfaire encore à l'équation $4\alpha + 1 = V^2 + W^2$, il faut que ces valeurs de α ſoient en même tems telles que $4\alpha + 1$ puiſſe être décompoſé en deux carrés. La table ſuivante préſente quelques unes des ſolutions de ce problême, pour des valeurs R & Q que j'ai choiſies au haſard, & qui ſuffiſent pour donner une idée claire de la méthode que j'ai propoſée ici.

P.	Q.	α.	$4\alpha + 1$.	V. & W.	
22	6	3	$13 = 3^2 + 2^2$	$V = 3$;	$W = 2$.
21	9	2	$9 = 3^2 + 0^2$	$V = 3$;	$W = 0$.
20	10	13	$53 = 7^2 + 2^2$	$V = 7$;	$W = 2$.
19	11	22	$89 = 8^2 + 5^2$	$V = 8$;	$W = 5$.
18	12	29	$117 = 9^2 + 6^2$	$V = 9$;	$W = 6$.
17	15	6	$25 = 5^2 + 0^2$	$V = 5$;	$W = 0$.
			$= 4^2 + 3^2$	$V = 4$;	$W = 3$.
16	16	7	$29 = 5^2 + 2^2$	$V = 5$;	$W = 2$.
&c.	&c.	&c.			

Ré-

Remontant donc des valeurs de P, Q, V & W à celles de S, R, *p*, *q*, & *r*, on trouve les ſolutions ſuivantes :

1.) $2106 = 44^2 + 12^2 + 5^2 + 1^2$.

2.) $2106 = 42^2 + 18^2 + 3^2 + 3^2$.

3.) $2106 = 40^2 + 20^2 + 9^2 + 5^2$.

4.) $2106 = 38^2 + 22^2 + 13^2 + 3^2$.

5.) $2106 = 36^2 + 24^2 + 15^2 + 3^2$.

6.) $2106 = 34^2 + 30^2 + 5^2 + 5^2$.

7.) $2106 = 34^2 + 30^2 + 7^2 + 1^2$.

8.) $2106 = 32^2 + 32^2 + 7^2 + 3^2$.

&c. &c.

Je ne pouſſerai pas plus loin ces recherches, pour ne pas trop étendre les bornes de ce Mémoire, me contentant d'ajouter encore une table de tous les nombres pronics depuis 2 jusqu'a 50850, & de leurs moitiés paires & impaires.

Table des nombres pronics depuis 2 jusques 50850 & de leurs moitiés.

$m.$	$m(m+1)$	$\frac{m(m+1)}{2}$	$m.$	$m(m+1)$	$\frac{m(m+1)}{2}$	$m.$	$m(m+1)$	$\frac{m(m+1)}{2}$
1	2	1	27	756	378	53	2862	1431
2	6	3	28	812	406	54	2970	1485
3	12	6	29	870	435	55	3080	1540
4	20	10	30	930	465	56	3192	1596
5	30	15	31	992	496	57	3306	1653
6	42	21	32	1056	528	58	3422	1711
7	56	28	33	1122	561	59	3540	1770
8	72	36	34	1190	595	60	3660	1830
9	90	45	35	1260	630	61	3782	1891
10	110	55	36	1332	666	62	3906	1953
11	132	66	37	1406	703	63	4032	2016
12	156	78	38	1482	741	64	4160	2080
13	182	91	39	1560	780	65	4290	2145
14	210	105	40	1640	820	66	4422	2211
15	240	120	41	1722	861	67	4556	2278
16	272	136	42	1806	903	68	4662	2346
17	306	153	43	1892	946	69	4830	2415
18	342	171	44	1980	990	70	4970	2485
19	380	190	45	2070	1035	71	5112	2556
20	420	210	46	2162	1081	72	5256	2628
21	462	231	47	2256	1128	73	5402	2701
22	506	253	48	2352	1176	74	5550	2775
23	552	276	49	2450	1225	75	5700	2850
24	600	300	50	2550	1275	76	5852	2926
25	650	325	51	2652	1326	77	6006	3003
26	702	356	52	2756	1378	78	6162	3081

m.

m.	$m(m+1)$	$\frac{m(m+1)}{2}$	*m.*	$m(m+1)$	$\frac{m(m+1)}{2}$	*m.*	$m(m+1)$	$\frac{m(m+1)}{2}$
79	6320	3160	108	11772	5886	137	18906	9453
80	6480	3240	109	11990	5995	138	19182	9591
81	6642	3321	110	12210	6105	139	19460	9730
82	6806	3403	111	12432	6216	140	19740	9870
83	6972	3986	112	12656	6328	141	20022	10011
84	7140	3570	113	12882	6441	142	20306	10158
85	7310	3655	114	13110	6555	143	20592	10296
86	7482	3741	115	13340	6670	144	20880	10440
87	7656	3828	116	13572	6786	145	21170	10585
88	7832	3916	117	13806	6903	146	21462	10731
89	8010	4005	118	14042	7021	147	21756	10878
90	8190	4095	119	14280	7140	148	22052	11026
91	8372	4186	120	14520	7260	149	22350	11175
92	8556	4278	121	14762	7381	150	22650	11325
93	8742	4371	122	15006	7503	151	22952	11476
94	8930	4465	123	15252	7626	152	23256	11628
95	9120	4560	124	15500	7750	153	23562	11781
96	9312	4656	125	15750	7875	154	23870	11935
97	9506	4753	126	16002	8001	155	24180	12090
98	9702	4851	127	16256	8128	156	24492	12246
99	9900	4950	128	16512	8256	157	24806	12403
100	10100	5050	129	16770	8385	158	25122	12561
101	10302	5151	130	17030	8515	159	25440	12720
102	10506	5253	131	17292	8646	160	25760	12880
103	10712	5356	132	17556	8778	161	26082	13041
104	10920	5460	133	17822	8911	162	26406	13203
105	11130	5565	134	18090	9045	163	26732	13366
106	11342	5671	135	18360	9180	164	27060	13530
107	11556	5778	136	18632	9316	165	27390	13695

$m.$	$m(m+1)$	$\frac{m(m+1)}{2}$	$m.$	$m(m+1)$	$\frac{m(m+1)}{2}$	$m.$	$m(m+1)$	$\frac{m(m+1)}{2}$
166	27722	13861	186	34782	17391	206	42642	21321
167	28056	14028	187	35156	17578	207	43056	21528
168	28392	14196	188	35532	17766	208	43472	21736
169	28730	14365	189	35910	17955	209	43890	21945
170	29070	14535	190	36290	18145	210	44310	22155
171	29412	14706	191	36672	18336	211	44732	22366
172	29756	14878	192	37056	18528	212	45156	22578
173	30102	15051	193	37442	18721	213	45582	22791
174	30450	15225	194	37830	18915	214	46010	23005
175	30800	15400	195	38220	19110	215	46440	23220
176	31152	15576	196	38612	19306	216	46872	23436
177	31506	15753	197	39006	19503	217	47306	23653
178	31862	15931	198	39402	19701	218	47742	23871
179	32220	16110	199	39800	19900	219	48180	24090
180	32580	16290	200	40200	20100	220	48620	24310
181	32942	16471	201	40602	20301	221	49062	24531
182	33306	16653	202	41006	20503	222	49508	24754
183	33672	16836	203	41412	20706	223	49956	24978
184	34040	17020	204	41820	20910	224	50406	25203
185	34410	17205	205	42230	21115	225	50850	25425

EX-

EXTRAITS

POUR LE TOME ONZIÈME

DES NOVA ACTA.

CLASSE MATHEMATIQUE ET PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

De formulis differentialibus ſecundi gradus, quae integrationem admittunt.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

Le but de l'Auteur de ce Mémoire a été d'examiner, quelles ſont les valeurs qu'on peut donner à V, fonction de x, y & $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, pour que la formule $V \partial p$ devienne intégrable. On connoît depuis longtems les critères de l'intégrabilité de la formule $\int Z \partial x$, Z étant fonction de x & y; & il eſt facile à voir qu'on peut aiſément transformer la formule propoſée $\int V \partial p$ en $\int Z \partial x$, & s'aſſurer par là ſi cette formule eſt intégrable ou non; mais l'équation de condition qui en réſulte n'étant pas propre à faire connoître les valeurs de V, elle n'eſt d'aucun uſage pour le problème en queſtion; c'eſt pourquoi l'auteur examine dans une ſuite de problèmes les conditions qui rendent intégrables la formule propoſée $\int V \partial p$ pour les cas ſuivans:

1°.)

1°.) $V = Px + Qy$;
2°.) $V = \Pi(Mx + Ny)$;
3°.) $V = (px - y)^{n-1}(Px + Qy)$;
4°.) $V = (px - y)^{n-1}\Pi(Mx + Ny)$.

P, Q, M, N, Π étant fonctions de $p = \frac{\partial y}{\partial x}$.

Pour donner une idée de la méthode, nous tranſcrirons ici la ſolution la plus ſimple du premier problème que M. Euler a traité de deux manieres différentes. La voici :

Comme $x\,\partial p = \partial.(px - y)$, on aura $\int Px\,\partial p = P(px - y) - \int(px - y)\,\partial P$; de même à cauſe de $\frac{\partial p}{pp} = \partial.(x - \frac{y}{p})$, on aura

$$\int Qy\,\partial p = Qpp\,(x - \tfrac{y}{p}) - \int(x - \tfrac{y}{p})\,\partial.Qpp.$$

De là il ſuit que

$$\int V\,\partial p = P(px - y) - \int(px - y)\,\partial P + Qpp\,(x - \tfrac{y}{p}) - \int(x - \tfrac{y}{p})\,\partial.Qpp.$$

Ainſi il faut que

$$\int(px - y)\,\partial P + \int(x - \tfrac{y}{p})\,\partial.Qpp = 0,$$

ou bien que $\partial P + p\,\partial Q + 2Q\,\partial p = 0$, équation de condition qui donne la relation entre les fonctions P & Q cherchée, telle que l'intégrabilité l'exige.

À la ſuite du premier, du ſecond & du quatrième problème général ſe trouvent pluſieurs applications à des formules différentielles particulieres aſſez compliquées, dont les

les Intégrales ſont pour la plûpart algébriques & d'une forme bien ſimple.

II.

Formae generales differentialium, quae etſi nulla ſubſtitutione rationales reddi poſſunt, tamen integrationem per logarithmos et arcus circulares admittunt.

Auctore *L. Eulero*, pag. 27.

Dans un Mémoire qui ſe trouve parmi ceux du neuvième volume des *Nova Acta*, feu M. Euler avoit donné l'Intégrale d'une formule très irrationelle qui cependant n'eſt qu'un cas très particulier d'autres formules beaucoup plus générales, dans lesquelles l'irrationnalité eſt tellement compliquée qu'aucune ſubſtitution ſeule n'eſt ſuffiſante pour la faire disparoître, & dont néanmoins l'Intégrale peut être aſſignée par des logarithmes & des arcs de cercle. On trouve ici reduites à la rationalité, par des ſubſtitutions partielles & par des décompoſitions, deux formules dont l'une eſt affectée dans le numérateur & l'autre dans le dénominateur par le radical $\sqrt[n]{a(\alpha + \gamma z)^n + b(\beta + \delta z)^n}$. On y trouve auſſi le développement d'un grand nombre de cas particuliers & l'intégration de formules qui ſe ſont refuſées à toutes les méthodes connues & employées jusqu'ici. Mais ce Mémoire qui enrichit tant une partie du calcul intégral très importante & peu entamée par les Géomètres, n'eſt pas ſuſceptible d'extrait, parce qu'il eſt impoſſible de donner une idée claire de la méthode ſans entrer dans des

 cal-

calculs que les amateurs de ce genre de recherches aimeront mieux lire dans le Mémoire même, auquel par la raiſon ſusdite, nous ſommes forcés de renvoyer le lecteur de ces extraits.

III.

De novo genere quaeſtionum arithmeticarum, pro quibus ſolvendis certa methodus adhuc deſideratur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 78.

La queſtion qui fait le ſujet de ce Mémoire conſiſte à trouver tous les nombres entiers N tels que les formules $A^2 + B^2$ & $A^2 + NB^2$ deviennent l'une & l'autre à la fois des quarrés. En mettant $A = xx - yy$ & $B = 2xy$, on ſçait que la premiere devient un quarré; & comme l'autre doit auſſi devenir un quarré, en mettant ce quarré $= zz$, on obtient $N = \frac{zz - (xx - yy)^2}{4xxyy}$, deſorte que la queſtion ſe reduit à trouver pour z des valeurs telles que N devienne un nombre entier, ce qui arrive en mettant ou $z = xx + 2\alpha xxyy + yy$, ou $z = xx + 2\alpha xxyy - yy$, d'où l'on tire les valeurs ſuivantes pour N:

$$N = (\alpha xx + 1)(\alpha yy + 1)$$

$$N = (\alpha xx - 1)(\alpha yy + 1) + 1$$

d'où, en donnant ſucceſſivement à α les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, & puis auſſi des fractions, M. Euler trouve, parmi les 100 premiers nombres naturels, les nombres ſuivans pour N qui ſatisfont au problème: 7, 10, 11, 17, 20, 22, 23, 24, 27, 30, 31, 34, 41, 42, 45, 49, 50, 52, 53, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 68, 71, 72, 74, 76, 77, 79, 81, 82, 85, 86, 90, 92, 94, 97, 99, 100.

Or

Or ces nombres ſont tels qu'il eſt impoſſible d'y découvrir un critère propre à faire diſtinguer les valeurs convenables de N de celles qui ne le ſont pas. C'eſt pourquoi M. Euler a mis ce problème au nombre de ceux, pour la réſolution desquels l'Analyſe n'a pas encore de méthode ſûre & certaine; & il en eſt de même du problème de trouver tous les nombres entiers N contenus dans la forme

$$N = (xx + 1)(yy + 1) \;\&\; N = (xx - 1)(yy - 1),$$

x & y étant des nombres rationnels quelconques, ſoit entiers, ſoit fractionnaires.

IV.

Methodus facilis inveniendi ſeries per ſinus coſinusve angulorum multiplorum progredientes, quarum uſus in univerſa Theoria Aſtronomiae eſt ampliſſimus.

Auctore *L. Eulero*, pag. 94.

M. Euler donne dans ce Mémoire une méthode aiſée de trouver les coëfficiens A, B, C, &c. de la ſérie connüe $A + B\,\text{coſ.}\,\Phi + C\,\text{coſ.}\,2\Phi + D\,\text{coſ.}\,3\Phi + \&c.$, à laquelle ſe reduiſent presque toutes les expreſſions analytiques de la Théorie de l'Aſtronomie. C'eſt par une pareille ſérie, par exemple que dans le mouvement régulier des planètes on a coûtume de repréſenter la diſtance de la planète au ſoleil $\frac{b}{1 + e\,\text{coſ}\,\Phi}$. C'eſt à une pareille ſérie que ſe reduit tout le travail, lorsqu'on veut exprimer tous les élémens par l'anomalie moyenne. Auſſi l'expreſſion du tems $\int \frac{\partial \Phi}{(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}$ exige la transformation en une ſérie dont les termes procédent ſelon les ſinus ou coſinus d'angles multiples. Cette

même transformation ſe pratique avec la formule $\frac{1}{(1+a\,\text{coſ.}\,\phi)^{\frac{3}{2}}}$ à laquelle on eſt conduit dans la recherche des mouvemens irréguliers engendrés par l'action mutuelle des planètes, transformations qui par les méthodes uſitées, entrainent des calculs longs & penibles.

La méthode que M. Euler préſente dans ce Mémoire eſt exempte de ce défaut, & peut être employée, avec la même facilité, à transformer immediatement en une telle ſérie toute formule ſemblable à celles dont nous venons de parler, quelque compliquée qu'elle puiſſe être, pourvu qu'elle puiſſe être changée en une ſérie, dont les termes procèdent ſelon les puiſſances du coſ. ϕ, ſans qu'il ſoit beſoin de faire préalablement ce développement.

Le principe ſur lequel eſt fondée cette transformation conſiſte à exprimer la formule propoſée à transformer, laquelle eſt toujours une fonction de l'angle ϕ, par le caractère $\Gamma:\phi$, & à mettre $\Gamma:\phi = A + B\,\text{coſ.}\,\phi + C\,\text{coſ.}\,2\phi +$ &c. où tout revient à déterminer les coëfficiens A, B. C, &c. Pour le premier A on donne ſucceſſivement à ϕ les valeurs $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$, & en combinant convenablement les valeurs de $\Gamma:\phi$ qui en réſultent, on obtient:

$$\frac{1}{16}\Gamma:0 + \frac{1}{16}\Gamma:\pi + \frac{1}{8}\Gamma:\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\Gamma:\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\Gamma:\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{8}\Gamma:\frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\Gamma:\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{8}\Gamma:\frac{5\pi}{8} + \frac{1}{8}\Gamma:\frac{7\pi}{8} = A + Q + \text{&c.}$$

où tous les coëfficiens B, C, D, &c. jusqu'à Q ſont ſortis du calcul, de ſorte que, parceque ces lettres forment une ſérie très convergente, on a aſſez exactement la valeur de la

la premiere, qu'on peut déterminer encore plus exactement, en faiſant encore uſage des valeurs $\Phi = \frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}$, &c. Par un procédé ſemblable, quoique par d'autres combinaiſons, on pourroit auſſi trouver les coëfficiens ſuivans B, C, D, &c. Mais tout ce calcul ne laiſſeroit pas d'être encore bien long; & le plus difficile reſte à faire, ſavoir la ſommation $\frac{1}{2}\Gamma : 0 + \text{coſ.}\,\lambda\,\omega\,\Gamma : \omega + \text{coſ.}\,2\,\lambda\,\omega\,\Gamma : 2\,\omega +$ &c., à laquelle ſe reduit la détermination de chacun des coëfficiens A, B, C, &c., ſommation que l'auteur ſe facilite par une méthode ingénieuſe, dont il eſt difficile de donner une idée, ſans entrer dans des explications du ſymbolisme particulier dont il y eſt fait uſage.

V.

Disquiſitio ulterior ſuper ſeriebus ſecundum multipla cuiusdam anguli progredientibus.

Auctore *L. Eulero*, pag. 114.

Ce titre fait deja voir que le préſent Mémoire roule ſur la même ſérie qui à fait le ſujet du Mémoire précédent, ſavoir: $\Phi = A + B\,\text{coſ.}\,\Phi + C\,\text{coſ.}\,2\,\Phi +$ &c. Ici M. Euler commence par démontrer que les coëfficiens A, B, C, &c., en prenant les Intégrales depuis $\Phi = 0$ jusqu'à $\Phi = \pi$, peuvent être repréſentés par les formules intégrales ſuivantes: (π étant la demie circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$).

$$A = \frac{1}{\pi} \int \Phi\, \partial \Phi,$$

$$B = \frac{2}{\pi} \int \Phi\, \partial \Phi\, \text{coſ.}\, \Phi,$$

C =

$$C = \frac{2}{\pi}\int \Phi\, \partial \Phi \operatorname{coſ.} 2\, \Phi,$$

$$D = \frac{2}{\pi}\int \Phi\, \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3\, \Phi,$$

&c.

qui ont toutes la propriété de pouvoir être repréſentées par des quadratures de courbes aſſez ſimples & même algébriques.

Enſuite il ſuppoſe que la fonction Φ ſoit donnée par une ſérie dont les termes procédent ſelon les puiſſances du coſ. Φ, ſavoir $\Phi = \alpha + \beta \operatorname{coſ.}\Phi + \gamma \operatorname{coſ.}\Phi^2 + \text{etc.}$ & il détermine les coëfficiens A, B, C, &c., & trouve moyennant le Lemme $\int \partial \Phi \operatorname{coſ.}\Phi^\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}\int \partial \Phi \operatorname{coſ.}\Phi^{\lambda - 2}$, qui a lieu pour les termes établis d'intégration:

$$A = \alpha + \frac{2}{4}\gamma + \frac{4.3}{4.8}\varepsilon + \frac{6.5.4}{4.8.12}\eta + \frac{8.7.6.5}{4.8.12.16}\iota + \&c.$$

$$B = \beta + \frac{3}{4}\delta + \frac{5.4}{4.8}\zeta + \frac{7.6.5}{4.8.12}\theta + \frac{9.8.7.6}{4.8.12.16}\varkappa + \&c.$$

$$2\, C = \gamma + \frac{4}{4}\varepsilon + \frac{6.5}{4.8}\eta + \frac{8.7.6}{4.8.12}\iota + \frac{10.9.8.7}{4.8.12.16}\lambda + \&c.$$

$$2^2\, D = \delta + \frac{5}{4}\zeta + \frac{7.6}{4.8}\theta + \frac{9.8.7}{4.8.12}\varkappa + \frac{11.10.9.8}{4.8.12.16}\mu + \&c.$$

$$2^3\, E = \varepsilon + \frac{6}{4}\eta + \frac{8.7}{4.8}\iota + \frac{10.9.8}{4.8.12}\lambda + \frac{12.11.10.9}{4.8.12.16}\nu + \&c.$$

&c. &c.

Il eſt viſible que ces ſéries ne ſont pas aſſez convergentes, pour qu'on pût s'en ſervir avec avantage à déterminer les valeurs numériques des coëfficiens A, B, C, D, &c.; de plus elles exigent la détermination préalable des coëfficiens α, β, γ, &c. Cela nonobſtant elles ſont très remarquables tant par leur forme que par leur dépendance même des coëfficiens α, β, γ, &c., & quant à ce qui leur manque du côté de l'utilité pratique, le Mémoire précédent y ſupplée.

VI.

VI.

Inveſtigatio quarundam ſerierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum vero proxime definiendam maxime ſunt accommodatae.

Auctore *L. Eulero*, pag. 133.

Tous ceux qui après *Van Ceulen* ont cherché par approximation la circonférence π d'un cercle dont le diamètre $= 1$, ſe ſont ſervi de la ſérie connue de Leibnitz, en vertu de laquelle l'arc s d'un cercle, dont le rayon $= 1$, eſt exprimé par la tangente t de la maniere ſuivante:

$$s = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \&c.$$

qui donne pour la circonférence entiere

$$\pi = \sqrt{12} \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \&c.\right)$$

Feu M. Euler avoit dejà propoſé dans le neuvieme volume des anciens Commentaires pour l'année 1737 une méthode de diminuer ce travail énorme, en faiſant uſage de la décompoſition des arcs, & nommément de l'expreſſion $\frac{\pi}{4} =$ A tang. $\frac{1}{2}$ + A tang. $\frac{1}{3}$, qui donne:

$$\frac{\pi}{4} = \left\{ \begin{matrix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \&c. \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \&c. \end{matrix} \right\}.$$

Le travail devient encore plus leger, quand on ſe ſert de la décompoſition $\pi = 8$ A tang. $\frac{1}{3}$ + 4 A tang. $\frac{1}{7}$; les ſéries qui en réſultent deviennent très convergentes: le ſeul inconvénient qui en diminue un peu l'avantage eſt la diviſion ſucceſſive par 49 qui n'eſt pas aſſez commode.

Pour

Pour remédier à cet inconvénient M. Euler donne ici une autre expreſſion de l'arc s par ſa tangente t, ſavoir:

$$s = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{tt}{1+tt}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^3 + \&c.\right]$$

qu'il démontre de deux manières différentes, & qui, en mettant $t = \frac{1}{3}$ & puis $t = \frac{1}{7}$, pour l'expreſſion $\pi = 8\,\text{A tg.}\,\frac{1}{3} + 4\,\text{A tg.}\,\frac{1}{7}$ donne la circonférence exprimée par les deux ſéries ſuivantes:

$$\pi = \begin{cases} + \frac{24}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \&c.\right] \\ + \frac{28}{50}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \&c.\right] \end{cases}$$

qui ſont non ſeulement très convergentes, mais de plus d'un uſage très commode, par la facilité avec laquelle on peut déduire chaque terme de ſon précédent.

L'avantage devient encore plus grand, ſi l'on ſe ſert de la décompoſition $\pi = 20\,\text{A tang}\,\frac{1}{7} + 8\,\text{A tang.}\,\frac{3}{79}$; car elle fournit des ſeries encore plus convergentes & douées des mêmes avantages relativement à la commodité du calcul. Ces ſéries ſont:

$$\pi = \begin{cases} \frac{28}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \&c.\right] \\ + \frac{30336}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{144}{100000}\right)^3 + \&c.\right] \end{cases},$$

dont la ſeconde eſt ſurtout remarquable par la propriété de donner la ſomme des cinq premiers termes exactement par une fraction décimale de 26 chifres, tous les ſuivans étant des zéros.

VII.

VII.

De novo genere ſerierum rationalium & valde convergentium, quibus ratio peripheriae ad diametrum exprimi poteſt.

Auctore *L. Eulero*, pag. 150.

Ce nouveau genre de ſéries eſt auſſi déduit de la décompoſition $\pi = 8 \text{ A tang.} \frac{1}{3} + 4 \text{ A tang.} \frac{1}{7}$; mais le principe du développement de ces arcs en ſéries eſt trés différent de celui du Mémoire précédent. Le voici: Comme $\text{A tang.} \frac{x}{2-x} = \int \frac{\partial x}{2 - 2x + xx} = 2 \int \frac{\partial x}{4 + x^4} + 2 \int \frac{x \partial x}{4 + x^4} + \int \frac{xx \partial x}{4 + x^4}$, on aura par les procédés connus:

$$\text{A tang.} \frac{x}{2-x} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{x}{2} \left[1 - \frac{1}{5} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{x^4}{4} \right)^2 - \frac{1}{13} \left(\frac{x^4}{4} \right)^3 + \&c. \right. \\ + \frac{xx}{4} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{x^4}{4} \right)^2 - \frac{1}{7} \left(\frac{x^4}{4} \right)^3 + \&c. \right. \\ + \frac{x^3}{4} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \left(\frac{x^4}{4} \right) + \frac{1}{11} \left(\frac{x^4}{4} \right)^2 - \frac{1}{15} \left(\frac{x^4}{4} \right)^3 + \&c. \right. \end{array} \right\}.$$

En mettant donc premièrement $x = \frac{1}{2}$ & enſuite $x = \frac{1}{4}$, on aura trois ſéries pour A tang. $\frac{1}{3}$, & autant pour A tang. $\frac{1}{7}$, & la circonférence π ſera exprimée par ſix ſéries qui toutes procèdent ſelon des puiſſances de 2, c'eſt-à-dire les trois premières ſelon les puiſſances de $\frac{1}{64}$ & les trois dernières ſelon les puiſſances de $\frac{1}{1024}$, par conſéquent toutes extrêmement convergentes & de plus très commodes pour le calcul.

VIII.

Vlteriores disquiſitiones circa ſeries quibus ſinus & coſinus angulorum multiplorum exprimuntur.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 155.

Feu M. Euler a donné le premier dans ſon Introduction à l'Analyſe des Infiniment-petits des ſéries pour le

ſinus & le coſinus d'un angle multiple $n\,\Phi$. Dans un Mémoire qui ſe trouve dans le neuvième Tome des *Nova Acta*, le même Géomètre a fait voir que ces ſéries ne ſont pas généralement vrayes, parcequ'elles ne ſont pas complettes, de plus qu'elles ne ſont applicables que pour des valeurs entieres de n, & qu'encore dans ce cas elles ne doivent être continuées que jusqu'à ce que les expoſans des coſinus dont les puiſſances conſtituent les termes de ces ſéries, de poſitifs qu'ils étoient, commencent à devenir négatifs, imperfections auxquelles feu M. Euler a ſuppléé, dans le Mémoire cité, d'une maniere très ſatisfaiſante, en y donnant d'autres ſéries qui doivent être jointes aux précédentes, pour les rendre complettes & applicables à tous les cas poſſibles, & qui font voir pourquoi les ſéries mentionnées de l'Introduction, trouvées par induction, ne doivent pas être continuées jusqu'aux expoſans négatifs.

L'Auteur du préſent Mémoire, qui avoit dejà donné dans le même neuvième volume des *Nova Acta* une méthode directe de trouver les mêmes ſéries complettées de M. Euler, dont nous venons de parler, obſerve ici, qu'on pourroit auſſi éviter les inconvéniens attachés aux ſéries données dans l'Introduction pour ſin. $n\,\Phi$ & coſ. $n\,\Phi$, en les renverſant, c'eſt-à-dire en faiſant monter les expoſans des puisſances du coſinus de l'angle ſimple. De cette façon on obtient deux ſéries pour ſin. $n\,\Phi$ & autant pour coſ. $n\,\Phi$; & de ces quatre ſéries deux valent pour les valeurs paires & les deux autres pour les valeurs impaires du nombre n.

Le principe dont M. Fuſs fait uſage, pour arriver à ces ſéries, eſt que ſi coſ. $\Phi = z$, coſ. $n\,\Phi = s$ & ſin. $n\,\Phi$ =

$= v\sqrt{(1 - zz)}$, on obtient

$$2s = [z + \sqrt{(zz - 1)}]^n + [z - \sqrt{(zz - 1)}]^n;$$
$$2v = \frac{[z + \sqrt{(zz - 1)}]^n - [z - \sqrt{(zz - 1)}]^n}{\sqrt{(zz - 1)}};$$

expreſſions qui ſe laiſſent transformer facilement par la double différentiation en équations différentielles du ſecond degré, & puis en ſéries aſcendantes. La ſeule difficulté qui s'y préſente eſt la détermination des premiers coëfficiens des ſéries adoptées pour s & v, lesquels, non obſtant leur forme imaginaire en apparence, deviennent ou ± 2, ou $\pm 2n$, ſelon que n eſt de la forme $4i$, $4i+1$, $4i+2$ ou $4i+3$.

IX.
De Inventione Diviſorum.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 172.

Ce mémoire fut occaſionné par la lecture de l'Algèbre de *Newton* (*Univerſal Arithmetick or a Treatiſe of arithmetical compoſition & reſolution*), & nommément du chapitre *of the invention of diviſors*, où ce grand homme enſeigne une méthode de trouver tous les facteurs ſimples & doubles d'une fonction quelconque d'une quantité variable x, ſans ajouter aucune démonſtration. M. Schubert démontre non ſeulement la règle donnée par le grand *Newton* pour le cas des facteurs ſimples ou doubles, mais auſſi une règle analogue & générale pour tous les facteurs, de quelque degré qu'ils ſoyent, par le moyen des ſéries des différences premieres, ſecondes, &c. d'une quantité x, croiſſante ou décroiſſante continuellement d'une unité.

X.

Dilucidationes ſuper problemate geometrico de Ellipſi minima per data quatuor puncta ducenda.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 187.

En exprimant la nature de l'Ellipſe par l'équation générale pour les lignes du ſecond ordre, tous les coéfficiens, à l'exception d'un ſeul, ſont déterminés par la condition que l'Ellipſe doit paſſer par quatre points donnés; le coéfficient reſtant ſe détermine par la condition que l'Ellipſe doit être la plus petite de toutes celles qu'on peut faire paſſer par ces quatre points; ce qui méne à une équation du troiſième degré. „ Il peut arriver, dit M. Euler „ dans la ſolution de ce problème „ qu'il a donné dans le neuviéme volume des *Nova Acta*, „ que cette équation cu„ bique a trois racines réelles, & dans ce cas là il y aura „ trois ſolutions dont je laiſſe à d'autres à examiner la „ nature „

M. Fuſs, curieux de ſavoir ce que peuvent ſignifier les trois ſolutions d'un problème qui ne paroît admettre qu'une ſeule, examine dans le préſent Mémoire la nature de cette équation du troiſième degré, & il trouve qu'elle a toujours, & dans tous les cas poſſibles, trois racines réelles, & que par conſéquent le problème admet toujours trois ſolutions, non pas le problème de M. Euler, dont l'énoncé eſt plus reſtreint que la ſolution, mais le problème plus général énoncé ainſi:

De

De toutes les lignes du ſecond ordre qui peuvent paſſer par quatre points donnés, trouver celles dont le rectangle fait des deux demi-axes ſoit le plus petit poſſible.

Au problème ainſi énoncé ſatisfont, comme M. Fuſs fait voir: 1°.) une Ellipſe; 2°.) deux Hyperboles oppoſées dont les arcs ſont ſoutendus par les deux côtés oppoſés du quadrilatère formé par les quatre points donnés, comme cordes; 3°.) deux autres Hyperboles oppoſées dont les deux autres côtés du même quadrilatère forment les cordes.

Tout ceci eſt éclairci par une application à un cas déterminé, & par la ſolution du problème de trouver de toutes les ſections coniques qui peuvent paſſer par les trois angles d'un triangle celles qui touchent au ſommet une ligne tirée du ſommet à un point donné dans le prolongement de la baſe, & dont le rectangle fait des deux demi-axes ſoit un *Minimum*.

Une choſe qui mérite encore d'être rapportée dans cet extrait, c'eſt que dans une note M. Fuſs détermine par la ſeule permutation des coordonnées la ſurface de l'Ellipſe, que M. Euler avoit déduite de la conſidération de l'élément $y\,\partial x$.

XI.

Integratio formularum

$$\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[3]{(1-x^3)}} \quad \& \quad \frac{\partial x\sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x}$$

Auctore *Steph. Roumovski*, pag. 213.

L'Auteur expoſe ici deux méthodes d'intégrer les formules propoſées. Dans la premiere ſont employées des ſub-

ſubſtitutions, par lesquelles on parvient à la fin à des formules rationnelles. Dans l'autre méthode en multipliant la formule $\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ par $1 - x + xx$ & $\frac{\partial x \sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x}$ par $1 + x + xx$, on obtient d'abord des expreſſions, dont chacune ſe réduit aiſément à une forme rationnelle, & qui par conſéquent peut être intégrée. L'Auteur ne donne pas au reſte ces intégrales mêmes, mais ſe contente d'avoir réduit ſes formules à des formes rationnelles.

XII.

De Minimis quibusdam geometricis ope principii ſtatici inventis.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 220.

Le principe de Statique, dont M. Fuſs fait uſage dans ce Mémoire, pour réſoudre une ſuite de problèmes géométriques, eſt le ſuivant: Si un nombre de forces quelconques α, β, γ, &c. agiſſent ſur un point O dans les directions A O, B O, C O, &c., ces forces ſeront en équilibre, lorsque $\alpha .\, AO + \beta .\, BO + \gamma .\, CO +$ &c. eſt un *Minimum*. Ce principe combiné avec les relations qui ont lieu pour l'état d'équilibre entre les forces & les ſinus ou coſinus de leurs directions fournit le moyen de réſoudre avec beaucoup de facilité pluſieurs problèmes qui, traités ſelon la méthode ordinaire des plus-grands & des plus-petits, ſeroient ou très difficiles ou du moins très compliqués.

Voici

Voici l'énoncé des principaux problèmes qui ſont réſolus dans ce Memoire à l'aide du principe mentionné.

1°.) Dans une ligne droite donnée trouver un point O tel que ſi de deux points donnés A & B on tire les droites AO & BO la ſomme des multiples de ces deux lignes: $\alpha . AO + \beta . BO$ ſoit un *Minimum*.

2°.) Dans la circonférence d'un cercle donné de grandeur & de poſition, trouver un point O tel que ſi de deux points donnés A & B on tire les droites AO & BO, la ſomme de leurs multiples $\alpha . AO$ & $\beta . BO$ ſoit un *Minimum*.

3°.) Dans un triangle donné ABC trouver un point O tel, que ſi des angles on tire les droites AO, BO, CO, la ſomme de leurs multiples $\alpha . AO + \beta . BO + \gamma . CO$ devienne un *Minimum*.

4°.) Dans un Polygone quelconque trouver un point O tel que ſi des angles on tire les droites AO, BO, CO, &c. la ſomme de leurs multiples

$$\alpha . AO + \beta . BO + \gamma . CO + \delta . DO + \varepsilon . EO + \&c.$$

devienne un *Minimum*, α, β, γ, δ, &c. étant des nombres reſpectivement proportionnels à ces lignes.

Comme les deux premiers problèmes conduiſent l'un & l'autre à une équation du quatrième degré qui dans une infinité de cas peut avoir quatre racines réelles, ce Mémoire donne lieu, comme le précédent Nr. X. à quelques diſcuſſions intéreſſantes ſur la ſignification de la pluralité des ſolu-

ſolutions d'un problême qui par ſa nature n'en paroît admettre qu'une ſeule. On trouve dans les Corollaires les explications que ces différentes ſolutions demandent.

Les deux derniers problêmes ſont remarquables par les belles conſtructions géométriques, dont le principe de Statique en queſtion fournit la démonſtration, & dont la vérité ſe confirme par la méthode ordinaire dans les nombreuſes applications que l'auteur fait du quatrième problême général, ſurtout pour les cas où la ſomme des quarrés des lignes tirées des angles du polygone au point cherché, doit être un *Minimum.*

XIII.

Sur les plus grandes portées des pieces d'Artillerie, eu égard à la réſiſtance de l'air.

Par *W. L. Krafft*, pag. 246.

Le degré d'élévation qu'il faut donner à une piece d'Artillerie, pour que le boulet lancé par la même charge de poudre à canon, ſoit porté le plus loin poſſible, eſt un point bien important de l'Art de jetter les bombes, parceque ſouvent les circonſtances locales ne permettent point dans la pratique de l'Artillerie, de s'approcher du but qu'à une certaine diſtance qu'il n'y a pas moyen de franchir, ou bien auſſi, parceque on peut avoir des raiſons de faire agir l'Artillerie dejà du plus grand éloignement poſſible. La théorie ordinaire du jet des bombes, faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air, preſcrit avec raiſon, que pour obtenir

nir la plus grande portée du boulet, par la même charge, il faut pointer le Mortier ſous l'élévation de 45 degrés; mais cette regle, très-vraie dans le vuide, eſt abſolument fauſſe dans l'air réſiſtant, auſſi bien que presque toutes les autres, qui ſuppoſent que le boulet ſoit lancé dans un endroit vuide d'air; de façon que c'eſt une pratique contraire aux principes de la vraie théorie, que de fondre les Mortiers ſous l'angle de 45 degrés avec leurs ſemelles. On n'a encore ſur la véritable grandeur de l'angle de la plus grande portée dans l'air réſiſtant, que des connoiſſances peu préciſes ou au moins peu appliquables à la pratique. M. le Chevalier de Borda, dans les Mémoires de l'Académie de Paris, & M. le Général de Tempelhoff dans ſon Bombardier Pruſſien, ont fait des recherches très-ſavantes ſur cet objet; mais, de l'aveu même de ces illuſtres Géometres, ces méthodes, peu propres à être miſes en uſage ſur la batterie, laiſſent encore bien des choſes à déſirer. M. Krafft, dans le Mémoire préſent, s'occupe du même objet. Partant de la théorie du mouvement des projectiles dans l'air réſiſtant, qu'il avoit donnée dans deux mémoires précédens, il en déduit dans celui-cy une expreſſion pour la portée horizontale, qui traitée ſelon les méthodes du calcul différentiel lui donne une équation à l'angle de la plus grande portée, & une expreſſion de la plus grande portée même, qui a l'avantage d'être d'une application très-facile à la pratique pour tous les calibres & toutes les viteſſes de projection des boulets. On voit par ce calcul, que l'angle de 45° n'eſt en aucun cas celui de la plus grande portée, que cet angle dans l'air réſiſtant dépend du poids du calibre, de la viteſſe initiale du boulet, & encore de la loi de la réſiſtance de l'air, & qu'il eſt d'au-

 tant

tant plus petit, que la viteſſe de projection eſt grande Mr. Krafft donne enſuite des ſolutions bien propres à la pratique, des Problêmes ſuivans: 1.) Le poids, le calibre & la viteſſe de projection du boulet étant donnés, on demande l'angle de la plus grande portée & cette portée même. 2.) Le poids & le calibre du boulet, avec l'angle de l'élévation du Mortier étant donnés: on demande la viteſſe de projection, qu'il faut donner au boulet, pour que l'angle de l'élévation du Mortier ſoit celui de la plus grande portée; & enfin. 3.) Le poids & le calibre du boulet, avec la diſtance du but à frapper, étant donnés: trouver l'élévation du Mortier & la viteſſe de projection du boulet, telles que cette viteſſe ſoit la moindre poſſible qui puiſſe lancer le boulet à la portée donnée.

CLAS-

CLASSE PHYSIQUE.

I.

Expoſitio novarum circa ſalium cryſtalliſationem obſervationum, nec non novae encheireſis, qua ſalia ad meliorem cryſtallorum formationem disponuntur.

Auctore *Tobia Lowitz*, pag. 271.

D'après un grand nombre d'expériences, que M. Lowitz a faites ſur la cryſtalliſation des ſels, il a réuſſi à trouver un moyen fort ſimple, par lequel la cryſtalliſation des ſels, facilement diſſolubles, forme des cryſtaux parfaitement réguliers: il ſuffit pour cela de jetter dans la ſolution du ſel, déja évaporée jusqu'au point de la cryſtalliſation, tant qu'elle n'eſt pas encore refroidie, un petit morceau ſec du même ſel, ou même de le laiſſer y nager en le tenant ſuspendu à un fil mince. Par ce moyen la cryſtalliſation ſe fait déja voir, lors même que la ſolution n'eſt pas encore parfaitement refroidie, & elle s'acheve peu à peu à meſure que la ſolution ſe refroidit. Au contraire ſi l'on néglige cet adminicule, la cryſtalliſation ſe fait ſeulement, en pluſieurs cas après le refroidiſſement parfait, trop précipitamment, & par conſéquent d'une maniere irréguliere.

II.

Enumeratio Mineralium quorundam rariorum in Muſeis nonnullis Petropolitanis obviorum.

Auctore *Baſil. Severgin*, pag. 289.

M. l'Académicien Sewergyne décrit ici différens échantillons de minéraux, qui ont été apportés nouvellement de Sibérie & qu'il a eu occaſion d'obſerver. Le but principal qu'il s'y propoſe, eſt de faire remarquer ceux, qui lui ſemblent mériter le plus l'attention des Minéralogues, tant par leur mélange réciproque, que par leurs lieux natals, où ils ont été exploités.

III.

Experimentorum circa ſummam ſpiritus vini dephlegmationem a me inſtitutorum expoſitio.

Auctore *Tobia Lowitz*, pag. 299.

L'Alcohol le plus fort qu'on a ſçu préparer jusqu'à-préſent, étoit celui dont la péſanteur ſpécifique eſt à celle de l'eau diſtillée, comme 815 à 1000. Quoiqu'un tel alcohol eut été conſidéré comme totalement dépourvû d'eau, M. l'Académicien Lowitz a réuſſi pourtant à pouſſer ſa concentration à un degré encore conſidérablement plus fort; en ſorte que ſa péſanteur ſpécifique dans une température de 16 degrés de Réaumur (au deſſus de o.) ne ſurpaſſe pas 791.

C'eſt

C'eſt dans cette vue que l'auteur ſoumet l'alcohol préparé de la maniere ordinaire à la diſtillation par un feu très modéré, dans une cornue déja remplie d'une quantité ſuffiſante de potaſſe ſechée & purifiée, pour que l'alcohol qu'on va concentrer ſoit entiérement englouti par les interſtices du ſel alcalin. Puis donc que par cette opération on obtient effectivement un alcohol abſolument dépourvû d'eau, comme notre Académicien en a été convaincu par ſes expériences, il a cru qu'il valoit bien la peine de conſtruire la nouvelle Table d'intenſité qu'il donne pour ſes mélanges faits en différentes proportions avec de l'eau. On voit par cette table que l'alcohol préparé de la maniere ordinaire a été fauſſement conſidéré jusqu'à préſent comme abſolument dépourvû d'eau, & que ſa péſanteur ſpécifique étant = 815, il contient en cent parties de ſa ſubſtance encore presque neuf parties d'eau.

IV.

Expoſitio methodi novae Naphtam vitriolicam ad ſubtilitatis et puritatis gradum hodierno maiorem perducendi.

Auctore *Tobia Lowitz*, pag. 320.

La plus grande ſubtilité à laquelle on a pû porter jusqu'à préſent l'Éther vitriolique par des rectifications réïtérées & fréquentes, conſiſtoit en cela, que ſa péſanteur ſpécifique n'allât pas au dela de 732. M. Lowitz a réuſſi à augmenter par un moyen nouveau ſa pureté jusqu'à un beaucoup plus haut degré, & à diminuer ſa peſanteur ſpécifique

fique jusqu'à 716. On y parvient de la maniere ſuivante: On agite fortement l'éther, après y avoir jetté du muriate de ſel bien ſec. Auſſitôt il ſe partage en deux fluides différents, dont l'inférieur ou le plus peſant conſiſte dans la diſſolution du ſel nommé dans l'eſprit de vin détaché de l'éther. On ſépare enſuite l'éther ſupérieur moyennant un entonnoir, de cet autre fluide inférieur, & on en verſe dans une cornue pareillement remplie du ſel muriatique bien ſec, autant que les interſtices de ce ſel en peuvent abſorber. Enfin en obſervant que le récipient ſoit ample & qu'il ſoit plongé dans de l'eau & refroidi inceſſamment avec de la glace ou de la neige, l'éther par ce moyen eſt porté par une diſtillation bien ménagée jusqu'au plus haut degré de ſa pureté, en ſe ſéparant de ſon dernier reſte de l'eſprit de vin & en dépoſant le ſel mentionné ci-deſſus, qui ſe trouve dans la cornue.

V.

Déſcription de la mine d'argent de Salairsk aux monts d'Altaï en Sibérie, avec une planche.

Par M. *B. I. F. Hermann*, pag. 348.

L'Auteur donne une déſcription fort détaillée de cette mine importante: elle eſt une des plus récentes aux monts d'Altaï & en même temps la plus abondante en minéral: elle en fournit une ſi grande quantité, que ſans doute elle ſera un jour la prémiere de toutes les mines altaïques, d'autant plus que la célébre mine de Zméof ſera bientôt épuiſée. Ce qui la rend, outre une foule de circonſtances

ſtances dont cette déſcription nous inſtruit, encore très intéreſſante pour l'étude minéralogique, c'eſt principalement ſon grand filon de ſpath peſant, qui eſt d'une puiſſance & d'une continuation ſi conſidérable, qu'il n'y en a point d'exemple.

VI.

Epilobii ſpecies nova deſcripta.

Ab *Johanne Lepechin*, pag. 370.

M. Laxmann le fils, en abordant dans ſon voyage au Japan quelques isles ſituées aux environs de Kamtſchatka, en décrivit non ſeulement les habitans, mais y cueillit encore des ſémences de toutes les plantes qu'il put obtenir: Cette collection ayant été ſemée dans le jardin botanique de l'Académie des Sciences, l'Auteur en obtint la plante dont il donne ici la déſcription & qu'il nomme d'après ſon lieu natal où elle a été trouvée *Epilobium Kamtſchaticum*. Cette eſpéce de plante appartient à la ſoudiviſion de Linné, où les étamines ſont inclinées vers le Piſtille, & elle ſe diſtingue par ſes feuilles lancellées entieres ſans aucune dentelure, dont les tiges alternent & les branches ſont oppoſées.

VII.

Saponis Lapponici praeparatio et uſus.

Auctore *N. Ozeretskovsky*, pag. 372.

L'Auteur expoſe la méthode que les Lappons ruſſes emploient dans la préparation de leur ſavon. Ils brulent

à

à l'air libre différens bois & leurs écorces, jusqu'à ce que leurs cendres ſoient fondues en maſſes ſolides : Enſuite ils font cuire une partie de ces cendres ſans les dépurer, dans deux parties d'eau qu'ils changent trois fois, dont ils obtiennent trois différentes leſſives des mêmes cendres. Ce ſont ces leſſives qu'ils employent à la préparation du ſavon, en prenant deux parties ſur une ſeule partie de la graiſſe de poiſſon, qu'ils rétirent des eſtomacs & des foies des poiſſons, en expoſant ces viſcères à la chaleur du Soleil ou au feu. Ce ſavon a une couleur noirâtre & ſa conſiſtance eſt ou ſolide ou fluide. Il eſt ſi efficace, qu'il rend les poils gris des rennes d'une blancheur éblouïſſante.

VIII.

Notice ſur les Charbons de terre dans les environs de Kousnetz en Sibérie avec deux planches.

Par M. *B. F. I. Hermann*, pag. 376.

M. Hermann, dans ſes voyages aux monts Altaï, a découvert en 1793 aux bords de la riviere Innée, trois couches d'une étendue conſidérable de charbons de terre très bons, dont il donne la déſcription, qui doit être d'autant plus intéreſſante pour les amateurs de l'hiſtoire naturelle, qu'elle fait connoître en même temps différens endroits en Sibérie, où il y a des Pſeudo-volcans éteints, dont l'origine étoit l'embraſement de ce même charbon de terre.

IX.

IX.

Obſervations, ſur quelques ſpaths fluors de Nertſchinsk.

Par M. *Baſile Sewergyne*, pag. 382.

La note que M. de Crell a inſérée dans ſes annales chymiques ſur la pierre nommée *Pyroémeraude*, avoit engagé notre Académicien à faire les mêmes épreuves ſur les différentes ſortes de ſpaths fluors de Sibérie. Il en rapporte ici les réſultats. Il termine ſes obſervations par une expoſition des caractères extérieurs des diverſes eſpèces de la pierre nommée Pyro-émeraude, & de la maniere de repeter pluſieurs fois l'expérience de ſa phoſphorescence. M. Sewergyne en attribue au reſte la cauſe à un certain degré d'oxydation du fer qui y eſt contenu.

X.

Mirabiles Ialapae hybridae.

Auctore *I. T. Koelreuter*, pag. 389.

M. Koelreuter continue de communiquer à l'Académie les réſultats de ſes expériences faites en différentes années pour produire des plantes mulets par le mélange de diverſes eſpèces d'une même plante; & il rapporte dans ce preſent mémoire celles qu'il a obtenues par l'accouplement de quelques eſpèces du Jalap. Mais pour donner une idée plus claire de ces mulets, il commence par décrire les trois eſpèces du Jalap dont il s'eſt ſervi dans

ſes expériences, ſavoir le jalap vulgaire, le jalap à longues fleurs & le jalap fourché: enſuite il paſſe à la déſcription des mulets nés par leurs accouplemens en diſtinguant ceux qui n'ont pas réuſſi. Au reſte il remet à une autre occaſion la déſcription des plantes tant naines que gigantesques qu'il a obtenues par ces mélanges.

XI.

Senecionis ſpecies nova deſcripta.

Ab *Joh. Lepechin*, pag. 400.

L'eſpèce de Sénec que l'auteur décrit ici eſt ſpontanée en Sibérie, & c'eſt par cette raiſon qu'il la nomme ſénec de Sibérie. Elle appartient à la quatrième ſousdiviſion de Linné, parceque ſes fleurs ſont radiées, les rayons ouverts, & que ſes feuilles ne ſont pas diviſées.

XII.

Mémoire ſur la manière la plus facile & la plus prompte de préparer l'acide nitrique le plus pur & le plus fort.

Par M. *Jacq. Zacarof*, pag. 403.

L'Auteur commence par rapporter la méthode ordinaire de préparer l'acide nitreux; & fait voir l'impoſſibilité d'obtenir, en ſuivant cette méthode, un acide fort. Enſuite il propoſe de prendre un peu plus de nître que l'acide ſulphu-

phurique ne peut décompoſer, &, après que pendant la diſtillation la moitié de l'acide nitreux eſt paſſé, de changer le récipient & d'y ſubſtituer un autre qui ſoit net, dans lequel on obtiendra alors un acide nitreux, qui ne contient plus ni acide vitriolique ni acide muriatique, d'où l'on dépurera enfin par une ſeconde diſtillation un acide nitreux plus pur & plus ſort que par la maniere ordinaire. M. Zacarof calcule enſuite, en ayant égard à la quantité & à la peſanteur ſpécifique des matieres employées, combien on peut obtenir de cet acide nitreux, & quelle ſera ſa peſanteur ſpécifique.

XIII.

Notice ſur une nouvelle eſpèce de Granit, trouvée aux côtes la mer blanche.

Par M. *le Conſ. Privé de Nartof*, pag. 415.

Le lieu natal de ce Granit remarquable eſt une isle eſcarpée nommée Raab, à huit cent verſtes des frontieres réunies, Ruſſe, Suédoiſe & Danoiſe, ſituée au 63 d gré de latitude, d'où il eſt porté en formes roulées ſur les côtes Ruſſes de la mer blanche avec les maſſes de glace qui s'y jettent. Souvent il eſt couvert de polypes, & ſes parties conſtituantes ſont du quartz blanc & griſatre, du mica noir, du feldſpath blanchatre en petite quantité, des grenats rouges polyèdres & des cryſtaux bleuâtres ou un peu verdâtres qui ont quelque reſſemblance avec la cyanite, mais qui en différent eſſentiellement.

XIV.
Mémoire ſur l'exploitation des mines de l'Empire de Ruſſie.

Par M. *B. F. J. Herrman*, pag. 418.

Après avoir donné une notice ſur les anciens travaux minéralogiques en Ruſſie, l'Auteur de ce mémoire paſſe à l'époque où l'exploitation d'aujourd'hui a recommencé ſous Pierre le Grand. Il rapporte les tableaux du produit de chaque année qu'ont fourni les mines d'or & d'argent, & une table de la production annuelle des mines de cuivre & de fer, lesquels font voir que du commencement de ce ſiecle jusqu'en 1794, on a tiré des mines de Sibérie I.) de celles de Beroſof 178 poudes 18 livres $41\frac{1}{16}$ ſolotnics d'or. II.) de celles de Kolyvan 32081 P. 27 L. $40\frac{1}{3}$ S. d'argent, dans lequel il y avoit environ 1000 poudes d'or: & III.) de celles de Nertſchinsk 13972 P. 10 L. $4\frac{1}{2}$ S. d'argent, où il y avoit environ 200 poudes d'or. Le produit en cuivre monte annuellement à 150.000 poudes, & celui de fer à $4\frac{1}{2}$ millions de poudes. La valeur de tous les métaux tirés chaque année des mines de l'Empire de Ruſſie fait aujourd'hui presque la ſomme de onze millions de Roubles.

XV.
Sur une nouvelle méthode de cryſtalliſer les régules d'or & d'argent.

Par *M. le Comte Apollos de Mouſſin Pouſchkin*, pag. 434.

L'Auteur rapporte dans ce mémoire de nouvelles méthodes qu'il a trouvées par un heureux hazard, pour ob-

obtenir à volonté des régules d'or & d'argent très ſenſiblement cryſtalliſés: il donne ici un détail du plus facile de ces procédés. Nous renvoyons le lecteur au mémoire même. La cryſtalliſation eſt prismatique & celle de l'argent vue à la loupe reſſemble beaucoup à l'argent nâtif réticulé du Potoſe. L'Auteur ayant joint à ſon mémoire des échantillons de ces régules ainſi cryſtalliſés, l'Académie les a fait deſſiner & graver tels qu'ils ſe préſentent tant à la vüe ſimple, qu'à l'oeil armé d'un microscope.

XVI.
Notice d'un cryſtal ſpathique jaune, qui double les objets, trouvé nouvellement en Ruſſie.

Par *M. le Conſ. Privé de Nartof*, pag. 437.

Ce ſpath a été trouvé dans les fentes d'une roche prés du village Sargouba ſur la rive du lac Jukſcha à 20 verſtes de Pétroſawodsk: il fermente avec les acides, il petille dans un certain degré de chaleur; & ſes autres propriétés lui aſſignent une placé inconteſtable parmi les ſpaths calcaires, dont il couſtitue une eſpèce transparente de couleur jaune. Au reſte il ſe trouve en maſſes aſſés conſidérables de pluſieurs pouces d'épaiſſeur qui ſouvent ſont couvertes d'une écorce ſpathique opaque & rougeâtre, qui doit être briſée, & même la maſſe entiere caſſée, pour avoir un beau rhombe de Spath jaune avec toutes ſes propriétés mentionnées.

CLAS-

CLASSE ASTRONOMIQUE ET MÉTÉOROLOGIQUE.

I.

De perturbatione motus Urani. Diſſertatio I.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 441.

II.

De perturbatione motus Urani. Diſſertatio II.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 464.

L'énorme différence qui ſe trouve entre les équations de la nouvelle planète, calculées par de célèbres Aſtronomes, avoit engagé M. l'Académicien Schubert à ſoumettre la théorie des perturbations d'Uranus à un nouveau calcul complet & rigoureux d'autant plus que les Aſtronomes n'avoient jusqu'alors calculé que quelques équations des plus conſidérables. Pour ces calculs qui font l'objet de deux mémoires, M. Schubert s'eſt ſervi de la méthode ingénieuſe employée par M. de la Place dans ſa Théorie de Jupiter & de Saturne; il a fait uſage des élémens des planètes, qui ſe trouvent dans la nouvelle édition de l'Aſtronomie de M.

M. de la Lande; il a employé les maſſes des planètes telles que M. de la Grange les a calculées, à l'exception de celle d'Uranus, qu'il a déduite du mouvement de ſes deux ſatellites jusqu'alors connus. Par ces moyens il a trouvé les réſultats ſuivans, en nommant ♅, ♄, ♃, les longitudes moyennes de ces planètes, & π, π', π'', celles de leurs aphélies.

Mouvement elliptique.

Équation du centre $= - 5° 20' 53''$ ſin $(♅ - \pi) + 9' 21'', 3$ ſin $2 (♅ - \pi) - 22'', 75$ ſin $3 (♅ - \pi) + 1'', 3$ ſin $4 (♅ - \pi)$.

Équation du rayon vecteur $= 19, 204553 + 0, 894818$ coſ$(♅ - \pi)$ $- 0, 020873$ coſ $2 (♅ - \pi) + 0, 0007332$ coſ $3 (♅ - \pi)$ $- 0, 000030$ coſ $4 (♅ - \pi)$.

Perturbations produites par l'action des autres planetes.

I. Équations ſéculaires.

1.) Changement annuel de l'excentricité d'Uranus, en parties de ſa moyenne diſtance au Soleil $= - 0, 0000002625$.

2.) Mouvement annuel de ſes apſides, par rapport aux étoiles fixes $= + 2'', 4537$; relativement aux équinoxes $= + 52'', 7$.

3.) Véritable changement annuel de l'inclinaiſon de ſon orbite ſur le plan de l'orbite de la terre en 1800, ſuppoſé fixe $= - 0'', 0492$.

4.) Véritable mouvement annuel des noeuds ſur le même plan, par rapport aux étoiles fixes $= + 2'', 7059$.

5.)

5.) Changement apparent de l'inclinaiſon ſur le plan de l'écliptique mobile, par an = + 0″, 0333.

6.) Mouvement apparent des noeuds ſur le même plan, par rapport aux étoiles = − 43″, 4241; par rapport aux équinoxes = + 6″, 83.

II. Équations périodiques.

1.) Équation du rayon vecteur
= + 0, 008712 + 0, 003547 coſ. (♄ — ♅)
+ 0, 000407 coſ 2 (♄ — ♅) + 0, 000089 coſ 3 (♄ — ♅)
+ 0, 000026 coſ 4 (♄ — ♅) + 0, 004889 coſ (♃ — ♅)
+ 0, 000024 coſ 2 (♃ — ♅) + 0, 000097 coſ (♄ — π)
+ 0, 000029 coſ (♄ − π′) + 0, 001617 coſ (♅ − ♄ − π)
— 0, 006188 coſ (♅ − ♄ − π′) − 0, 000077 coſ (♄ − ♅ − π′)
− 0, 000192 coſ (♅ − 2 ♄ − π) + 0, 000135 coſ (♅ − 2 ♄ − π′)
− 0, 000039 coſ (♅ − 3 ♄ − π) + 0, 000220 coſ (♃ − π)
− 0, 000232 coſ (2 ♅ − ♃ − π) + 0, 000025 coſ (♅ − ♃ − π″)
− 0, 000117 coſ (2 ♃ − ♅ − π″).

2.) Équation de la longitude moyenne
= Æ = + 156″, 11 coſ (3° 37′ 55″ + 3 ♅ − ♄).

3.) Équation de la longitude vraie d'Uranus dans ſon orbite =
+ 23″ ſin (♄ − ♅ + 17° 20′) − 4″, 22 ſin 2 (♄ − ♅)
− 0″, 86 ſin 3 (♄ − ♅) + 52″, 27 ſin (♃ − ♅)
+ 1″, 41 ſin (♄ − π) − 147″, 42 coſ (2 ♅ − ♄ + 18° 1′)
+ 2″, 46 ſin (2 ♄ − 3 ♅ + π) − 1″, 64 ſin (2 ♄ − 3 ♅ + π′)
− 1″, 21 ſin (♃ − π) − 6″, 07 ſin (♃ − 2 ♅ + π)
− 1″, 20 ſin (3 ♃ − ♅ − π″) + 0″, 88 coſ (3 ♅ − ♄ + 30° 40′).

L'é-

L'équation Æ, la plus conſidérable de toutes les équations de cette planete, eſt produite par l'action de Saturne, & dépend de la ſeconde dimenſion des excentricités & des inclinaiſons d'Ouranus & de Saturne. Comme elle a une période de 569 ans, elle ſe préſentera aux obſervateurs comme une équation ſéculaire du moyen mouvement. Il faut donc la regarder comme telle, c'eſt à dire, il faut corriger le lieu moyen d'Ouranus par cette équation, avant que de l'employer dans les argumens des autres équations de la longitude vraie.

M. Schubert a encore découvert une équation ſemblable de la longitude de Saturne, produite par la réaction d'Ouranus, qui a la même période & le même argument. Elle eſt = — 34″, 3 coſ (3° 37′ 55″ + 3 ♅ — ♄).

Ces deux planetes préſentent donc un phénomène ſemblable à celui qui a lieu entre Saturne & Jupiter, & qui avoit fait ſoupçonner aux aſtronomes, que le moyen mouvement de ces deux planetes étoit ſujet à une équation ſéculaire, comme celui de la Lune. Le moyen mouvement d'Ouranus eſt accéléré, tandis que celui de Saturne eſt retardé, & vice-verſa. Le mouvement apparent d'Ouranus eſt plus lent que le véritable mouvement moyen, depuis l'an 1447 jusqu'en 1732, & depuis 2016 jusqu'en 2301; il eſt au contraire plus vite depuis 1732 jusqu'en 2016; il eſt égal au moyen mouvement en 1163, 1447, 1732, 2016, 2301, &c. Le mouvement apparent eſt le plus lent en 1305, 1874, & le plus vite en 1580 & 2158; de ſorte qu'il eſt accéléré depuis l'an 1305 jusqu'en 1589 & depuis

1874 jusqu'en 2158, tandis qu'il eſt retardé depuis l'an 1589 jusqu'en 1874. &c.

III.

Occultationes trium ſtellarum fixarum a Luna, Petropoli anno 1796 in ſpecula domeſtica obſervatae.

Auctore *Petro Inochodzow*, pag. 484.

L'Auteur commence par expoſer la latitude de ſon obſervatoire, qui eſt le réſultat moyen de 90 obſervations de hauteurs méridiennes du Soleil. Cette latitude qu'il trouve de 59° 54′ 54″$\frac{2}{3}$, eſt ſelon lui, exacte à environ 30 ſecondes près.

Il fait enſuite mention, en peu de mots, des principaux obſtacles que la nature du climat, qu'il habite, oppoſe aux obſervations aſtronomiques. Après quoi il donne le tems vrai de ſes obſervations tel qu'il ſuit.

Le $\frac{3}{15}$ Mars.

Immerſion de δ′ du Taureau à	9ʰ.	16′.	30″½.
Emerſion de δ′ du Taureau à	10.	7.	46½.
Immerſion de δ² du Taureau à	9.	39.	59.
Emerſion de δ² du Taureau à	10.	38.	4.

Le $\frac{14}{25}$ Août.

Immerſion de δ′ du Taureau à	11ʰ.	45′.	33″½.
Emerſion de δ′ du Taureau à	12.	34.	50.

en

en prévenant; que rélativement à cette derniere obſervation il n'y a pas la moindre incertitude dans la détermination du tems, tandis qu'à l'égard des précédentes il peut bien y avoir une incertitude de quelques ſecondes, par les raiſons qu'on peut voir expoſées dans le mémoire.

IV.

Eclipſes ſatellitum Jovis, Petropoli anno 1796 in ſpecula domeſtica, obſervatae.

Auctore *Petro Inochodzow*, pag. 488.

Ce mémoire renferme quatorze obſervations d'éclipſes, tant du premier que du ſecond ſatellite de Jupiter. faites dans les mois de Juin, Juillet, Août, Septembre, Octobre & Novembre, & n'eſt pas susceptible d'extrait.

V.

Obſervations de l'éclipſe du Soleil du 3. Avril 1791. faite à l'Obſervatoire du College académique de Mitau en Courlande; avec la détermination de la longitude géographique du dit obſervatoire, réſultante de différentes obſervations.

Par *M. Beitler*, pag. 492.

Monſieur Beitler commence par rapporter les obſervations de cette Eclipſe qu'il a faites, par un ciel pur & ſerein, en employant une lunette achromatique, de Dollond de trois pieds & demi de foyer, à grande ouverture & groſ-

ſiſſant 80 fois; il croit pouvoir, ſans craindre une erreur de plus de deux ſecondes, fixer le moment du contact des bords au commencement à $2^h\ 27'\ 58'',4$ & celui du contact des bords à la fin de l'éclipſe à $4^h\ 55'\ 44'',1$ tems vrai. L'auteur en conclue (en employant les Tables du Soleil de M de Zach, & celles de la Lune qui ſe trouvent dans la troiſième édition de l'Aſtronomie de M. de Lalande) l'inſtant de la conjonction du Soleil & de la Lune à [illegible]^h 10′ 53″ 8 tems vrai. La longitude du Soleil & de la Lune en conjonction étant de $0^s\ 13°\ 41'\ 54''$, [illegible]. La latitude de la Lune en conjonction $0°\ 45'\ 7''$, [illegible], l'erreur des tables en longitude + 30″, 6 & en latitude — 9″, 4.

Cet inſtant de la conjonction du Soleil & de la Lune comparé avec celui qui a été conclu des obſervations de la même éclipſe, faites à Paris, donne $1^h\ 25'\ 31'',8$ pour la différence des méridiens entre les obſervatoires de Paris & de Mitau. M. Beitler croit pouvoir s'en tenir à ce réſultat qui ſe trouve d'ailleurs entierement conforme à ce qu'il a conclu de pluſieurs autres obſervations.

VI.

Obſervation de l'obliquité de l'écliptique, dans le ſolſtice d'été 1796, faite à l'obſervatoire du Collège académique de Mitau en Courlande.

Par *M. Beitler*, pag. 499.

On trouve dans ce Mémoire des hauteurs méridiennes du Soleil, des 1[illegible], 19 & 21 Juin. M. Beitler après avoir ex-

expoſé les précautions qu'il a priſes, pour procurer à ſes obſervations toute l'exactitude à laquelle il pouvoit aſpirer, eu égard aux dimenſions de l'inſtrument qu'il y a employé; réduit ces hauteurs méridiennes à celles qui devoient avoir lieu le jour du ſolſtice, en tenant compte de l'état de l'atmosphère: d'où il conclue en employant pour la hauteur de l'équateur à Mitau 33° 20′ 53″, 3, que l'obliquité moyenne de l'écliptique, au ſolſtice d'été de 1796, étoit de 23° 27′ 56″, 3; laquelle comparée à celle qui eut lieu en 1750 ſavoir 23° 28′ 18″, 0 indique dans cet angle, une diminution ſéculaire de 47″.

VII.

Obſervations des éclipſes des ſatellites de Jupiter faites en 1796 à Mitau en Courlande à l'obſervatoire du Collège académique.

Par *M. Beitler*, pag. 503.

Ce Mémoire renferme quatorze obſervations, d'éclipſes des ſatellites de Jupiter, faites dans les mois de Juin, Juillet Août, Septembre & Octobre, dont chacune a été comparée avec les nouvelles tables de M. de Lambre. Ces obſervations ſont expoſées en un tableau dans lequel on voit les réſultats de l'obſervation & du calcul avec des notes qui font connoître les différentes circonſtances qui peuvent influer ſur le jugement qu'on doit porter par rapport à la qualité de ces obſervations & ſur le plus ou moins de confiance qu'elles peuvent mériter.

Ce

Ce Mémoire eſt terminé par une obſervation d'éclipſe d'Algol, dont l'auteur détermine le moment de la plus grande phâſe le 2 Novembre 1796 à $6^h. 40'$ tems moyen à Mitau, tandis que les tables de M. Wurm l'anoncent pour $6^h. 39'. 14''$, d'où il infère que la période de $2^j. 20^h. 48'. 59''$, qui ſert de fondement à ces tables, eſt fort éxacte.

VIII.

Occultation de ε du Capricorne, obſervée à l'Obſervatoire de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg le 7 Août 1797.

Par M. *l'Abbé Henry*, pag. 507.

Ce Mémoire contient l'obſervation & le calcul de l'occultation de ε du Capricorne qui a eu lieu le 7 Aout 1797. L'auteur n'a pu obſerver que l'immerſion de l'étoile, un brouillard ſurvenu presque tout-à-coup lui ayant empeché de voir l'émerſion. L'Immerſion s'eſt faite à $11^h. 12'. 26''9$ tems moyen. Il en a conclu l'inſtant de la conjonction de la Lune avec l'étoile à $11^h. 15'. 30''7$. tems moyen. La longitude des deux aſtres en conjonction étant de $10^s. 17°. 23'. 41''9$, & la latitude (auſtrale) de la Lune de $4°. 13'. 46''3$.

IX.

Determinatio differentiae meridianorum Petropolis, Gothae, et Lilienthal, ex occultatione a Luna binarum ſtellarum δ Tauri.

Auctore *Steph. Rumovsky*, pag. 511.

Les occultations des étoiles par la Lune fourniſſent le

le plus ſur moyen de déterminer la différence des méridiens entre les lieux où elles ont été obſervées. C'eſt dans cette vue que l'auteur de ce mémoire a jugé à propos de ſoumettre au calcul les obſervations qui lui ſont parvenues des occultations des étoiles δ′ & δ″ du Taureau par la Lune faites en 1796 le $\frac{3}{14}$ de Mars à l'obſervatoire de Gotha par M. le Major de Zach & à Lilienthal par M. le Grand Baillif Schröter, pour en chercher la différence des méridiens entre ces deux endroits & l'obſervatoire académique de Saint-Pétersbourg. En ſuppoſant la correction du démi-diamètre de la Lune = − 2″ & de la parallaxe équatorienne = − 1″, l'une & l'autre ſouſtractive, il en conclud la différence des méridiens entre St. Pétersbourg & Gotha de 1^h. 18′. 22″. & entre St. Pétersbourg & Lilienthal de 1^h. 25′. 40″.

X.

Conjonction de Saturne & de la Lune, déduite de l'occultation de cette planète par la Lune obſervée à la tour aſtronomique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg le 2 Avril 1797.

Par M. *l'Abbé Henry*, pag. 520.

Ce mémoire offre l'obſervation & le calcul de l'occultation de Saturne par la Lune arrivée le 2 Avril 1797. Suivant cette obſervation, le centre de Saturne s'eſt plongé ſous le diſque de la Lune à 12^h. 36′. 59″3. & en eſt ſorti à 13^s. 21′. 58″8, tems moyen. Il réſulte de cette obſervation

vation que Saturne & la Lune ont été en conjonction à $12^h. 14'. 2''7$ tems moyen, leur longitude étant alors de $2^s. 22°. 32'. 58''2$ & la latitude de Saturne de $0°. 57'. 37'',7$ auſtrale.

XI.

Eſſais ſur la détermination de la longueur du pendule ſimple, ſous la latitude de Saint-Pétersbourg.

Par M. *l'Abbé Henry*, pag. 524.

La détermination du pendule ſimple étant une opération fort délicate & qui demande beaucoup de préciſion dans les obſervations qui y ſont rélatives; on ne peut gueres ſe flatter d'obtenir une éxactitude rigoureuſe dans le réſultat, ſi on n'y a pas employé pluſieurs eſſais faits avec toute l'attention néceſſaire & des moyens ſuffiſans. Cette expérience eſt donc du nombre de celles qu'on ne peut pas trop répéter & qu'il eſt toujours utile de répéter, ſurtout lorsqu'on acquiert de nouveaux moyens de le faire avec plus de ſuccés. C'eſt dans cette vue que M. Henry a jugé à propos de s'occuper de cet objet, lorsque l'Académie a été en poſſeſſion de l'appareil fort ſimple qu'elle a fait éxécuter par M. Schroeter, pour cet effet. L'auteur après avoir donné une idée de l'inſtrument & en avoir fixé les dimenſions, expoſe avec aſſez de détails les précautions qu'il a employées à s'en ſervir. Le réſultat de ſon expérience eſt que la longueur du pendule ſimple eſt, à St. Pétersbourg, de 441,08 lignes du pieds de Paris, ſans aucune réduction.

XII.

XII.

Obſervation de la déclinaiſon de l'éguille aimantée, faite à Saint Pétersbourg le 23 Aouſt 1797.

Par M. *l'Abbé Henry*, pag. 531.

Depuis quelques années, l'obſervation de la déclinaiſon de l'éguille aimantée n'avoit point été faite à St. Pétersbourg, faute d'avoir à l'Académie un lieu propre à y tracer une méridienne. M. Henry, en ayant tracé une fort exacte à l'obſervatoire, voulut en faire uſage pour cet effet; mais le toît de fer du batiment y mit un obſtacle, & il fut contraint d'en tracer une autre, en plein air, à peu de diſtance de l'obſervatoire, au moyen de laqu'elle il trouva, au mois d'Août 1797, la déclinaiſon de l'éguille à l'oueſt de 9 degrés 12 minutes.

XIII.

Extrait des obſervations météorologiques faites à Pyſchminsk près de Cathérinenbourg aux monts Ourals en Sibérie, en l'année 1791. ſuivant le nouveau ſtile.

Par M. *B. F. I. Hermann*, pag. 533.

Pour comparer la temparature de Pyſchminsk ſitué ſous 56°. 28′. de latitude & 79°. 12′. de longitude, avec celle de la même année obſervée à St. Pétersbourg & inſérée dans le IX Tom. des nouveaux Actes, il ſuffit de donner ici

les momens ſuivans, réduits aux méſures employées dans les obſervations de St. Pétersbourg.

La plus grande hauteur du Baromètre 27. 42 le 22 — 24 Janvier pendant 56 heures de ſuite

Sa plus petite hauteur 26. 08 le 6 Mars, 30 Juin & 3 Juillet

La variation totale 1. 34 & le milieu arithmétique 26. 75

La hauteur moyenne, dans toute l'année 26, 67, en été 26. 75 & en hyver 27. 13.

Au reſte le Baromètre n'eſt pas ſujet à de grandes variations & ſe fixe ſouvent des jours & des ſémaines entieres au même point.

Le plus grand froid 210°. de Délisle ou de 32[d.] de Réaumur, le 23 Janvier.

La plus grande chaleur 108°, 8 de Délisle ou de 22[d.] de Réaumur le 19. 20. 24. 26. 28 Juin.

Il y a eu 148 jours de gelée continuelle & 170 jours où il n'a gélé point du tout. La derniere gelée a eu lieu le 15 Mai, & il a recommencé à geler le 27 Septembre après un intervalle de 135 jours.

La rivière Pyſchma debacla le 24 Avril, & elle fut repriſe le 20 Octobre après un intervalle de 179 jours; elle debacla de nouveau & fut repriſe pour la ſeconde fois le 3 Novembre.

Le

Le vent dominant a été celui de l'Oueſt: il y a eu 43 jours de calme, 68 jours de vent fort & 25 jours de de vent très-fort.

Enſuite 53 jours de ciel entièrement ſerein & 104 jours de ciel entièrement couvert: des brouillards en 35 jours: pluie en 101, neige en 77, grèle en 3 jours. Il tonnoit en 24 jours.

La dernière neige tomba le 22 May. Il recommença à neiger le 1 Octobre après un intervalle de 132 jours.

XIV.

Extrait des obſervations météorologiques faites à Saint Pétersbourg, Année 1793.

Par M. *Euler*, pag. 543.

XV.

Extrait des obſervations météorologiques faites à Moſcou, Année 1793.

Par M. *le C. d'Etat Stritter*, pag. 563.

Ces obſervations ſont réduites au nouveau ſtile comme le ſont auſſi celles des deux extraits précédens: la comparaiſon des hauteurs moyennes du Baromètre donneroit d'après la regle de M. Deluc une hauteur d'environ 95 toiſes, dont Moscou ſeroit plus élévée que St. Pétersbourg, ſi d'ailleurs on

on pouvoit ſe fier à une exacte correſpondance des inſtrumens employés aux deux endroits.

Le plus grand froid a été à Moscou de 7° de Délisle plus grand qu'à St. Pétersbourg & la plus grande chaleur de 5° plus grande au premier endroit qu'au dernier. Il y a eu à Moscou 30 jours où le froid a ſurpaſſé 180°, tandis qu'il n'y en a eu à St. Pétersbourg que 14. Mais auſſi y-a-t'il eu 20 jours où la chaleur a ſurpaſſé 110°, tandis qu'il n'y en a eu à St. Pétersbourg que 8. Enfin ce qui tempere encore la rigueur du climat de Moscou, c'eſt que la durée de l'hyver ou l'intervalle entre la premiere gélée & la derniere y eſt de 8 jours plus court qu'à St. Pétersbourg.

Le vent dominant a été à Moscou celui du Nord & à St. Pétersbourg celui de l'Oueſt.

MA-

MATHEMATICA.

ET

PHYSICO-MATHEMATICA.

DE
FORMVLIS DIFFERENTIALIBVS
SECVNDI GRADVS,
QVAE INTEGRATIONEM ADMITTVNT.

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhib. die 24 April. 1777.

§. 1.

Inter tales formulas differentiales ſecundi gradus, quae integrationem admittunt, imprimis notatu digna eſt haec formula: $\frac{(x\partial x + y\partial y)(\partial y\partial\partial x - \partial x\partial\partial y)}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}$, quae, ſi x et y deſignent coordinatas orthogonales lineae curvae, oritur, ſi elementum $x\partial x + y\partial y$ dividatur per radium oſculi huius curvae; quandoquidem conſtat iſtius formulae integrale eſſe $\frac{y\partial x - x\partial y}{\surd(\partial x^2 + \partial y^2)}$, quemadmodum calculum inſtituenti, dum huius formulae differentiale quaeritur, facile patebit. Cum igitur haec integratio neutiquam ſit obvia, et plures ambages poſtulet, hoc argumentum hic accuratius pertractare conſtitui,

ſtitui, unde intelligi poterit, quemadmodum plures aliae huiusmodi formulae inveniri queant, quae pariter integrationem admittant.

§. 2. Quod quo facilius fieri poſſit, differentialia ſecundi gradus ex calculo eliminemus, quod commodiſſime fiet, ponendo $\partial y = p \partial x$, ita ut loco differentialium ſecundorum in calculum introducatur iſta nova quantitas $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, quippe quae rationem differentialium primorum continet. Tum igitur erit

$$x \partial x + y \partial y = \partial x (x + p y) \text{ atque}$$
$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2 (1 + p p),$$

ideoque denominator formulae propoſitae fit

$$(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}} = \partial x^3 (1 + p p)^{\frac{3}{2}};$$

denique pro altero numeratoris factore habetur

$$\partial y \partial \partial x = p \partial x \partial \partial x, \text{ et ob}$$
$$\partial \partial y = p \partial \partial x + \partial p \partial x, \text{ erit}$$
$$\partial x \partial \partial y = p \partial x \partial \partial x + \partial p \partial x^2$$

ſicque alter ille factor erit

$$\partial x \partial \partial x - \partial x \partial \partial y = - \partial p \partial x^2,$$

quibus ſubſtitutis formula propoſita hanc induet formam:

$$-\frac{\partial p (x + p y)}{(1 + p p)^{\frac{3}{2}}}, \text{ cuius ergo integrale erit}$$

$$\frac{y \partial x - x \partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{y - p x}{\sqrt{(1 + p p)}}$$

quippe cuius differentiale ſuperiorem praebet formulam.

§. 3.

§. 3. Cum igitur facta hac ſubſtitutione in formulam differentio - differentialem unicum ingrediatur differentiale ∂p, ſic in genere contemplabor hanc formulam: $V \partial p$, inquiſiturus, cuiusmodi valores iſti litterae V tribui debeant, ut formulae $V \partial p$ integrale exhiberi queat; ubi quidem evidens eſt, hanc quantitatem V certam eſſe oportere functionem trium variabilium x, y et p, quae ergo quomodo comparata eſſe debeat, ut integratio ſuccedat, hic accuratius inveſtigare conſtitui.

§. 4. Ac primo quidem ex iis, quae olim circa integrabilitatem formularum differentialium altiorum ordinum tradidi, criteria haud difficulter exhiberi poterunt, unde dignoſci queat, utrum talis formula $V \partial p$ integrationem admittat nec ne? Tum temporis autem contemplatus ſum talem formam $\int Z \partial x$, ubi poſitis $\partial y = p \partial x$; $\partial p = q \partial x$; $\partial q = r \partial x$; $\partial r = s \partial x$; etc. littera Z denotabat functionem ex litteris x, y, p, q, r, s, etc. utcunque compoſitam, atque oſtendi, quoties haec formula $\int Z \partial x$ fuerit integrabilis, tum ſemper fore

$$0 = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) - \frac{1}{\partial x} \partial . \left(\frac{\partial Z}{\partial p}\right) + \frac{1}{\partial x^2} . \partial \partial . \left(\frac{\partial Z}{\partial q}\right)$$
$$- \frac{1}{\partial x^3} \partial^3 . \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right) + \frac{1}{\partial x^4} \partial^4 . \left(\frac{\partial Z}{\partial s}\right) \text{ etc.}$$

Sin autem iſta quantitas non ſponte nihilo evadat aequalis, tum iſta aequatio eam relationem inter x et y exprimit, pro qua formula integralis $\int Z \partial x$ maximum minimumve valorem nanciſcatur.

§. 5. Vt igitur formulam $\int V \partial p$, quam hic conſideramus, ad iſtam formam: $\int Z \partial x$ reducamus, ſtatuamus $\partial p = q \partial x$, ut formula noſtra evadat $V q \partial x$, ideoque $Z = V q$; ubi notetur, quantitatem V tantum ternas litteras x, y et p com-

complecti, quo obſervato erit $(\frac{\partial z}{\partial y}) = (\frac{q \partial V}{\partial y})$, deinde $(\frac{\partial z}{\partial p}) = (\frac{q \partial V}{\partial p})$ et $(\frac{\partial z}{\partial q}) = V$, ſicque criterium integrabilitatem indicans erit

$$o = (\frac{q \partial V}{\partial y}) - \frac{1}{\partial x} \partial . (\frac{q \partial V}{\partial p}) + \frac{1}{\partial x^2} \partial \partial . V$$

quam aequationem etiam ita referre licet:

$$o = q (\frac{\partial V}{\partial y}) - \frac{1}{\partial x} \partial . [q (\frac{\partial V}{\partial p}) - \frac{1}{\partial x} \partial V],$$

tum vero etiam, ob $q \partial x = \partial p$, hac ratione ea repraeſentari poteſt:

$$o = \partial p (\frac{\partial V}{\partial y}) - \frac{1}{\partial x} \partial . [\partial p (\frac{\partial V}{\partial p}) - \partial V].$$

§. 6. Cum igitur in genere per huiusmodi characteres iam ſatis uſu receptos ſit

$$\partial V = \partial x (\frac{\partial V}{\partial x}) + \partial y (\frac{\partial V}{\partial y}) + \partial p (\frac{\partial V}{\partial p})$$

hoc valore ſubſtituto criterium deſideratum hac exprimetur ratione:

$$o = \partial p (\frac{\partial V}{\partial y}) + \frac{1}{\partial x} \partial . [\partial x (\frac{\partial V}{\partial x}) + \partial y (\frac{\partial V}{\partial y})]$$

quae ergo aequatio continet criterium deſideratum; ita ut, quoties iſta formula revera nihilo evadit aequalis, tum ſemper certi eſſe queamus, iſtam formulam propoſitam $V \partial p$ eſſe integrabilem.

§. 7. Quoniam V per hypotheſin eſt functio involvens has tres variabiles x, y et p, ſit differentiationem more ſolito inſtituendo

$$\partial V = M \partial x + N \partial y + P \partial p$$

atque criterium continebitur in hac aequatione:

$$o = N \partial p + \partial . (M + N p)$$

quae

quae porro evolvitur in hanc:

$$0 = 2 N \partial p + \partial M + p \partial N.$$

Cuius vis quo clarius perſpiciatur, applicemus iſtud criterium ad formulam initio propoſitam $+\frac{\partial p (x + p y)}{(1 + p p)^{\frac{3}{2}}}$, ubi cum ſit $V = \frac{x + p y}{(1 + p p)^{\frac{3}{2}}}$, ſumta ſola x variabili, reperitur $M = \frac{1}{(1 + p p)^{\frac{3}{2}}}$, ſumta autem ſola y variabili, fiet $N = \frac{p}{(1 + p p)^{\frac{3}{2}}}$; hinc ergo erit

$$\partial M = -\frac{3 p \partial p}{(1 + p p)^{\frac{5}{2}}} \text{ et } \partial N = \frac{(1 - 2 p p) \partial p}{(1 + p p)^{\frac{5}{2}}}$$

quibus valoribus ſubſtitutis, quia eſt

$$1.\ 2 N \partial p = \frac{2 p \partial p}{(1 + p p)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 p \partial p (1 + p p)}{(1 + p p)^{\frac{5}{2}}},$$

$$2.\ \partial M = -\frac{3 p \partial p}{(1 + p p)^{\frac{5}{2}}},$$

$$3.\ p \partial N = \frac{p \partial p (1 - 2 p p)}{(1 + p p)^{\frac{5}{2}}}$$

harum formularum ſumma manifeſto ad nihilum redigitur. Ex quo intelligitur hanc formulam revera eſſe integrabilem, etiamſi integrale non conſtaret.

§. 8.

§. 8. Quoniam autem hic nobis potius eſt propoſitum in valores idoneos pro littera V ſumendos inquirere, quibus formula differentialis $V \partial p$ integrationem admittit, criterium inventum nullum uſum praeſtare poteſt; quam ob rem inveſtigationem noſtram a caſibus ſimpliciſſimis exordiamur, quibus formula nobis propoſita integrationem admittit, inter quos ſine dubio omnium ſimpliciſſimus eſt, quando V denotat quantitatem conſtantem. Sit igitur $V = 1$, eritque $\int \partial p = p$. Hinc autem porro ſequitur, ſi differentiale ∂p in functionem quamcunque iſtius integralis p, quae ſit $\Delta : p$, ducatur, tum ſemper hanc formulam $\partial p \Delta : p$ fore integrabilem, quod quidem per ſe eſt perſpicuum. Hic enim ſub voce integrabilitatis non tantum intelligimus quicquid algebraice exhiberi poterit, ſed in genere, quicquid per quantitates utcunque transcendentes aſſignari poteſt.

§. 9. Secundus caſus ſimpliciſſimus, quo formula $V \partial p$ integrabilis evadit, eſt quando $V = x$, ita ut formula differentialis ſit $= x \partial p$. Quoniam enim per reductionem notiſſimam ſit $\int x \partial p = p x - \int p \partial x$, ob $p \partial x = \partial y$ erit hoc integrale $\int x \partial p = p x - y$. Hinc igitur ſi $\Delta : (p x - y)$ denotet functionem quamcunque formulae $p x - y$ ſemper quoque integrationem admittet haec formula differentialis multo latius patens: $x \partial p \Delta : (p x - y)$, quippe quae, poſito $p x - y = V$, ob $\partial V = x \partial p$ induit hanc formam: $V \Delta : V$.

§. 10. Praeterea vero datur etiam tertius caſus ſimpliciſſimus, quo formula noſtra $V \partial p$ ſit integrabilis, qui oritur ponendo $V = \frac{y}{p p}$. Per eandem enim reductionem, qua eſt $\int t \partial u = t u - \int u \partial t$, ſumendo $t = y$ et $\partial u = \frac{\partial p}{p p}$, unde ſit

fit $\partial t = \partial y = p \partial x$ et $u = \frac{-1}{p}$, fiet

$$\int \frac{y \partial p}{p p} = \frac{-y}{p} + \int \partial x = x - \frac{y}{p}.$$

Si igitur porro $\Delta : (x - \frac{y}{p})$ denotet functionem quamcunque formulae $x - \frac{y}{p}$, etiam ſemper integrabilis erit haec formula differentialis multo generalior: $\frac{y \partial p}{p p} \Delta : (x - \frac{y}{p})$. Quodſi enim ponatur $x - \frac{y}{p} = V$, ob $\partial V = \frac{y \partial p}{p p}$, haec forma evadit $= \partial V \Delta : V$, quae manifeſto ſemper eſt integrabilis.

§. 11. His caſibus principalibus conſtitutis inquiramus quoque in caſus magis compoſitos, quibus formula generalis $V \partial p$ itidem fiet integrabilis, quem in finem ſequentia problemata pertractemus.

Problema 1.

Quaerantur duae functiones ipſius p, quae ſint P et Q, ita comparatae, ut iſta formula differentialis: $\partial p (P x + Q y)$ *evadat integrabilis.*

Solutio.

§. 12. Quoniam haec formula duas involvit partes, eas per allatam reductionem ſeorſim evolvamus, ac primo quidem erit $\int P x \partial p = x \int P \partial p - \int \partial x \int P \partial p$; ubi quidem integrale $\int P \partial p$ ut quantitas cognita ſpectari poteſt, propterea quod P denotat functionem ipſius p. Simili modo pro altera parte erit $\int Q y \partial p = y \int Q \partial p - \int \partial y \int Q \partial p$, ubi poſtrema membra utrinque continent formulas per ſe non integrabiles, unde neceſſe eſt, ut binis formulis in unam ſummam collectis haec duo membra poſtrema ſe mutuo tollant. Fiat igitur $\int \partial x \int P \partial p + \int \partial y \int Q \partial p = 0$, ideoque dif-

ferentiando, ob $\partial y = p\,dx$, erit $\int P\,\partial p + p\int Q\,\partial p = c$. Nunc denuo differentiemus atque obtinebimus

$$P + \int Q\,\partial p + Qp = 0,$$

quae iterum differentiata praebet

$$\partial P + p\,\partial Q + 2\,Q\,\partial p = 0,$$

in qua aequatione relatio quaeſita inter binas functiones P et Q continetur.

§. 13. Quodſi haec ultima aequatio ducatur in p, prodibit $p\,\partial P + \partial.Qpp = 0$; unde patet, ſi altera harum duarum functionum P et Q fuerit cognita, hinc alteram determinari poſſe. Si enim verbi gratia data fuerit functio P, ob $\int p\,\partial P + Qpp = C$, erit $Q = \frac{C - \int p\,\partial P}{pp}$. Sin autem altera functio Q fuerit data, ex priore formula erit $\partial P = -p\,\partial Q - 2\,Q\,\partial p$, ideoque integrando

$$P = C - \int(p\,\partial Q + 2\,Q\,\partial p)$$

ſive etiam

$$P = C - Qp - \int Q\,\partial p.$$

§. 14. Quando vero iſtae duae functiones P et Q hoc modo rite fuerint determinatae, tum integrale formulae differentialis propoſitae $\partial p\,(Px + Qy)$ ita exprimetur, ut ſit $= x\int P\,\partial p + y\int Q\,\partial p$. Atque iam notavimus, alterutram functionum P et Q pro lubitu aſſumi poſſe. Quin etiam certa quaedam relatio inter P et Q ſtatui poteſt. Veluti ſi velimus ut ſit $P = nQp$, hoc valore in aequatione differentiali ſubſtituto fiet

$$(n+2)\,Q\,\partial p + (n+1)\,p\,\partial Q = 0,$$

unde

unde porro deducitur:

$$\frac{(n+2)\partial p}{p}+\frac{(n+1)\partial Q}{Q}=0,$$

cuius integrale eſt

$$(n+2)\,l\,p+(n+1)\,l\,Q=l\,C,$$

hincque porro $p^{n+2}Q^{n+1}=C$, ex quo deducitur

$$Q=\frac{C}{p^{\frac{n+2}{n+1}}}, \text{ conſequenter } P=\frac{nC}{p^{\frac{1}{n+1}}}.$$

§. 15. Quoniam integrale inventum eſt $x\int P\,\partial p+y\int Q\,\partial p$, hae duae formulae integrales duas conſtantes accipere ſunt cenſendae, ita ut integrale verum ita prodeat expreſſum: $x\int P\,\partial p+y\int Q\,\partial p+\alpha x+\beta y$, ubi conſtantes α et β quovis caſu ita determinari oportet, ut ſumtis differentialibus elementum ∂x ex calculo excedat, id quod fit ſi fuerit

$$\partial x\int P\,\partial p+p\,\partial x\int Q\,\partial p+\alpha\,\partial x+\beta\,p\,\partial x=0,$$

unde prodit, uti iam invenimus,

$$P\,\partial p+\partial p\int Q\,\partial p+Q\,p\,\partial p+\beta\,\partial p=0,$$

quae per ∂p diviſa et denuo differentiata praebet

$$\partial P+2\,Q\,\partial p+p\,\partial Q=0,$$

quae aequatio exprimit relationem requiſitam inter P et Q.

Alia Solutio eiusdem problematis.

§. 16. Cum ſit $x\,\partial p$ differentiale formulae $p\,x-y$, erit per reductionem

$$\int P\,x\,\partial p=P\,(p\,x-y)-\int(p\,x-y)\,\partial P;$$

 dein-

deinde cum ſit $\frac{y\partial p}{pp}$ differentiale formulae $x - \frac{y}{p}$, erit per reductionem:

$$\int Qy\partial p = \int Qpp . \frac{y\partial p}{pp} = Qpp(x - \frac{y}{p})$$
$$- \int (x - \frac{y}{p})\partial . Qpp.$$

His igitur coniungendis integrale formulae propoſitae erit

$$P(px - y) + Qpp(x - \frac{y}{p}) - \int (px - y)\partial P - \int (x - \frac{y}{p})\partial . Qpp,$$

unde evidens eſt partes poſtremas integrales nihilo aequales fieri debere. Hinc ſumtis differentialibus ſtatui debet

$$(px - y)\partial P + (x - \frac{y}{p})\partial . Qpp = 0,$$

quae aequatio per $px - y$ diviſa dat $\partial P + \frac{1}{p}\partial . Qpp = 0$, ſive $\partial P + p\partial Q + 2Q\partial p = 0$, quae eſt eadem aequatio inter P et Q, quam prior ſolutio ſuppeditavit.

§. 17. Quoniam ſupra vidimus hanc formulam $\frac{(x + py)\partial p}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}$ integrationem admittere, facta applicatione hic erit $P = \frac{1}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}$ et $Q = \frac{p}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}$. Spectemus nunc quantitatem P tanquam cognitam et videamus an pro Q eundem valorem reperiamus. Cum igitur $\partial P = \frac{-3p\partial p}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}}$, aequatio inventa evadet

$$\frac{-3p\partial p}{(1 + pp)^{\frac{5}{2}}} + p\partial Q + 2Q\partial p = 0,$$

quae ducta in p praebet

∂.

$$\partial . Qpp = \frac{3pp\partial p}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}, \text{ ideoque } Qpp = \int \frac{3pp\partial p}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}.$$

Levi autem attentione adhibita patebit eſſe

$$\int \frac{3pp\partial p}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} = \frac{p^3}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}, \text{ ſicque erit}$$

$$Qpp = \frac{p^3}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}, \text{ ideoque}$$

$$Q = \frac{p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{C}{pp}.$$

§. 18. Hinc igitur videmus pro valore $P = \frac{1}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ non ſolum eſſe $Q = \frac{p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, ſed generalius ſumi poſſe $Q = \frac{p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{C}{pp}$, ita ut iam haec formula differentiationem admittat. Cum igitur in genere integrale inventum ſit

$$P(px-y) + Qpp(x - \tfrac{y}{p})$$

his valoribus ſubſtitutis integrale erit

$$\frac{px-y}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{pp(px-y)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{C(px-y)}{p},$$

quod reducitur ad hanc formam: $\frac{px-y}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{C(px-y)}{p}$.

Pro-

Problema 2.

Si M et N fuerint functiones quaecunque datae ipſius p, invenire eiusdem functionem Π, ut iſta formula differentialis: $(Mx + Ny)\,\Pi\,\partial p$, *integrationem admittat.*

Solutio.

§. 19. Si hoc problema cum praecedente comparemus, facile patet functiones illas litteris P et Q deſignatas eſſe $M\Pi$ et $N\Pi$, ita ut ſit $P = M\Pi$ et $Q = N\Pi$. Quare cum integrabilitas poſtulet hanc aequationem:

$$\partial P + 2 Q \partial p + p \partial Q = 0,$$

facta hac ſubſtitutione nanciſcemur ſequentem aequationem:

$$M \partial \Pi + \Pi \partial M + 2 N \Pi \partial p + N p \partial \Pi + \Pi p \partial N = 0,$$

ex qua, quia M et N ſunt functiones cognitae ipſius p, elicimus $\frac{\partial \Pi}{\Pi} = \frac{-\partial M - 2 N \partial p - p \partial N}{M + N p}$, unde colligimus integrando

$$l \Pi = - l (M + N p) - \frac{N \partial p}{M + N p}.$$

Ponamus igitur brevitatis gratia $\int \frac{N \partial p}{M + N p} = l K$, quandoquidem etiam haec formula K tanquam data ſpectari poteſt, ſicque erit $l \Pi = - l (M + N p) - l K + l A$. Quocirca pro ſolutione noſtri problematis habebimus:

$$\Pi = \frac{A}{K (M + N p)}, \text{ exiſtente } l K = \int \frac{N \partial p}{M + N p}.$$

§. 20. Inuento autem hoc valore functionis quaeſitae $\Pi = \frac{A}{K (M + N p)}$, quoniam ſupra integrale in genere prodiit

$$P (p x - y) + Q p p \left(x - \frac{y}{p}\right) = (p x - y)(P + Q p),$$

ſubſtitutis pro P et Q debitis valoribus integrale formulae diffe-

differentialis propoſitae $(Mx+Ny)\Pi\partial p$ erit

$$(px-y)(M\Pi+N\Pi p)=\frac{A(px-y)(M+Np)}{K(M+Np)},$$

quae commode ulterius reducitur ad hanc formam ſimpliciſſimam: $\frac{A(px-y)}{K}$, ſicque erit $\int\frac{Mx+Ny)\partial p}{K(M+Np)}=\frac{px-y}{K}$, exiſtente $lK=\int\frac{N\partial p}{M+Np}$, ſive $K=e^{\int\frac{N\partial p}{M+Np}}$, id quod operae pretium erit exemplis illuſtrare.

Exemplum 1.

§. 21. Sit $M=1$ et $N=1$, ita ut proponatur haec formula differentialis: $(x+y)\Pi\partial p$. Hic igitur erit $lK=\int\frac{\partial p}{1+p}=l(1+p)$, ideoque $K=1+p$, ita ut iam functio quaeſita ſit $\Pi=\frac{A}{(1+p)^2}$, hincque formula differentialis integrationem admittens erit $\frac{(x+y)\partial p}{(1+p)^2}$, quippe cuius integrale eſt $\frac{px-y}{1+p}$. Quodſi enim haec formula differentietur, prodit $\frac{x\partial p}{1+p}-\frac{(px-y)\partial p}{(1+p)^2}$, quae reducitur ad hanc formam: $\frac{(x+y)\partial p}{(1+p)^2}$.

Exemplum 2.

§. 22. Sint ambae functiones M et N conſtantes, ſcilicet $M=m$ et $N=n$, ut propoſita ſit haec formula differentialis: $(mx+ny)\Pi\partial p$. Hic igitur erit primo

$$lK=\int\frac{n\partial p}{m+np}=l(m+np),$$

ita vt ſit $K=m+np$. Hinc igitur functio quaeſita Π erit $=\frac{A}{(m+np)^2}$, ita ut iam integrabilis ſit haec formula: $\frac{(mx+ny)\partial p}{(m+np)^2}$, quippe cuius integrale erit $\frac{px-y}{m+np}$.

Exem-

Exemplum 3.

§. 23. Sumamus nunc $M = 1$ et $N = p$, ut formula integrabilis reddenda ſit $(x + py)\Pi\partial p$. Hic igitur erit primo $lK = \int\frac{p\partial p}{1+pp} = l\sqrt{(1+pp)}$, ideoque $K = \sqrt{(1+pp)}$, unde fit functio quaeſita $\Pi = \frac{A}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, hincque formula differentialis integrationem admittens erit $\frac{(x+py)\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, quae eſt ea ipſa, quam initio ſumus contemplati; cuius ergo integrale eſt $\frac{px+y}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Exemplum 4.

§. 24. Sit nunc $M = m$ et $N = np$, ut formula integrabilis reddenda ſit $(mx + npy)\Pi\partial p$. Hic igitur erit

$$lK = \int\frac{np\partial p}{m+npp} = l\sqrt{(m+npp)},$$

ideoque $K = \sqrt{(m+npp)}$, unde functio quaeſita erit $\Pi = \frac{A}{(m+npp)^{\frac{3}{2}}}$, ita ut iam integrabilis ſit haec formula $\frac{(mx+npy)\partial p}{(m+npp)^{\frac{3}{2}}}$, cuius ergo integrale erit $= \frac{px-y}{\sqrt{(m+npp)}}$.

Exemplum 5.

§. 25. Sit nunc $M = m$ et $N = np^{\lambda-1}$, ita ut formula integrabilis reddenda ſit $(mx + np^{\lambda-1}y)\Pi\partial p$. Hic igitur erit

$$lK = \int\frac{np^{\lambda-1}\partial p}{m+np^{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}l(m+np^{\lambda}),$$

ideo-

ideoque $K = (m + n p^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}}$, unde functio quaeſita Π erit $= \frac{A}{(m + n p^{\lambda})^{\frac{\lambda + 1}{1}}}$, ita ut iam integrabilis ſit haec formula: $\frac{(m x + n p^{\lambda - 1} y) \partial p}{(m + n p^{\lambda})^{\frac{\lambda + 1}{\lambda}}}$, cuius ergo integrale erit $= \frac{p x - y}{(m + n p)^{\frac{1}{\lambda}}}$.

Exemplum 6.

§. 26. Sit nunc $M = m p$ et $N = n$, ita ut formula integrabilis reddenda ſit $(m p x + n y) \Pi \partial p$. Hic igitur erit $l K = \int \frac{n \partial p}{m p + n p} = \frac{n}{m + n} l p$, ideoque $K = p^{\frac{n}{m + n}}$, ergo $\Pi = \frac{A}{(m + n) p^{\frac{m + 2n}{m + n}}}$, ſicque formula integrabilis nunc eſt $\frac{(m p x + n y) \partial p}{(m + n) p^{\frac{m + 2n}{m + n}}}$, cuius ergo integrale erit $= \frac{p x - y}{p^{\frac{n}{m + n}}}$.

§. 27. Hic caſus imprimis notabilis occurrit, quo $m = - n$, ſive $m + n = 0$; tum enim formula maxime incongrua reſultat, ob exponentem ipſius p infinitum. Hic autem caſus per ſe eſt obvius. Si enim quaeratur Π, ut iſta formula $(p x - y) \Pi \partial p$ evadat integrabilis, quoniam eſt $\partial . (p x - y) = x \partial p$, evidens eſt nullam dari functionem ipſius p tantum, qua huic conditioni ſatisfieri queat. Statim autem ac non fuerit $m + n = 0$, ſolutio ſemper eſt poſſibilis.

Exemplum VII.

§. 28. Sumatur nunc $M = mpp$ et $N = n$, ut integrabilis reddi debeat haec formula: $(mppx + ny)\Pi\partial p$. Hic ergo erit

$$lK = \int \frac{n\partial p}{np + mpp} = lp - l(mp + n),$$

conſequenter $K = \frac{p}{mp + n}$, hincque $\Pi = \frac{A}{pp}$, ſicque formula integrabilis iam erit $\frac{(mppx + ny)\partial p}{pp}$; eius enim integrale erit $\frac{(px - y)(mp + n)}{p}$.

Exemplum VIII.

§. 29. Sit nunc $M = p^{\lambda+1}$ et $N = 1$, ita ut formula integrabilis reddenda ſit $(p^{\lambda+1}x + y)\Pi\partial p$. Hic ergo erit

$$lK = \int \frac{\partial p}{p^{\lambda+1} + p} = lp - \frac{1}{\lambda} l(p^{\lambda+1} + 1),$$

ergo $K = \frac{p}{(p^{\lambda+1} + 1)^{\frac{1}{\lambda}}}$, hincque $\Pi = \frac{A(p^{\lambda} + 1)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}{pp}$, unde formula integrabilis erit $\frac{(p^{\lambda} + 1)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}(p^{\lambda+1}x + y)\partial p}{pp}$, quippe cuius integrale eſt $= \frac{(px - y)(p^{\lambda} + 1)^{\frac{1}{\lambda}}}{p}$.

Exemplum 9.

§. 30. Sit denique $M = mp^{\lambda+1}$ et $N = n$, ut formula integrabilis reddenda ſit $(mp^{\lambda+1}x + ny)\Pi\partial p$. Hic ergo erit

lK

$$l\mathrm{K} = \int \frac{n\,\partial p}{m\,p^{\lambda+1} + n\,p} = l\,p - \tfrac{1}{\lambda}\,l\,(m\,p^{\lambda} + n),$$

ideoque $\mathrm{K} = \frac{p}{(m\,p^{\lambda}+n)^{\frac{1}{\lambda}}}$, hincque $\Pi = \frac{\mathrm{A}\,(m\,p^{\lambda}+n)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}{p\,p}$, unde formula integrabilis erit

$$= \frac{(m\,p^{\lambda+1}\,x + n\,y)\,(m\,p^{\lambda}+n)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\,\partial p}{p\,p},$$

quippe cuius integrale erit $\frac{(p\,x - y)\,(m\,p^{\lambda}+n)^{\frac{1}{\lambda}}}{p}$.

Problema 3.

Invenire duas functiones ipſius p, quae ſint P et Q, ut iſta formula differentialis: $(p\,x - y)^{n-1}\,(P\,x + Q\,y)\,\partial p$ *fiat integrabilis.*

Solutio.

§. 31. Cum ſit $x\,\partial p = \partial.(p\,x - y)$, erit

$$\int \mathrm{P}\,x\,\partial p\,(p\,x - y)^{n-1} = \tfrac{1}{n}\,\mathrm{P}\,(p\,x - y)^{n} - \tfrac{1}{n}\int (p\,x - y)^{n}\,\partial \mathrm{P}.$$

Deinde cum ſit $\frac{y\,\partial p}{p\,p} = \partial.(x - \frac{y}{p})$, loco $\mathrm{Q}\,y\,\partial p$ ſcribamus $\mathrm{Q}\,p\,p.\frac{y\,\partial p}{p\,p}$, tum vero loco $p\,x - y$ ſcribamus $p\,(x - \frac{y}{p})$, ideoque loco $(p\,x - y)^{n-1}$ ſcribendum erit $p^{n-1}\,(x - \frac{p}{y})^{n-1}$. Hinc ergo pro altera parte habebimus

$$\mathrm{Q}\,y\,\partial p\,(p\,x - y)^{n-1} = \mathrm{Q}\,p\,p.\frac{y\,\partial p}{p\,p}.p^{n-1}\,(x - \tfrac{y}{p})^{n-1}$$
$$= \mathrm{Q}\,p^{n+1}.\frac{y\,\partial p}{p\,p}.(x - \tfrac{y}{p})^{n-1},$$

hincque per reductionem erit

$$\int Q y \partial p (p x - y)^{n-1} = \frac{1}{n} Q p^{n+1} (x - \frac{y}{p})^n$$
$$- \frac{1}{n} \int (x - \frac{y}{p})^n \partial . Q p^{n+1}.$$

§. 32. Nunc igitur ut formula propoſita integrationem admittat, neceſſe eſt, ut binae partes poſteriores ſummatoriae ad nihilum redigantur, unde oritur iſta aequatio:

$$(p x - y)^n \partial P + (x - \frac{y}{p})^n \partial . Q p^{n+1} = 0,$$

hincque dividendo per $(p x - y)^n$ erit

$$p^n \partial P + \partial . Q p^{n+1} = 0,$$

cuius evolutio praebet

$$\partial P + p \partial Q + (n + 1) Q \partial p = 0,$$

qua aequatione relatio requiſita inter P et Q continetur; unde ergo data altera ſimul altera determinari poteſt; tum autem ipſum integrale formulae propoſitae erit

$$\frac{1}{n} P (p x - y)^n + \frac{1}{n} Q p^{n+1} (x - \frac{y}{p})^n, \text{ ſive}$$
$$\frac{1}{n} (p x - y)^n (P + Q p).$$

Problema 4.

Si M et N deſignent functiones quascunque datas ipſius p, invenire eiusdem quantitatis functionem Π, ut iſta formula differentialis: $(p x - y)^{n-1} (M x + N y) \Pi \partial p$, *fiat integrabilis.*

Solutio.

§. 33. Solutio praecedentis problematis huc transferetur ſtatuendo $P = M \Pi$ et $Q = N \Pi$, unde conditio ante inventa ad hanc aequationem perducet:

M ∂ Π

$$M\partial\Pi + \Pi\partial M + Np\partial\Pi + \Pi p\partial N + (n+1)N\Pi\partial p = 0,$$

ex qua reperitur

$$\frac{\partial\Pi}{\Pi} = -\frac{\partial M - p\partial N - (n+1)N\partial p}{M+Np},$$

quae integrata praebet

$$l\,\Pi = -l(M+Np) - n\int\frac{N\partial p}{M+Np}.$$

§. 34. Ponamus iam, ut ſupra fecimus, $\int\frac{N\partial p}{M+Np} = lK$, atque ad numeros procedendo erit $\Pi = \frac{A}{K^n(M+Np)}$, ſicque formula noſtra integrabilis erit

$$\frac{(px-y)^{n-1}(Mx+Ny)\partial p}{K^n(M+Np)}.$$

Eius enim integrale erit

$$\frac{\Pi}{n}\,\frac{(px-y)^n(M+Np)}{K^n(M+Np)} = \frac{(px-y)^n}{nK^n},$$

unde ſumto $n=1$ manifeſto caſus problematis tertii exſurgit.

§. 35. Caſus hic imprimis notatu dignus occurrit, quo $n=0$; tum enim, ob $K^n=1$, formula integrabilis reddita erit $\frac{(Mx+Ny)\partial p}{(M+Np)(px-y)}$. Eius vero integrale hinc videtur fieri infinitum, cuiusmodi valores ad logarithmos revocantur: formula enim $\frac{(px-y)^0}{0}$ aequivalet $l(px-y)$. Interim tamen hoc integrale neutiquam ſatisfacit, cuius rei ratio in evaneſcentia numeri n latet; reperitur autem haec formula differentialis reſolvi in $\frac{x\partial p}{px-y} - \frac{N\partial p}{M+Np}$, unde ſi, ut fecimus, ponatur $\int\frac{N\partial p}{M+Np} = lK$, eius integrale

tegrale erit $l(px-y)-lK$, ita ut hoc caſu integrale ſit $l\frac{px-y}{K}$. Reliquis autem caſibus integralia erunt algebraica, cuius rei ſequentia exempla perpendamus.

Exemplum 1.

§. 36. Sit $M=1$ et $N=1$, eritque ut ante $lK=\int\frac{\partial p}{1+p}=l(1+p)$, ideoque $K=1+p$, hincque $\Pi=\frac{A}{(1+p)^{n+1}}$, unde formula noſtra integrabilis iam erit

$$\frac{(px-y)^{n-1}(x+y)\partial p}{(1+p)^{n+1}},$$

cuius integrale eſt $\frac{(px-y)^n}{n(1+p)^n}$.

Exemplum 2.

§. 37. Ponamus nunc $M=\alpha$ et $N=\beta$, ut formula integrabilis reddenda ſit $(px-y)^{n-1}(\alpha x+\beta y)\Pi\partial p$. Hic ergo erit $lK=\int\frac{\beta\partial p}{\alpha+\beta p}=l(\alpha+\beta p)$, ideoque $K=\alpha+\beta p$, hincque $\Pi=\frac{A}{(\alpha+\beta p)^{n+1}}$, unde noſtra formula integrabilis reddenda erit $\frac{(px-y)^{n-1}(\alpha x+\beta y)\partial p}{(\alpha+\beta p)^{n+1}}$, quippe cuius integrale eſt $\frac{(px-y)^n}{n(\alpha+\beta p)^n}$.

Exemplum 3.

§. 38. Sit nunc $M=1$ et $N=p$, ut formula integrabilis reddenda ſit $(px-y)^{n-1}(x+py)\Pi\partial p$. Hic ergo

ergo

go erit

$$l\,K = \int \frac{p\,\partial p}{1 + p\,p} = l\sqrt{(1 + p\,p)},$$

ideoque $K = \sqrt{(1 + p\,p)}$, hincque $\Pi = \dfrac{A}{(1 + p\,p)^{\frac{3}{2}}}$; ſicque formula noſtra integrabilis erit $\dfrac{(p\,x - y)^{n-1}(x + p\,y)\,\partial p}{(1 + p\,p)^{\frac{n+2}{2}}}$; eius enim integrale erit $\dfrac{(p\,x - y)^n}{n\,(1 + p\,p)^{\frac{n}{2}}}$.

Exemplum 4.

§. 39. Sit nunc $M = \alpha$ et $N = \beta\,p$, ut formula integrabilis reddenda ſit $(p\,x - y)^{n-1}(\alpha\,x + \beta\,p\,y)\,\Pi\,\partial p$. Hic igitur erit

$$l\,K = \int \frac{\beta\,p\,\partial p}{\alpha + \beta\,p\,p} = \tfrac{1}{2}\,l\,(\alpha + \beta\,p\,p),$$

ideoque $K = \sqrt{(\alpha + \beta\,p\,p)}$, unde functio quaeſita Π erit $= \dfrac{A}{(\alpha + \beta\,p\,p)^{\frac{n+2}{2}}}$. Hinc formula noſtra integrabilis erit

$$\frac{(p\,x - y)^{n-1}(\alpha\,x + \beta\,p\,y)\,\partial p}{(\alpha + \beta\,p\,p)^{\frac{n+2}{2}}},$$

quippe cuius integrale erit $\dfrac{(p\,x - y)^n}{n\,(\alpha + \beta\,p\,p)^{\frac{n}{2}}}$.

Exemplum 5.

§. 40. Sit $M = \alpha$ et $N = \beta\,p^{\lambda - 1}$, ut formula integrabilis reddenda ſit

$(px-y)^{n-1}(\alpha x+\beta p^{\lambda-1}y)\Pi\,\partial p$. Hic ergo erit

$$lK=\int\frac{\beta p^{\lambda-1}\partial p}{\alpha+\beta p^{\lambda}}=\frac{1}{\lambda}l(\alpha+\beta p^{\lambda}),$$

ideoque $K=(\alpha+\beta p^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}}$, unde functio quaeſita Π erit $=$ $\frac{A}{(\alpha+\beta p^{\lambda})^{\frac{n+\lambda}{\lambda}}}$, ſicque formula noſtra integrabilis erit

$$\frac{(px-y)^{n-1}(\alpha x+\beta p^{\lambda-1}y)\partial p}{(\alpha+\beta p^{\lambda})^{\frac{n+\lambda}{\lambda}}},$$

quippe cuius integrale eſt $=\frac{(px-y)^{n}}{n(\alpha+\beta p^{\lambda})^{\frac{n}{\lambda}}}$.

Exemplum 6.

§. 41. Sit nunc $M=\alpha p$ et $N=\beta$, ita ut formula integrabilis reddenda ſit

$$(px-y)^{n-1}(\alpha px+\beta y)\Pi\,\partial p,$$

Hic igitur erit

$$lK=\int\frac{\beta\partial p}{\alpha p+\beta p}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}lp,$$

ideoque $K=p^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$. Hinc igitur functio propoſita Π erit

$$\Pi=\frac{A}{(\alpha+\beta)p^{\frac{\alpha+(n+1)\beta}{\alpha+\beta}}},$$

ſicque formula integrabilis nunc erit

$$\frac{(px-y)^{n-1}(\alpha px+\beta y)\partial p}{(\alpha+\beta)p^{\frac{\alpha+(n+1)\beta}{\alpha+\beta}}},$$

cuius ergo integrale eſt $=\frac{(px-y)^{n}}{np^{\frac{\beta n}{\alpha+\beta}}}$.

Ex-

Exemplum 7.

§. 42. Sumatur nunc $M = \alpha p p$ et $N = \beta$, ut integrabilis reddi debeat haec formula:

$$(p x - y)^{n-1} (\alpha p p x + \beta y) \Pi \partial p.$$

Hic ergo erit

$$l K = \int \frac{\beta \partial p}{\alpha p p + \beta p} = l p - l (\alpha p + \beta),$$

conſequenter $K = \frac{p}{\alpha p + \beta}$, hincque $\Pi = \frac{A (\alpha p + \beta)^{n-1}}{p^{n+1}}$, ſicque formula integrabilis iam erit

$$\frac{(p x - y)^{n-1} (\alpha p p x + \beta y) (\alpha p + \beta)^{n-1} \partial p}{p^{n+1}},$$

quippe cuius integrale eſt $= \frac{(p x - y)^n (\alpha p + \beta)^n}{n p^n}$.

Exemplum 8.

§. 43. Sit nunc $M = p^{\lambda+1}$ et $N = 1$, ita ut formula integrabilis reddenda ſit

$$(p x - y)^{n-1} (p^{\lambda+1} x + y) \Pi \partial p.$$

Hic ergo erit

$$l K = \int \frac{\partial p}{p^{\lambda+1} + p} = l p - \tfrac{1}{\lambda} l (p^{\lambda} + 1),$$

conſequenter $K = \frac{p}{(p^{\lambda} + 1)^{\frac{1}{\lambda}}}$, hincque $\Pi = \frac{A (p^{\lambda} + 1)^{\frac{n-\lambda}{\lambda}}}{p^{n+1}}$, unde formula integrabilis erit

$$\frac{(p x - y)^{n-1} (p^{\lambda+1} x + y) (p^{\lambda} + 1)^{\frac{n-\lambda}{\lambda}} \partial p}{p^{n+1}},$$

quippe cuius integrale erit

$$= \frac{(p x - y)^n (p^\lambda + 1)^{\frac{n}{\lambda}}}{n p^n}.$$

Exemplum 9.

§. 44. Sit denique $M = \alpha p^{\lambda + 1}$ et $N = \beta$, ut formula integrabilis reddenda fit

$(p x - y)^{n-1} (\alpha p^{\lambda + 1} x + \beta y) \Pi \partial p$. Hic ergo erit

$$l K = \int \frac{\beta \partial p}{\alpha p^{\lambda + 1} + \beta p} = l p - \frac{1}{\lambda} l (\alpha p^\lambda + \beta),$$

ideoque $K = \frac{p}{(\alpha p^\lambda + \beta)^{\frac{1}{\lambda}}}$, hincque $\Pi = \frac{A (\alpha p^\lambda + \beta)^{\frac{n - \lambda}{\lambda}}}{p^{n+1}}$, unde formula integrabilis erit

$$\frac{(p x - y)^{n-1} (\alpha p^{\lambda + 1} x + \beta y) (\alpha p^\lambda + \beta)^{\frac{n - \lambda}{\lambda}} \partial p}{p^{n+1}},$$

cuius ergo integrale erit $\frac{(p x - y)^n (\alpha p^\lambda + \beta)^{\frac{n}{\lambda}}}{n p^n}$.

FOR-

FORMAE GENERALES DIFFERENTIALIVM, QVAE ETSI NVLLA SVBSTITVTIONE RATIONALES REDDI POSSVNT, TAMEN INTEGRATIONEM PER LOGARITHMOS ET ARCVS CIRCVLARES ADMITTVNT.

Auctore
L. EVLERO.

Conventui exhibita die 24 April. 1777.

§. 1.

Quae non ita pridem de integratione huius formulae differentialis: $\frac{\partial z(3+zz)}{(1+zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}$ per logarithmos et arcus circulares in medium attuli, eo maiori attentione ſunt digna, quod iſta formula tam complicatam irrationalitatem involvit, ut nulla plane ſubſtitutione ad rationalitatem perduci queat. Eſt vero iſta formula caſus ſpecialiſſimus formarum maxime generalium, in quibus tam obſtruſa irrationalitas involvitur, ut nulla certe ſubſtitutio ſufficiat iis ad rationalitatem reducendis, quarum tamen integralia in genere per logarithmos et arcus circulares exprimi poſſunt. Quoniam

niam igitur tales formae generales in Analyſin maximi momenti incrementa afferre poſſe ſunt cenſendae, eas hoc loco accuratius explicare conſtitui.

§. 2. Quo autem huius generis formulas clarius exponam, a formula irrationali, quae in iis ineſt, inchoari convenit quam hoc modo repraeſento:

$$v = \sqrt[n]{[a(\alpha + \gamma z)^n + b(\beta + \delta z)^n]},$$

quae irrationalitas, ſtatim atque exponens n binarium ſuperat, tantopere eſt abſtruſa, ut nullo plane modo ad rationalitatem revocari poſſit. Deinde denotent litterae maiuſculae A, B, C, D ſive quantitates conſtantes ſive functiones quascunque rationales formulae $\frac{(\alpha + \gamma z)^n}{(\beta + \delta z)^n}$, atque binae formulae integrales ſequentes:

$$\text{♄} = \int \frac{\partial z (\alpha + \gamma z)^{m-1} (\beta + \delta z)^{m-1} [A(\alpha + \gamma z)^{n-m} + B(\beta + \delta z)^{n-m}]}{v^m [C(\alpha + \gamma z)^n + D(\beta + \delta z)^n]}$$

$$\text{♃} = \int \frac{\partial z [A(\alpha + \gamma z)^{n-m} + B(\beta + \delta z)^{n-m}]\, v^m}{(\alpha + \gamma z)(\beta + \delta z)[C(\alpha + \gamma z)^n + D(\beta + \delta z)^n]}$$

ſemper per logarithmos et arcus circulares expediri poſſunt. Harum ſcilicet formularum prior ♄ irrationalitatem v^m in denominatore, poſterior vero ♃ in numeratore complectitur; hae igitur duae formae theorema maxime memorabile Analyticum conſtituunt, cuius veritatem duplici demonſtratione ſum oſtenſurus.

Demonſtratio prima formularum ante propoſitarum.

§. 3. Ponatur $\beta + \delta z = x(\alpha + \gamma z)$, eritque formula irrationalis

$v =$

$$v = (\alpha + \gamma z)\sqrt[n]{(a + b x^n)}$$

ideoque

$$v^m = (\alpha + \gamma z)^m \sqrt[n]{(a + b x^n)^m}.$$

Deinde vero hinc erit $z = \frac{\alpha x - \beta}{\delta - \gamma x}$, ideoque $\partial z = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\partial x}{(\delta - \gamma x)^2}$, vel etiam cum ſit $x = \frac{\beta + \delta z}{\alpha + \gamma z}$, erit $\partial x = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\partial z}{(\alpha + \gamma z)^2}$, unde ſit $\partial z = \frac{\partial x (\alpha + \gamma z)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}$.

§. 4. Quodſi iam hi valores in priori forma ♄ ſubſtituantur, ea ſequenti modo ſatis commode per ſolam variabilem x exprimi reperietur

$$\text{♄} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\int \frac{x^{m-1}\partial x (A + B x^{n-m})}{(C + D x^n)\sqrt[n]{(a + b x^n)^m}}.$$

Simili vero etiam modo altera forma ♃ per ſolam variabilem x commode exprimetur

$$\text{♃} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\int \frac{\partial x (A + B x^{n-m})\sqrt[n]{(a + b x^n)^m}}{x (C + D x^n)}$$

ubi litterae A, B, C, D, niſi fuerint conſtantes, erunt functiones rationales huius formulae $\frac{1}{x^n}$, ſive ipſius x^n.

Evolutio formae prioris ♄.

§. 5. Poſito brevitatis gratia $\alpha\delta - \beta\gamma = \theta$, haec forma in duas partes reſolvatur, quae erunt

♄ =

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{\theta}\int \frac{A\,x^{m-1}\,\partial x}{(C + D\,x^n)\sqrt[n]{(a + b\,x^n)^m}}$$
$$+ \frac{1}{\theta}\int \frac{B\,x^{n-1}\,\partial x}{(C + D\,x^n)\sqrt[n]{(a + b\,x^n)^m}}$$

quarum prior rationalis reddetur, ponendo $\frac{x}{\sqrt[n]{(a + b\,x^n)}} = t$; erit enim $\frac{x^n}{a + b\,x^n} = t^n$, unde elicitur $x^n = \frac{a\,t^n}{1 - b\,t^n}$; unde patet litteras A, B, C, D, quae in hac parte occurrunt, fore functiones rationales ipſius t^n, porro vero ob

$$n\,l\,x = l\,a + n\,l\,t - l(1 - b\,t^n),$$

erit differentiando

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t} + \frac{b\,t^{n-1}\,\partial t}{1 - b\,t^n} = \frac{\partial t}{t(1 - b\,t^n)}.$$

Cum igitur ſit

$$\frac{x^m}{\sqrt[n]{(a + b\,x^n)^m}} = t^m \text{ et}$$

$$C + D\,x^n = \frac{C + t^n(a\,D - b\,C)}{1 - b\,t^n}$$

his ſubſtitutis pars prior formulae $\mathfrak{z}$ erit

$$= \frac{1}{\theta}\int \frac{A\,t^{m-1}\,\partial t}{C + t^n(a\,D - b\,C)}$$

quae ergo eſt rationalis, eiusque propterea integrale per logarithmos atque arcus circulares exhiberi poteſt.

§. 6.

§. 6. Pro altera autem parte formulae ♄ primo notetur, eam per praecedentem ſubſtitutionem rationalem reddi non poſſe; verum hoc multo facilius praeſtabitur ponendo $\sqrt[n]{(a+bx^n)} = u$, unde cum fiat $a + bx^n = u^n$, erit

$$x^n = \frac{u^n - a}{b} \text{ atque } x^{n-1}\partial x = \frac{u^{n-1}\partial u}{b}$$

et iam litterae B, C, et D erunt functiones rationales ipſius u^n; quam ob rem cum ſit

$$\sqrt[n]{(a+bx^n)^m} = u^m \text{ et } C + Dx^n = \frac{bC - aD + Du^n}{b},$$

his valoribus ſubſtitutis pars poſterior formulae ♄ erit

$$= \frac{1}{\theta}\int \frac{Bu^{n-m-1}\partial u}{bC - aD + Du^n}$$

quae cum etiam ſit rationalis, pariter per logarithmos atque arcus circulares exhiberi poterit.

Evolutio formae poſterioris ♃.

§. 7. Haec forma pariter in duas partes reſoluta ita repraeſentetur:

$$♃ = \frac{1}{\theta}\int \frac{A\partial x\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}}{x(C+Dx^n)}$$

$$+ \frac{1}{\theta}\int \frac{Bx^{n-m-1}\partial x\sqrt[n]{(a+bx^n)^m}}{C+Dx^n}.$$

Prior autem pars ſtatim rationalis redditur ponendo

$$\sqrt[n]{(a+bx^n)} = u, \text{ unde fit } x^n = \frac{u^n - a}{b}$$

ſum-

ſumtisque logarithmis $n\,l\,x = l\,(u^n - a) - l\,b$, ideoque

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{u^{n-1}\,\partial u}{u^n - a} \text{ et } C + D\,x^n = \frac{b\,C - a\,D + D\,u^n}{b}$$

quibus ſubſtitutis pars prior evadit

$$= \frac{1}{\theta}\int \frac{A\,b\,u^{n+m-1}\,\partial u}{(u^n - a)\,(b\,C - a\,D + D\,u^n)}$$

quae forma, ob A, C, D functiones rationales ipſius u^n, utique ipſa eſt rationalis.

§. 8. Altera autem pars formae ♃, quae eſt

$$\frac{1}{\theta}\int \frac{B\,x^{n-m-1}\,\partial x\,\sqrt[n]{(a + b\,x^n)^m}}{C + D\,x^n}$$

ita repraeſentetur

$$\frac{1}{\theta}\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{B\,x^n}{C + D\,x^n} \cdot \frac{\sqrt[n]{(a + b\,x^n)^m}}{x^m},$$

et nunc manifeſtum eſt ſcopum propoſitum obtentum iri ope prioris ſubſtitutionis ante uſurpatae $\frac{x}{\sqrt[n]{(a + b\,x^n)}} = t$; ſic enim poſtremus factor erit $= \frac{1}{t^m}$. Deinde ſupra vidimus fore $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{t\,(1 - b\,t^n)}$. Denique vero fiet

$$\frac{B\,x^n}{C + D\,x^n} = \frac{a\,B\,t^n}{C + t^n\,(a\,D - b\,C)};$$

his autem ſubſtitutis altera pars ipſius ♃ erit

=

$$= \frac{1}{\theta} \int \frac{a\,B\,t^{n-m-1}\,\partial t}{(1 - b\,t^n)\,[C + t^n(a\,D - b\,C)]}$$

quae etiam eſt rationalis, ob litteras B, C, D functiones rationales ipſius t^n.

§. 9. Ex hac evolutione liquet, ſi litterarum A et B altera evaneſcat, formulas propoſitas ope idoneae ſubſtitutionis utique ad rationalitatem perduci poſſe, ita ut his caſibus noſtrae formulae nihil, quod memoratu eſſet adeo dignum, continerent; at vero ſi harum litterarum neutra evaneſcat, quoniam utraque peculiarem poſtulat ſubſtitutionem, evidens eſt, totum negotium ope unicae ſubſtitutionis nullo modo confici poſſe, atque ob hanc ipſam cauſam noſtrae formulae generales eo maiori attentione dignae ſunt cenſendae.

Demonſtratio alia, methodo prorſus mirabili innixa.

§. 10. Quoniam vidimus ambas noſtras formas tantum diſtribui debere, loco variabilis z ſtatim duas novas variabiles p et q in calculum introducamus, ponendo

$$p = \frac{\alpha + \gamma z}{v} \text{ et } q = \frac{\beta + \delta z}{v}.$$

Hinc autem primo erit $\delta p - \gamma q = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{v}$; unde ſi ut ante ponamus $\alpha\delta - \beta\gamma = \theta$, erit $v = \frac{\theta}{\delta p - \gamma q}$. Deinde vero erit

$$\alpha q - \beta p = \frac{z(\alpha\delta - \beta\gamma)}{v} = \frac{\theta z}{v},$$

unde colligimus

$$z = \frac{v(\alpha q - \beta p)}{\theta} = \frac{\alpha q - \beta p}{\delta p - \gamma q},$$

unde differentiando colligitur

$$\partial z = \frac{\theta(p\,\partial q - q\,\partial p)}{(\delta p - \gamma q)^2},$$

quae expreſſio, ob $\delta p - \gamma q = \frac{\theta}{v}$, concinne ita refertur:

$$\partial z = \frac{vv}{\theta}(p\,\partial q - q\,\partial p).$$

§. 11. Deinde vero ex poſitionibus factis colligitur

$$a p^n + b q^n = \frac{a(\alpha + \gamma z)^n + b(\beta + \delta z)^n}{v^n} = 1$$

ob $v^n = a(\alpha + \gamma z^n) + b(\beta + \delta z)^n$, unde facile ſive p per q ſive q per p definiri poteſt, cum ſit

$$\text{vel } p^n = \frac{1 - b q^n}{a} \text{ vel } q^n = \frac{1 - a p^n}{b}.$$

Porro vero quia eſt

$$a p^{n-1}\partial p + b q^{n-1}\partial q = 0, \text{ erit}$$

$$\partial p = -\frac{b q^{n-1}\partial q}{a p^{n-1}} \text{ et } \partial q = -\frac{a p^{n-1}\partial p}{b q^{n-1}}.$$

Hinc iam formula $p\,\partial q - q\,\partial p$ pro lubitu ſive per ∂q ſive per ∂p exhiberi poterit: priori ſcilicet modo erit

$$p\,\partial q - q\,\partial p = \frac{\partial q(a p^n + b q^n)}{a p^{n-1}} = \frac{\partial q}{a p^{n-1}},$$

poſteriore vero modo erit

$$p\,\partial q - q\,\partial p = -\frac{\partial p(a p^n + b q^n)}{b q^{n-1}} = -\frac{\partial p}{b q^{n-1}}.$$

Quovis igitur caſu ſive priore ſive poſteriore valore uti licebit, prouti commodius fuerit viſum.

§. 12. Nunc igitur hos novos valores in calculum introducamus, eliminando litteram z, veruntamen ipſam litteram v in calculo retineamus, quippe quae tandem ſponte

te ex calculo excedet. Primo igitur, ut iam vidimus, erit $\partial z = \frac{vv}{\theta}(p\,\partial q - q\,\partial p)$, atque ob $\alpha + \gamma z = pv$ et $\beta + \delta z = qv$, erit

$$(\alpha + \gamma z)(\beta + \delta z) = pqvv;$$

$$\mathrm{A}(\alpha + \gamma z)^{n-m} + \mathrm{B}(\beta + \delta z)^{n-m} = v^{n-m}(\mathrm{A}p^{n-m} + \mathrm{B}q^{n-m})$$

ac denique

$$\mathrm{C}(\alpha + \gamma z)^n + \mathrm{D}(\beta + \delta z)^n = v^n(\mathrm{C}p^n + \mathrm{D}q^n),$$

quibus valoribus ſubſtitutis binae noſtrae formae generales ſequenti modo referentur:

$$\text{♄} = \frac{1}{\theta}\int \frac{p^{m-1}q^{m-1}(p\,\partial q - q\,\partial p)(\mathrm{A}p^{n-m} + \mathrm{B}q^{n-m})}{\mathrm{C}p^n + \mathrm{D}q^n} \text{ et}$$

$$\text{♃} = \frac{1}{\theta}\int \frac{(p\,\partial q - q\,\partial p)(\mathrm{A}p^{n-m} + \mathrm{B}q^{n-m})}{pq(\mathrm{C}p^n + \mathrm{D}q^n)},$$

ubi notetur litteras A, B, C, D, niſi ſint conſtantes, iam fore functiones rationales formulae $\frac{p^n}{q^n}$, ideoque ob $ap^n + bq^n = 1$, vel ipſius p^n vel ipſius q^n.

Evolutio formulae ♄.

§. 13. Hic iterum iſta formula per ſuas partes repraeſentetur:

$$\text{♄} = \frac{1}{\theta}\int \frac{\mathrm{A}p^{n-1}q^{m-1}(p\,\partial q - q\,\partial p)}{\mathrm{C}p^n + \mathrm{D}q^n}$$

$$+ \frac{1}{\theta}\int \frac{\mathrm{B}q^{n-1}p^{n-1}(p\,\partial q - q\,\partial p)}{\mathrm{C}p^n + \mathrm{D}q^n}.$$

Et quoniam pro $p\,\partial q - q\,\partial p$ ſupra geminum valorem exhi-

hibuimus, alterum per ∂q alterum vero per ∂p expreſſum, priori valore utamur pro parte priori, quae evadet

$$= \frac{1}{a\theta} \int \frac{A q^{m-1} \partial q}{C p^n + D q^n},$$

quae porro, ob $p^n = \frac{1 - b q^n}{a}$, tranſit in hanc formam:

$$\frac{1}{\theta} \int \frac{A q^{m-1} \partial q}{C + q^n (a D - b C)};$$

ubi cum A, C, D per ſolam q rationaliter exprimi queant, ſola variabilis q ineſt, idque rationaliter, unde integrale per logarithmos et arcus circulares exprimi poterit.

§. 14. Pro parte autem ſecunda formulae ♄ utamur valore poſteriore pro $p\partial q - q\partial p$, qui eſt $-\frac{\partial p}{b q^{n-1}}$. Hinc enim iſta pars prodibit

$$= -\frac{1}{\theta b} \int \frac{B p^{m-1} \partial p}{C p^n + D q^n},$$

quae ob $q^n = \frac{1 - a p^n}{b}$ abit in hanc

$$-\frac{1}{\theta} \int \frac{B p^{m-1} \partial p}{D - p^n (a D - b C)}$$

quae expreſſio ſolam variabilem p rationaliter comprehendit, quandoquidem litterae B, C, D, niſi ſint conſtantes, ſunt functiones ipſius p^n. His igitur partibus iunctis erit:

$$♄ = \frac{1}{\theta} \int \frac{A q^{m-1} \partial q}{C + q^n (a D - b C)} - \frac{1}{\theta} \int \frac{B p^{m-1} \partial p}{D - p^n (a D - b C)}.$$

Evo-

Evolutio formulae $\mathfrak{Z}$.

§. 15. Haec formula ſimili modo per ſuas partes ita repraeſentabitur:

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{\theta}\int \frac{A p^{n-m-1}(p\partial q - q\partial p)}{q(C p^n + D q^n)}$$

$$+ \frac{1}{\theta}\int \frac{B q^{n-m-1}(p\partial q - q\partial p)}{p(C p^n + D q^n}.$$

Pro priore parte utamur valore

$$p\partial q - q\partial p = - \frac{\partial p}{b q^{n-1}};$$

unde iſta pars fiet

$$= - \frac{1}{\theta b}\int \frac{A p^{n-m-1}\partial p}{q^n(C p^n + D q^n)},$$

quae porro ob $q^n = \frac{1 \quad a p^n}{b}$ induet hanc formam:

$$- \frac{b}{\theta}\int \frac{A p^{n-m-1}\partial p}{(1 - a p^n)[D - p^n(a D - b C)]}.$$

§. 16. Pro parte autem poſteriore utamur altero valore $p\partial q - q\partial p = \frac{\partial q}{a p^{n-1}}$, ex quo iſta pars evadet

$$\frac{1}{a\theta}\int \frac{B q^{n-m-1}\partial q}{p^n(C p^n + D q^n)},$$

quae porro ob $p^n = \frac{1 - b q^n}{a}$ reducitur ad hanc formam:

$$\frac{a}{\theta}\int \frac{B q^{n-m-1}\partial q}{(1 - b q)C + q^n(a D - b C)}.$$

Hoc

Hoc igitur modo altera formula generalis $\mathfrak{z}$ ita repraeſentetur:

$$\mathfrak{z} = -\frac{b}{\theta}\int\frac{A p^{\nu-m-1}\partial p}{(1-a p^{\nu})[D-p^{\nu}(aD-bC)]} + \frac{a}{\theta}\int\frac{B q^{n-m-1}\partial q}{(1-b q^{\nu})[C+q^{\nu}(aD-bC)]}.$$

Quanquam haec poſterior methodus a praecedente prorſus differt, tamen egregia harmonia elucet.

§. 17. Quoniam autem haec nimis ſunt generalia, quam ut clare percipi queant, paulatim ad magis particularia deſcendamus, ac primo quidem ſumamus litteris A, B, C, D, perpetuo quantitates conſtantes deſignari, hicque ſtatim ſe offert caſus memorabilis, quo $C = a$ et $D = b$, ſiquidem hinc oritur $C(\alpha+\gamma z)^{\nu} + D(\beta+\delta z)^{\nu} = v^{\nu}$, ſicque binae noſtrae formae erunt:

$$\mathfrak{y} = \frac{\int\partial z(\alpha+\gamma z)^{n-1}(\beta+\delta z)^{m-1}[A(\alpha+\gamma z)^{\nu-m}+B(\beta+\delta z)^{\nu-m}]}{v^{m+n}} \text{ et}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{\int\partial z[A(\alpha+\gamma z)^{\nu-m}+B(\beta+\delta z)^{\nu-m}]}{v^{\nu-m}(\alpha+\gamma z)(\beta+\delta z)}.$$

§. 18. Hoc igitur caſu ſi ponatur $p = \frac{\alpha+\gamma z}{v}$ et $q = \frac{\beta+\delta z}{v}$, integralia harum formarum hoc modo exprimentur:

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{\theta}\int\frac{A q^{n-1}\partial q}{a} - \frac{1}{\theta}\int\frac{B p^{m-1}\partial p}{b},$$

ſicque iſte valor adeo algebraice exhiberi poterit: erit enim

$$\mathfrak{y} = \frac{A}{m\theta a}q^{n} - \frac{B}{m\theta b}p^{m},$$

ſive

ſive erit

$$\mathfrak{y} = \frac{A(\beta + \delta z)^m}{m \epsilon a v^m} - \frac{B(\alpha + \gamma z)^m}{m \theta b v^m}.$$

Pro altera autem forma habebimus

$$\mathfrak{z} = -\frac{1}{\theta}\int\frac{A p^{n-m-1}\partial p}{1 - a p^n} + \frac{1}{\theta}\int\frac{B q^{n-m-1}\partial q}{1 - b q^n},$$

quae quidem forma aliter integrari nequit, niſi per logarithmos et arcus circulares, ſed ob concinnitatem imprimis eſt notatu digna.

§. 19. Imprimis autem formulae notabiles prodibunt, ſi ſtatuamus $\alpha = 1$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$ at $\delta = -1$; unde fit $\theta = -2$ et iam binae noſtrae formae generales ſequentem faciem induent:

$$\mathfrak{y} = \frac{\int\partial z(1 - zz)^{m-1}[A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m}]}{v^n[C(1+z)^n + D(1-z)^n]} \text{ et}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{\int\partial z[A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m}]v^m}{(1-zz)C[C(1+z)^n + D(1-z)^n]},$$

ubi iam eſt $v = \sqrt[n]{[a(1+z)^n + b(1-z)^n]}$. Tum vero, poſito $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, valores harum formarum ſequenti modo exprimentur:

$$\mathfrak{y} = -\frac{A}{2}\int\frac{q^{n-1}\partial q}{C + q^n(aD - bC)} + \frac{B}{2}\int\frac{p^{m-1}\partial p}{D - p^n(aD - bC)} \text{ et}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{Ab}{2}\int\frac{p^{n-m-1}\partial p}{(1 - a p^n)[D - p^n(aD - bC)]}$$

$$- \frac{Ba}{2}\int\frac{q^{n-m-1}\partial q}{(1 - b q^n)[C + q^n(aD - bC)]}.$$

§. 20.

§. 20. Combinemus nunc hanc poſteriorem hypotheſin cum praecedente, qua erat $C = a$ et $D = b$ ac formae noſtrae erunt:

$$\text{♄} = \frac{\int \partial z (1 - zz)^{m-1} [A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m}]}{v^{m+n}} \text{ et}$$

$$\text{♃} = \frac{\int \partial z [A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m}]}{v^{n-m}(1-zz)},$$

tum autem per noſtram reductionem erit

$$\text{♄} = -\frac{A(1-z)^m}{2mav^m} + \frac{B(1+z)^m}{2mbv^m}, \text{ et}$$

$$\text{♃} = \tfrac{1}{2}\int \frac{Ap^{n-m-1}\partial p}{1-ap^n} - \tfrac{1}{2}\int \frac{Bq^{n-m-1}\partial q}{1-bq^n}.$$

§. 21. Quoniam autem hic forma ♄, utpote algebraice integrabilis, nulla laborat difficultate, eius loco aliam contemplabimur affinem, ponendo $C = a$ at $D = -b$, ita ut iam ſit $aD - bC = -2ab$, eritque

$$\text{♄} = \int \frac{\partial z (1-zz)^{m-1} [A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m}]}{v^m [a(1+z)^n - b(1-z)^n]},$$

cuius valor per p et q ita exprimitur, ut ſit

$$\text{♄} = -\frac{A}{2}\int \frac{q^{m-1}\partial q}{a - 2abq^n} + \frac{B}{2}\int \frac{p^{m-1}\partial p}{2abp^n - b}, \text{ ſive}$$

$$\text{♄} = -\frac{A}{2}\int \frac{q^{m-1}\partial q}{a - 2abq^n} - \frac{B}{2}\int \frac{p^{m-1}\partial p}{b - 2abp^n}.$$

In ſequentibus iſtam formam ♄ cum praecedente forma ♃ coniunctim conſiderabimus, atque bini caſus ſeorſim tractandi ſe offerunt.

Evo-

Evolutio caſus, quo $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

§. 22. Hic igitur erit $v = \sqrt[n]{[\frac{1}{2}(1+z)^n - \frac{1}{2}(1-z)^n]}$; huius ergo valores pro ſimplicioribus exponentibus n erunt uti ſequuntur:

Si $n = 2$, erit $v = \sqrt{2z}$.

Si $n = 3$, erit $v = \sqrt[3]{(3z + z^3)}$.

Si $n = 4$, erit $v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}$.

Si $n = 5$, erit $v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}$.

Si $n = 6$, erit $v = \sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}$.

Expediamus nunc primo poſtremam formam pro $\mathfrak{b}$ datam, et quoniam in eius denominatore occurrit forma $a(1+z)^n - b(1-z)^n$, eius loco ſcribamus brevitatis gratia s, ita ut ob $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$ ſit

$$s = \frac{1}{2}(1+z)^n + \frac{1}{2}(1-z)^n, \text{ ideoque}$$

$$\mathfrak{b} = \int \frac{\partial z(1-zz)^{m-1}[A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m}]}{v^m s},$$

atque per litteras p et q erit

$$\mathfrak{b} = -A\int \frac{q^{m-1}\partial q}{1+q^n} + B\int \frac{p^{m-1}\partial p}{1-p^n},$$

ubi notentur pro ſimplicioribus exponentibus n valores:

Si $n = 2$, erit $s = 1 + zz$.

Si $n = 3$, erit $s = 1 + 3zz$.

Si $n = 4$, erit $s = 1 + 6zz + z^4$.

Si $n = 5$, erit $s = 1 + 10zz + 5z^4$.

Si $n = 6$, erit $s = 1 + 15zz + 15z^4 + z^6$.

 §. 23.

§. 23. Poſtrema autem forma ℨ hoc caſu evadit

$$ℨ = \int \frac{\partial z\,[A\,(1+z)^{n-m} + B\,(1-z)^{n-m}]}{v^{n-m}\,(1-zz)},$$

cuius valor per p et q expreſſus erit

$$ℨ = A \int \frac{p^{n-m-1}\,\partial p}{2-p^n} - B \int \frac{q^{n-m-1}\,\partial q}{2+q^n}.$$

Evolutio caſus, quo $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.

§. 24. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[n]{[\tfrac{1}{2}(1+z)^n + \tfrac{1}{2}(1-z)^n]},$$

huius ergo valores pro ſimplicioribus exponentibus n erunt, ut ſequitur:

Si $n = 2$, erit $v = \sqrt[2]{(1+zz)}$.

Si $n = 3$, erit $v = \sqrt[3]{(1+3zz)}$.

Si $n = 4$, erit $v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}$.

Si $n = 5$, erit $v = \sqrt[5]{(1+10zz+5z^4)}$.

Si $n = 6$, erit $v = \sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}$.

§. 25. Expediamus nunc poſtremam formam pro ℨ datam, in qua loco $a(1+z)^n - b(1-z)^n$ ſcribamus brevitatis gratia T, ita ut ſit $T = \frac{1}{2}(1+z)^n - \frac{1}{2}(1-z)^n$, ſicque ipſa forma erit

$$ℨ = \int \frac{\partial z\,(1-zz)^{m-1}\,[A\,(1+z)^{n+m} + B\,(1-z)^{n-m}]}{v^m\,T},$$

quae

quae per litteras p et q ita exprimitur:

$$4 = -A\int\frac{q^{m-1}\partial q}{1-q^n} - B\int\frac{p^{m-1}\partial p}{1-p^n},$$

ubi pro exponentibus ſimplicioribus erit ut ſequitur:

Si $n = 2$, erit $T = 2z$.
Si $n = 3$, erit $T = 3z + z^3$.
Si $n = 4$, erit $T = 4z + 4z^3$.
Si $n = 5$, erit $T = 5z + 10z^3 + z^5$.
Si $n = 6$, erit $T = 6z + 20z^3 + 6z^5$.

Hoc autem caſu evadet

$$4 = \int\frac{\partial z\,[A(1+z)^{n-m} + B(1-z)^{n-m}]}{v^{n-m}(1-zz)},$$

cuius valor per p et q expreſſus erit

$$4 = A\int\frac{p^{n-m-1}\partial p}{2-p^n} - B\int\frac{q^{n-m-1}\partial q}{2-q^n}.$$

§. 26. In his autem formulis perpetuo accipiamus

$$A = \tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}g \text{ et } B = \tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}g,$$

tum igitur formula, ubi hae litterae occurrunt, hanc induet ſpeciem: $fF + gG$, eritque

$$F = \tfrac{1}{2}(1+z)^{n-m} + \tfrac{1}{2}(1-z)^{n-m} \text{ et}$$
$$G = \tfrac{1}{2}(1+z)^{n-m} - \tfrac{1}{2}(1-z)^{n-m},$$

unde ergo ſequentes valores pro caſibus ſimplicioribus emergunt:

Si $n - m = 1$, erit $F = 1$ et $G = z$.

Si $n - m = 2$, erit $F = 1 + zz$ et $G = 2z$.

Si $n - m = 3$, erit $F = 1 + 3zz$ et $G = 3z + z^3$.

Si $n - m = 4$, erit $F = 1 + 6zz + z^4$ et $G = 4z + 4z^3$.

Si $n - m = 5$, erit $F = 1 + 10zz + 5z^4$ et
$G = 5z + 10z^3 + z^5$.

Si $n - m = 6$, erit $F = 1 + 15zz + 15z^4 + z^6$ et
$G = 6z + 20z^3 + 6z^5$.

§. 27. Secundum iſtas quatuor formas iam ſatis particulares totidem ordines formularum ſpecialium conſtituamus, dum ſcilicet exponentibus indefinitis m et n valores determinati ſimpliciores aſſignabuntur, ubi quidem pro m numeri minores quam n capientur.

Ordo primus formularum ſpecialium ex forma

$$\text{Ѣ} = \int \frac{\partial z (1 - zz)^{m-1} (fF + gG)}{v^m s}.$$

§. 28. Cuiusmodi valores litteris F, G, v et s ſint tribuendi, ſupra iam eſt oſtenſum, ubi etiam vidimus, ſi ſtatuatur $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, fore

$$\text{Ѣ} = -\frac{(f+g)}{2} \int \frac{q^{m-1} \partial q}{1 + q^n} + \frac{(f-g)}{2} \int \frac{p^{m-1} \partial p}{1 - p^n}.$$

Hinc iam ſequentes formulas ſpeciales derivemus

1°. Sit $n = 2$ et $m = 1$.

§. 29. Hic igitur erit $v = \sqrt{2z}$; $s = 1 + zz$, $F = 1$ et $G = z$, ideoque formula ſpecialis

Ѣ =

$$\hbar = \int \frac{\partial z(f+gz)}{(1+zz)\sqrt{2z}},$$ hocque caſu erit

$$\hbar = -\frac{(f+g)}{2}\int \frac{\partial q}{1+qq} + \frac{(f-g)}{2}\int \frac{\partial p}{1-pp},$$

exiſtente $p = \frac{1+z}{\sqrt{2z}}$ et $q = \frac{1-z}{\sqrt{2z}}$.

2°. Sit $n = 3$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 2$.

§. 30. Hic igitur erit $v = \sqrt[3]{(3z+z^3)}$; $s = 1+3zz$, $F = 1+zz$ et $G = 2z$, ideoque formula ſpecialis

$$\hbar = \int \frac{\partial z[f(1+zz)+2gz]}{(1+3zz)\sqrt[3]{(3z+z^3)}},$$

hocque caſu erit

$$\hbar = -\frac{(f+g)}{2}\int \frac{\partial q}{1+q^3} + \frac{(f-g)}{2}\int \frac{\partial p}{1-p^3},$$

exiſtente $p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}}$ et $q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}}$.

3°. Sit $n = 3$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 1$.

§. 31. Hic igitur erit $v = \sqrt[3]{(2z+z^3)}$; $s = 1+3zz$, $F = 1$ et $G = z$, ideoque formula ſpecialis:

$$\hbar = \int \frac{\partial z(1-zz)(f+gz)}{(1+3zz)\sqrt[3]{(3z+z^3)^2}},$$

hocque caſu erit

$$\hbar = -\frac{(f+g)}{2}\int \frac{q\,\partial q}{1+q^3} + \frac{(f-g)}{2}\int \frac{p\,\partial p}{1-p^3},$$

exiſtente $p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}}$ et $q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}}$.

4°. Sit

4°. Sit $n = 4$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 3$.

§. 32. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}$; $s = 1 + 6zz + z^4$; $F = 1 + zz$ et $G = 3z + z^3$, ideoque formula ſpecialis

$$\text{ƀ} = \int \frac{\partial z\,[f(1 + 2zz) + g(3z + z^3)]}{(1 + 6zz + z^4)\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}.$$

Hoc caſu erit

$$\text{ƀ} = -\frac{(f+g)}{2}\int\frac{\partial q}{1 + q^4} + \frac{(f-g)}{2}\int\frac{\partial p}{1 - p^4},$$

exiſtente $p = \dfrac{1 + z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}$ et $q = \dfrac{1 - z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}$.

5°. Sit $n = 4$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 2$.

§. 33. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}$; $s = 1 + 6zz + z^4$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$, ideoque formula ſpecialis

$$\text{ƀ} = \int \frac{\partial z(1 - zz)\,[f(1 + zz) + 2gz]}{(1 + 6zz + z^4)\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}.$$

Hoc igitur caſu erit

$$\text{ƀ} = -\frac{(f+g)}{2}\int\frac{q\,\partial q}{1 + q^4} + \frac{(f-g)}{2}\int\frac{p\,\partial p}{1 - p^4},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}.$$

6°. Sit $n = 4$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 1$.

§. 33.

§. 33. Hic manent ut ante $v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}$; $s = 1 + 6zz + z^4$; at erit $F = 1$ et $G = z$, ideoque formula ſpecialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{-\partial z(1 - zz)^2 (f + gz)}{(1 + 6zz + z^4)\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}},$$

hocque caſu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{(f+g)}{2}\int \frac{qq\partial q}{1 + q^4} + \frac{(f-g)}{2}\int \frac{pp\partial p}{1 - p^4},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}.$$

7. Sit $n = 5$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 4$.

§. 34. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}$; $s = 1 + 10zz + 5z^4$; $F = 1 + 6zz + z^4$ et $G = 4z + 4z^3$; ex quibus oritur formula ſpecialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z[f(1 + 6zz + z^4) + 4g(z + z^3)]}{(1 + 10zz + 5z^4)\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}},$$

cuius valor hoc caſu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{(f+g)}{2}\int \frac{\partial q}{1 + q^5} + \frac{(f-g)}{2}\int \frac{\partial p}{1 - p^5},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}}.$$

8.

8°. Sit $n = 5$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 3$.

§. 35. Hic erit $v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}$; $s = 1 + 10zz + 5z^4$; $F = 1 + zz$ et $G = 3z + z^3$, hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{b} = \int \frac{\partial z (1 - zz) [f(1 + 3zz) + g(3z + z^3)]}{(1 + 10zz + 5z^4) \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)^2}},$$

hocque caſu erit

$$\mathfrak{b} = -\frac{(f+g)}{2} \int \frac{q \partial q}{1 + q^5} + \frac{(f-g)}{2} \int \frac{p \partial p}{1 - p^5},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}},$$

9°. Sit $n = 5$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 2$.

§. 36. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}$; $s = 1 + 10zz + 5z^4$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$, ideoque formula ſpecialis

$$\mathfrak{b} = \int \frac{\partial z (1 - zz)^2 [f(1 + zz) + 2gz]}{(1 + zz) \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)^3}},$$

hocque caſu erit

$$\mathfrak{b} = -\frac{(f+g)}{2} \int \frac{qq \partial q}{1 + q^5} + \frac{(f-g)}{2} \int \frac{pp \partial p}{1 - p^5};$$

exiſtente ut ante

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}}.$$

10°.

10. Sit $n = 5$ et $m = 4$, ideoque $n - m = 1$.

§. 37. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}$; $s = 1 + 10zz + 5z^4$; $F = 1$ et $G = z$, ideoque formula ſpecialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z (1 - zz)^3 (f + gz)}{(1 + 10zz + 5z^4) \sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}},$$

hocque caſu erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{(f+g)}{2} \int \frac{q^3 \partial q}{1 + q^5} + \frac{(f+g)}{2} \int \frac{p^3 \partial p}{1 - p^5},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(5z + 10z^3 + z^5)}}.$$

11. Sit $n = 6$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 5$.

§. 38. Hic igitur erit

$v = \sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}$; $s = 1 + 15zz + 15z^4 + z^6$;

$F = 1 + 10zz + 5z^4$ et $G = 5z + 10z^3 + z^5$,

ideoque formula ſpecialis

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z [f(1 + 10zz + 5z^4) + g](5z + 10z^3 + z^5)}{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6) \sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}},$$

hocque caſu erit

$$\mathfrak{h} = -\tfrac{1}{2}(f + g) \int \frac{\partial q}{1 + q^6} + \tfrac{1}{2}(f - g) \int \frac{\partial p}{1 - p^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}}.$$

12. Sit $n = 6$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 4$.

§. 39. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[6]{6z + 20z^3 + 6z^5};\quad s = 1 + 15zz + 15z^4 + z^6;$$
$$F = 1 + 6zz + z^4 \text{ et } G = 4z + 4z^3,$$

ideoque formula ſpecialis

$$\mathfrak{b} = \int \frac{\partial z(1 - zz)f(1 + 6zz + z^4) + 4g(z + z^3)}{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)\sqrt[3]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}},$$

cuius valor eſt

$$\mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{q\,\partial q}{1 + q^6} + \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{p\,\partial p}{1 - p^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}}.$$

13. Sit $n = 6$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 3$.

§. 40. Hic igitur erit

$$v = \sqrt[6]{6z + 20z^3 + 6z^5};\quad s = 1 + 15zz + 15z^4 + z^6;$$
$$F = 1 + zz \text{ et } G = 3z + z^3,$$

ideoque formula ſpecialis

$$\mathfrak{b} = \int \frac{\partial z(1 - zz)^2[f(1 + zz) + g(3z + z^3)]}{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)\sqrt{(6z + 20z^3 + 6z^5)}},$$

cuius valor eſt

$$\mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{qq\,\partial q}{1 + q^6} + \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{pp\,\partial p}{1 - p^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[6]{(6z + 20z^3 + 6z^5)}}.$$

14.

14. Sit $n=6$ et $m=4$, ideoque $n-m=2$.

§. 41. Hic igitur erit

$$v=\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)};\ s=1+15zz+15z^4+z^6;$$
$$F=1+zz \text{ et } G=2z,$$

hincque formula ſpecialis

$$\mathfrak{p}=\int\frac{\partial z(1-zz)^3[f(1+zz)+2gz]}{(1+15zz+15z^4+z^6)\sqrt[3]{(6z+20z^3+6z^5)^2}},$$

cuius valor eſt

$$\mathfrak{p}=\tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{q^3\partial q}{1+q^6}+\tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{p^3\partial p}{1-p^6},$$

exiſtente

$$p=\frac{1+z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}} \text{ et } q=\frac{1-z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}}.$$

15. Sit $n=6$ et $m=5$, ideoque $n-m=1$.

§. 42. Hic igitur erit

$$v=\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)};\ s=1+15zz+15z^4+z^6;$$

$F=1$ et $G=z$, ideoque formula ſpecialis

$$\mathfrak{p}=\int\frac{\partial z(1-zz)^4(f+gz)}{(1+15zz+15z^4+z^6)\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)^5}},$$

cuius ergo valor eſt

$$\mathfrak{p}=\tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{q^4\partial q}{1+q^6}+\tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{p^4\partial p}{1-p^6};$$

exiſtente

$$p=\frac{1+z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}} \text{ et } q=\frac{1-z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}}.$$

Obſervatio in has formulas.

§. 43. Hic ii caſus imprimis notatu ſunt digni, quibus $n = 2m$, propterea quod tum in formulam integralem tantum ſignum $\sqrt{}$ quadraticum ingreditur; hos ergo caſus evolviſſe operae erit pretium. Poſito igitur $n = 2m$ habebitur

$$v = \sqrt[2m]{\left[\tfrac{1}{2}(1+z)^{2m} - \tfrac{1}{2}(1-z)^{2m}\right]}.$$

Ac ſi loco $\frac{1}{2}(f+g)$ et $\frac{1}{2}(f-g)$, litteras A et B reſtituamus, erit formula noſtra

$$\mathfrak{b} = \int \frac{\partial z(1-zz)^{m-1}[A(1+z)^n + B(1-z)^m]}{[\frac{1}{2}(1+z)^{2m} + \frac{1}{2}(1-z)^{2m}]\sqrt{[\frac{1}{2}(1+z)^{2m} - \frac{1}{2}(1-z)^{2m}]}},$$

cuius integrale, ſumtis $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, erit

$$\mathfrak{b} = -A\int \frac{q^{m-1}\partial q}{1+q^{2m}} + B\int \frac{p^{m-1}\partial p}{1-v^{2m}}.$$

§. 44. Has autem formulas in genere integrare licet. Pro priore enim ponamus $q^m = t$, eritque $q^{m-1}\partial q = \frac{\partial t}{m}$, ſicque pars prior erit

$$-\frac{A}{m}\int \frac{\partial t}{1+tt} = -\frac{A}{m}\,\text{Ar. tang.}\, t = -\frac{A}{m}\,\text{Ar. tang.}\, q^m.$$

Pro altera forma ſi ponamus $p^m = u$, erit altera pars

$$= \frac{B}{m}\int \frac{\partial u}{1-uu} = \frac{B}{2m}\, l\, \frac{1+p^m}{1-p^m},$$

ſicque ipſum integrale erit

$$= \frac{B}{2m}\, l\, \frac{1+p^m}{1-p^m} - \frac{A}{m}\,\text{Ar. tang.}\, q^m, \text{ ſiue}$$

$$\mathfrak{b} = \frac{B}{2m}\, l\, \frac{v^m + (1+z)^m}{v^m - (1+z)^m} - \frac{A}{m}\,\text{Ar. tang.}\, \frac{(1-z)^m}{v^m}.$$

Ordo

Ordo ſecundus formularum ſpecialium ex forma

$$\mathfrak{b} = \int \frac{\partial z\,(1 - zz)^{n-1}\,(f\,F + g\,G)}{v^m\,T}.$$

§. 45. Pro hac formula valores litterarum v et T ſupra in §. 24. et 25, litterarum vero F et G in §. 26. ſunt aſſignati, ubi etiam vidimus, ſi ponatur $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, tum valorem integralem fore

$$\mathfrak{b} = -\tfrac{1}{2}(f+g)\int \frac{q^{m-1}\,\partial q}{1 - q^n} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \frac{p^{m-1}\,\partial p}{1 - q^n}.$$

Hinc iam ſequentes formulas ſpeciales derivemus.

1. Sit $n = 2$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 1$.

§. 46. Hic igitur erit $v = \sqrt{(1 + zz)}$; $T = 2z$; $F = 1$ et $G = z$, hinc iam formula ſpecialis erit

$$\mathfrak{b} = \int \frac{\partial z\,(f + gz)}{2z\sqrt{(1 + zz)}},$$

cuius ergo integrale eſt

$$\mathfrak{b} = -\tfrac{1}{2}(f+g)\frac{\partial q}{1 - qq} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \frac{\partial p}{1 - pp},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt{(1+zz)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt{(1+zz)}}.$$

2. Sit $n = 3$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 2$.

§. 47. Hic igitur erit $v = \sqrt[3]{(1 + 3zz)}$; $T = 3z + z^3$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$, hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{b} = \int \frac{\partial z\,[f(1 + zz) + 2gz]}{(3z + z^3)\sqrt[3]{(1 + 3zz)}},$$

cuius

cuius valor eſt

$$\mathfrak{h} = -\tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{\partial q}{1-q^3} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{\partial p}{1-p^3},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}}.$$

3. Sit $n = 3$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 1$.

§. 48. Hic igitur erit $v = \sqrt[3]{(1+3zz)}$; $T = 3z + z^3$; $F = 1$ et $G = z$, hincque formula ſpecialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z(1-zz)(f+gz)}{(3z+z^3)\sqrt[3]{(1+3zz)^2}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{h} = -\tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{q\partial q}{1-q^3} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{p\partial p}{1-p^3};$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}}.$$

4. Sit $n = 4$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 3$.

§. 49. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}$; $T = 4z + 4z^3$; $F = 1 + 3zz$ et $G = 3z + z^3$; hincque formula ſpecialis

$$\mathfrak{h} = \int\frac{\partial z[f(1+3zz)+g(3z+z^3)]}{(4z+4z^3)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}},$$

cuius ergo valor erit

$$\mathfrak{h} = -\tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{\partial q}{1-q^4} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{\partial p}{1-p^4}$$

exi-

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}.$$

5. Sit $n = 4$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 2$.

§. 50. Hic erit $v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}$; $T = 4z + 4z^3$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$, hincque formula ſpecialis

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\partial z(1-zz)[f(1+zz)+2gz]}{(4z+4z^3)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}},$$

cuius valor eſt

$$\mathfrak{z} = -\tfrac{1}{2}(f+g)\int \tfrac{q\partial q}{1-q^4} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \tfrac{p\partial q}{1-p^4},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}.$$

6. Sit $n = 4$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 1$.

§. 51. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}$; $T = 4z + 4z^3$; $F = 1$ et $G = z$, hincque formula ſpecialis

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\partial z(1-zz)^2(f+gz)}{(4z+4z^3)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)^3}},$$

cuius ergo valor erit

$$\mathfrak{z} = -\tfrac{1}{2}(f+g)\int \tfrac{qq\partial q}{1-q^4} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \tfrac{pp\partial p}{1-p^4},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}.$$

7.

7. Sit $n = 5$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 4$.

§. 52. Hic igitur eſt $v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}$; $T = 5z + 10z^3 + z^5$; $F = 1 + 6zz + z^4$; $G = 4z + 4z^3$; hincque formula ſpecialis

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z\,[f(1 + 6zz + z^4) + 4g(z + z^3)]}{(5z + 10z^3 + z^5)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}},$$

cuius valor eſt

$$\mathfrak{Z} = -\tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial q}{1 - q^5} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial p}{1 - p^5},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}}.$$

8. Sit $n = 5$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 3$.

§. 53. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}$; $T = 5z + 10z^3 + z^5$; $F = 1 + 3zz$ et $G = 3z + z^3$, hincque formula ſpecialis

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z\,(1 - zz)\,[f(1 + 3zz) + g(3z + z^5)]}{(5z + 10z^3 + z^5)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)^2}},$$

cuius valor eſt

$$\mathfrak{Z} = -\tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{q\,\partial q}{1 - q^5} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{p\,\partial p}{1 - p^5},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}}.$$

9.

9. Sit $n = 5$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 2$.

§. 54. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}$; $T = 5z + 10z^3 + z^5$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$; hincque formula ſpecialis

$$\text{ꝥ} = \int \frac{\partial z(1 - zz)^2[f(1 + zz) + 2gz]}{(5z + 10z^3 + z^5)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)^3}},$$

cuius valor eſt

$$\text{ꝥ} = -\tfrac{1}{2}(f + g)\int\tfrac{qq\partial q}{1 - q^5} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int\tfrac{pp\partial p}{1 - p^5},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}}.$$

10. Sit $n = 5$ et $m = 4$, ideoque $n - m = 1$.

§. 55. Hic igitur eſt $v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}$; $T = 5z + 10z^3 + z^5$; $F = 1$ et $G = z$; hincque formula ſpecialis

$$\text{ꝥ} = \int \frac{\partial z(1 - zz)^3(f + gz)}{(5z + 10z^3 + z^5)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)^4}},$$

cuius ergo valor erit

$$\text{ꝥ} = -\tfrac{1}{2}(f + g)\int\tfrac{q^3\partial q}{1 - q^5} - \tfrac{1}{2}(f + g)\int\tfrac{p^3\partial p}{1 - p^5},$$

exiſtente ut ante

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}}.$$

11. Sit $n = 6$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 5$.

§. 65. Hic igitur erit $v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}$;

 $T =$

$T = 6z + 20z^3 + 6z^5$; $F = 1 + 10zz + 5z^4$ et $G = 5z + 10z^3 + z^5$; hincque formula ſpecialis

$$\mathfrak{p} = \int \frac{\partial z\,[f(1 + 10zz + 5z^4) + g(5z + 10z^3 + z^5)]}{(6z + 20z^3 + 6z^5)\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}},$$

cuius ergo valor erit

$$\mathfrak{p} = -\tfrac{1}{2}(f + g)\int \tfrac{\partial q}{1 - q^6} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \tfrac{\partial p}{1 - p^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}}.$$

12. Sit $n = 6$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 4$.

§. 57. Hic erit $v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}$; $T = 6z + 20z^3 + 6z^5$; $F = 1 + 6zz + z^4$ et $G = 4z + 4z^3$; hincque formula ſpecialis

$$\mathfrak{p} = \int \frac{\partial z(1 - zz)[f(1 + 6zz + z^4) + 4g(z + z^3)]}{(6z + 20z^3 + 6z^5)\sqrt[3]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}},$$

cuius valor erit

$$\mathfrak{p} = -\tfrac{1}{2}(f + g)\int \tfrac{q\,\partial q}{1 - q^6} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \tfrac{p\,\partial p}{1 - p^6},$$

exiſtente ut ante

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}} \text{ et}$$

$$q = \frac{1 - z}{\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}}.$$

13. Sit $n = 6$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 3$.

§. 58. Hic erit $v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}$; $T = 6z + 20z^3 + 6z^5$; $F = 1 + 3zz$; $G = 3z + z^3$; hincque formula ſpecialis

$$\text{ђ} = \int \frac{\partial z (1 - zz)^2 [f(1 + 3zz) + g(3z + z^3)]}{(6z + 20z^3 + 6z)\sqrt{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}},$$

cuius valor eſt

$$\text{ђ} = -\tfrac{1}{2}(f + g)\int \tfrac{qq\partial q}{1 + q^6} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \tfrac{pp\partial p}{1 - p^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}} \text{ et}$$

$$q = \frac{1 - z}{\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}}.$$

14. Sit $n = 6$ et $m = 4$, ideoque $n - m = 2$.

§. 59. Hic erit $v = \sqrt[4]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}$; $T = 6z^3 + 20z^3 + 6z^5$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$; hincque formula ſpecialis

$$\text{ђ} = \int \frac{\partial z (1 - zz)^3 [f(1 + zz) + 2gz]}{(6z + 20z^3 + 6z^5)\sqrt[4]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)^2}},$$

cuius valor eſt

$$\text{ђ} = -\tfrac{1}{2}(f + g)\int \tfrac{q^3\partial q}{1 + q^6} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \tfrac{p^3\partial p}{1 - p^6},$$

exiſtente

 $p =$

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}} \text{ et}$$

$$q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}}.$$

15. Sit $n=6$ et $m=5$, ideoque $n-m=1$.

§. 60. Hic erit $v=\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}$; $T=6z+20z^3+6z^5$; $F=1$ et $G=z$; hincque formula ſpecialis

$$\text{Ђ} = \int \frac{\partial z(1-zz)^4(f+gz)}{(6z+20z^3+6z^5)\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)^5}},$$

cuius valor eſt

$$\text{Ђ} = -\tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{q^4\,\partial q}{1-q^6} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{p^4\,\partial p}{1-p^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}} \text{ et}$$

$$q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)}}.$$

Obſervatio in has formulas.

§. 61. Hic igitur etiam caſus notatu dignus occurrit, ſi $n=2m$; quo fit

$$v = \sqrt[2m]{[\tfrac{1}{2}(1+z)^{2m}+\tfrac{1}{2}(1-z)^{2m}]}, \text{ ideoque}$$

$$v^m = \sqrt{[\tfrac{1}{2}(1+z)^{2m}+\tfrac{1}{2}(1-z)^{2m}]}.$$

At

At ſi loco $\frac{1}{2}(f+g)$ et $\frac{1}{2}(f-g)$ reſtituantur litterae A et B, erit formula noſtra:

$$\mathfrak{h} = \int \frac{\partial z (1 - zz)^{m-1} [A(1+z)^m + B(1-z)^m]}{[\frac{1}{2}(1+z)^{2m} - \frac{1}{2}(1-z)^{2m}] \sqrt{[\frac{1}{2}(1+z)^{2m} + \frac{1}{2}(1-z)^{2m}]}},$$

cuius integrale, ſumtis $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, erit

$$\mathfrak{h} = -A \int \frac{q^{m-1}\partial q}{1 - q^{2m}} - B \int \frac{p^{m-1}\partial p}{1 - p^{2m}}.$$

Quodſi ergo faciamus ut ante $q^m = t$ et $p^m = u$, integrale quaeſitum erit

$$\mathfrak{h} = -\frac{A}{m}\int \frac{\partial t}{1 - tt} - \frac{B}{m}\int \frac{\partial u}{1 - uu}, \text{ ſive}$$

$$\mathfrak{h} = -\frac{A}{2m}\, l\, \frac{1 + q^m}{1 - q^m} - \frac{B}{2m}\, l\, \frac{1 + p^m}{1 - p^m}, \text{ ſive}$$

$$\mathfrak{h} = -\frac{A}{2m}\, l\, \frac{v^m + (1-z)^m}{v^m - (1-z)^m} - \frac{B}{2m}\, l\, \frac{v^m + (1+z)^m}{v^m - (1+z)^m}.$$

Ordo tertius.
Formularum ſpecialium ex forma

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z (fF + gG)}{v^{n-m}(1 - zz)}.$$

§. 62. Hoc igitur caſu eſt

$$F = \tfrac{1}{2}(1+z)^{n-m} + \tfrac{1}{2}(1-z)^{n-m} \text{ et}$$
$$G = \tfrac{1}{2}(1+z)^{n-m} - \tfrac{1}{2}(1-z)^{n-m},$$

tum vero

$$v = \sqrt[n]{[\tfrac{1}{2}(1+z)^n - \tfrac{1}{2}(1-z)^n]}$$

unde

unde poſitis $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$ integrale inventum eſt

$$Z = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \frac{p^{n-m-1}\partial p}{2-p^n} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \frac{q^{n-m-1}\partial q}{2+q^n}.$$

Hinc ergo formulae ſpeciales prodibunt ſequentes:

1. Sit $n = 2$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 1$.

§. 63. Hic igitur erit $v = \sqrt{2z}$; $F = 1$ et $G = z$; hinc formula ſpecialis $Z = \int \frac{\partial z(f+gz)}{(1-zz)\sqrt{2z}}$, cuius integrale eſt

$$Z = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \frac{\partial p}{2-pp} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \frac{\partial q}{2+qq},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt{2z}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt{2z}}.$$

2. Sit $n = 3$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 2$.

§. 64. Hic igitur erit $v = \sqrt[3]{(3z+z^3)}$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$; hinc formula ſpecialis

$$Z = \int \frac{\partial z[f(1+zz)+2gz]}{(1-zz)\sqrt[3]{(3z+z^3)^2}},$$

cuius integrale eſt

$$Z = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \frac{p\partial p}{2-p^3} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \frac{q\partial q}{2+q^3},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(3z+z^3)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(3z-z^3)}};$$

3. Sit $n = 3$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 1$.

§. 65. Hic igitur erit $v = \sqrt[3]{(3z+z^3)}$; $F = 1$ et

G = z

$G = z$; hinc formula ſpecialis

$$♃ = \int \frac{\partial z\,(f + g z)}{(1 - z z)\sqrt[3]{(3 z + z^3)}},$$

cuius integrale eſt

$$♃ = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{\partial p}{2 - p^3} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{\partial q}{2 + q^3},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[3]{(3 z + z^3)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[3]{(3 z + z^3)}}.$$

4. Sit $n = 4$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 3$.

§. 66. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}$; $F = 1 + 3zz$ et $G = 3z + z^3$; hinc formula ſpecialis

$$♃ = \int \frac{\partial z\,[f(1 + 3zz) + g(3z + z^3)]}{(1 - zz)\sqrt[4]{(4z + 4z^3)^3}},$$

cuius integrale eſt

$$♃ = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{pp\,\partial p}{1 - p^4} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{qq\,\partial q}{1 - q^4},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}} \text{ et } q = \frac{1 - z}{\sqrt[4]{(4z + 4z^3)}}.$$

5. Sit $n = 4$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 2$.

§. 67. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(4z + 4z^3)}$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$; hinc formula ſpecialis

♃ =

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z\,[f(1+zz)+2gz]}{(1-zz)\sqrt{(4z+4z^3)}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \tfrac{p\,\partial q}{1-p^4} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \tfrac{q\,\partial q}{2-q^4};$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}}.$$

6. Sit $n = 4$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 1$.

§. 68. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(4z+4z^3)}$; $F = 1$ et $G = z$, ideoque formula ſpecialis

$$\mathfrak{Z} = \frac{\partial z\,(f+gz)}{(1-zz)\sqrt[4]{(4z+4z^3)}};$$

cuius integrale

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \tfrac{\partial p}{2-p^4} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \tfrac{\partial q}{2+q^4},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(4z+4z^3)}}.$$

7. Sit $n = 5$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 4$.

§. 69. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}$; $F = 1+6zz+z^4$ et $G = 4z+4z^3$; hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z\,[f(1+6zz+z^4)]}{(1-zz)\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)^4}};$$

cuius

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{p^3\,\partial p}{2-p^5} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{q^3\,\partial q}{2+q^5};$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

8. Sit $n = 5$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 3$.

§. 70. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}$; $F = 1 + 3zz$ et $G = 3z + z^3$; hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{z} = \int\frac{\partial z\,[f(1+3zz)+g(3z+z^3)]}{(1-zz)\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)^3}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{pp\,\partial p}{2-p^5} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{qq\,\partial q}{2+q^5},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

9. Sit $n = 5$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 2$.

§. 71. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$; hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{z} = \frac{\partial z\,[f(1+zz)+2gz]}{(1+zz)\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)^2}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{p\,\partial p}{2-p^5} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{q\,\partial q}{2+q^5},$$

 exi-

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

10. Sit $n = 5$ et $m = 4$, ideoque $n - m = 1$.

§. 72. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}$; $F = 1$ et $G = z$; hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z(f+gz)}{(1-zz)\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \tfrac{\partial p}{2-p^5} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \tfrac{\partial q}{2+q^5},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[5]{(5z+10z^3+z^5)}}.$$

11. Sit $n = 6$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 5$.

§. 73. Hic igitur erit $v = \sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}$; $F = 1+10zz+5z^4$ et $G = 5z+10z^3+z^5$; hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z[f(1+10zz+5z^4)+g(5z+10z^3+z^5)]}{(1-zz)\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)^5}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{Z} = -\tfrac{1}{2}(f+g)\int \tfrac{p^4\partial p}{2-p^6} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \tfrac{q^4\partial q}{2+q^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[6]{(0z+20z^3+6z^5)}}.$$

12.

12. Sit $n=6$ et $m=2$, ideoque $n-m=4$.

§. 74. Hic erit $v=\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}$; $F=1+6zz+z^4$ et $G=4z+4z^3$; hinc formula

$$\mathfrak{u}=\int\frac{\partial z[f(1+6zz+z^4)+4gz(1+zz)]}{(1-zz)\sqrt[3]{(6z+20z^3+6z^5)^2}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{u}=\tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{p^3\partial p}{2-p^6}-\tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{q^3\partial q}{2+q^6},$$

exiſtente

$$p=\tfrac{1+z}{v}\text{ et }q=\tfrac{1-z}{v}.$$

13. Sit $n=6$ et $m=3$, ideoque $n-m=3$.

§. 75. Hic erit $v=\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}$, $F=1+3zz$ et $G=3z+z^3$; hinc formula

$$\mathfrak{u}=\int\frac{\partial z[f(1+3zz)+g(3z+z^3)]}{(1-zz)\sqrt{(6z+20z^3+6z^5)}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{u}=\tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{pp\partial p}{2-p^6}-\tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{qq\partial q}{2+q^6},$$

exiſtente

$$p=\tfrac{1+z}{v}\text{ et }q=\tfrac{1-z}{v}.$$

14. Sit $n=6$ et $m=4$, ideoque $n-m=4$.

§. 76. Hic erit $v=\sqrt[6]{(6z+20z^3+6z^5)}$; $F=1+zz$ et $G=2z$; hinc formula

$$\mathfrak{u}=\int\frac{\partial z[f(1+zz)+2gz]}{(1-zz)\sqrt[6]{(6z+10z^3+6z^5)}},$$

 cuius

cuius integrale

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \frac{p\,\partial p}{2-p^6} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \frac{q\,\partial q}{2+q^6}$$

exiſtente $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$.

15. Sit $n = 6$ et $m = 5$, ideoque $n - m = 1$.

§. 77. Hic erit $v = \sqrt[6]{(6z + 10z^3 + 6z^5)}$; $F = 1$; $G = z$, hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\partial z(f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[6]{(6z + 10z^3 + 6z^5)}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \frac{\partial p}{2-p^6} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \frac{\partial p}{2+p^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{v} \text{ et } q = \frac{1-z}{v}.$$

Obſervatio in has formulas.

§. 78. Conſideremus hic iterum caſum quo $n = 2m$, et quia

$$v = \sqrt[2m]{[\tfrac{1}{2}(1+z)^{2m} - \tfrac{1}{2}(1-z)^{2m}]}, \text{ erit}$$
$$v^{n-m} = v^m = \sqrt{[\tfrac{1}{2}(1+z)^{2m} - \tfrac{1}{2}(1-z)^{2m}]};$$
$$F = \tfrac{1}{2}(1+z)^m + \tfrac{1}{2}(1-z)^m \text{ et } G = \tfrac{1}{2}(1+z)^m - \tfrac{1}{2}(1-z)^m,$$

quo ergo caſu erit

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\partial z[A(1+z)^m + B(1-z)^m}{(1-zz)\sqrt{[\tfrac{1}{2}(1+z)^{2m} - \tfrac{1}{2}(1-z)^{2m}}},$$

tum vero poſito $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, integrale erit

$\mathfrak{z} =$

$$\mathfrak{Z} = A\int\frac{p^{m-1}\partial p}{2-p^{2m}} - B\int\frac{q^{m-1}\partial q}{2+q^{2m}},$$

quae formula, poſito $p^m = u$ et $q^m = t$, tranſit in hac formam:

$$\mathfrak{Z} = \frac{A}{m}\int\frac{\partial u}{2-uu} - \frac{B}{m}\int\frac{\partial t}{2+tt},$$

ſive integrando erit

$$\mathfrak{Z} = \frac{A}{2m\sqrt{2}}\, l\, \frac{\sqrt{2}+p^m}{\sqrt{2}-p^m} - \frac{B}{m\sqrt{2}}\ \text{Ar. tang.}\ \frac{q^m}{\sqrt{2}},$$

Ordo quartus formularum ſpecialium ex forma

$$\mathfrak{Z} = \frac{\partial z(fF+gG)}{v^{n-m}(1-zz)}.$$

Hic eſt ut ante

$$F = \tfrac{1}{2}(1+z)^{n-m} + \tfrac{1}{2}(1-z)^{n-m} \text{ et}$$
$$G = \tfrac{1}{2}(1+z)^{n-m} - \tfrac{1}{2}(1-z)^{n-m},$$

at vero

$$v = \sqrt[n]{[\tfrac{1}{2}(1+z)^n + \tfrac{1}{2}(1-z)^n]},$$

tum vero poſito $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, integrale inventum eſt

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\frac{p^{n-m-1}\partial p}{2-p^n} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\frac{q^{n-m-1}\partial q}{2-q^n};$$

formulae ergo ſpeciales ſequuntur.

1. Sit $n = 2$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 1$.

§. 79. Hic igitur erit $v = \sqrt{(1+zz)}$; $F = 1$ et $G = z$; hinc formula ſpecialis $\mathfrak{Z} = \int\frac{\partial z(f+gz)}{(1-zz)\sqrt{(1+zz)}}$, cuius in-

integrale eſt

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\frac{\partial p}{2-pp} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\frac{\partial q}{2-qq},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt{(1+zz)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt{(1+zz)}}.$$

2. Sit $n = 3$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 2$.

§. 80. Hic igitur erit $v = \sqrt[3]{(1+3zz)}$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$; hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{Z} = \int\frac{\partial z\,[f(1+zz) + 2gz]}{(1-zz)\sqrt[3]{(1+3zz)^2}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\frac{p\,\partial p}{2-p^3} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\frac{q\,\partial q}{2-q^3},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}}.$$

3. Sit $n = 3$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 1$.

§. 81. Hic igitur eſt $v = \sqrt[3]{(1+3zz)}$; $F = 1$ et $G = z$; hinc formula ſpecialis

$$\mathfrak{Z} = \int\frac{\partial z\,(f+gz)}{(1-zz)\sqrt[3]{(1+3zz)}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\frac{\partial p}{2-p^3} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\frac{\partial q}{2-q^3},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[3]{(1+3zz)}}.$$

4. Sit $n = 4$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 3$.

§. 82. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}$; $F = 1 + 3zz$ et $G = 3z + z^3$; hinc formula

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\partial z\,[f(1+3zz) + gz(3+zz)]}{(1-zz)\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)^3}},$$

cuius integrale eſt

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \frac{pp\partial p}{2-p^4} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \frac{qq\partial q}{2-q^4},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}} \text{ et } q = \frac{1-z}{\sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}}.$$

5°. Sit $n = 4$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 2$.

§. 83. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(1+6zz+z^4)}$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$; hinc formula ſpecialis:

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\partial z\,[f(1+zz) + 2gz]}{(1-zz)+\sqrt{(1+6zz+z^4)}}.$$

ideoque eius integrale:

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int \frac{p\partial p}{2-p^4} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int \frac{q\partial q}{2-q^4},$$

exiſtente $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$.

6°.

6°. Sit $n = 4$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 1$.

§. 84. Hic igitur erit $v = \sqrt[4]{(1 + 6zz + 4z^4)}$; $F = 1$ et $G = z$; hinc formula:

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z (f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[4]{(1 + 6zz + z^4)}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \tfrac{\partial p}{2 - p^4} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \tfrac{\partial q}{2 - q^4},$$

exiſtente $p = \frac{1 + z}{u}$ et $q = \frac{1 - z}{v}$.

7°. Sit $n = 5$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 4$.

§. 85. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}$;

$$F = 1 + 6zz + z^4 \text{ et } G = 4z(1 + zz);$$

hinc formula

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z [f(1 + 6zz + z^4) + 4gz(1 + zz)]}{(1 - zz)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)^4}},$$

ideoque eius integrale

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \tfrac{p^3 \partial p}{2 - p^5} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \tfrac{q^3 \partial q}{2 - q^5},$$

exiſtente $p = \frac{1 + z}{v}$ et $q = \frac{1 - z}{v}$.

8. Sit $n = 5$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 3$.

§. 86. Hic igitur erit $v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}$;

$$F = 1 + 3zz \text{ et } G = z(3 + zz);$$

hinc formula

$\mathfrak{Z} =$

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\partial z[f(1 + 3zz) + gz(3 + zz)}{(1 - zz)\sqrt[4]{(1 + 10zz + 5z^4)^3}};$$

cuius integrale

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{pp\partial p}{2 - p^5} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{qq\partial q}{2 - q^5},$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{v} \text{ et } q = \frac{1 - z}{v}.$$

9. Sit $n = 5$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 2$.

§. 87. Hic erit $v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}$; $F = 1 + zz$ et $G = 2z$; hinc formula

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\partial z[f(1 + zz) + 2gz]}{(1 - zz)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)^2}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{p\partial p}{2 - p^5} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{q\partial q}{2 - q^5};$$

exiſtente

$$p = \frac{1 + z}{v} \text{ et } q = \frac{1 - z}{v}.$$

10. Sit $n = 5$ et $m = 4$, ideoque $n - m = 1$.

§. 88. Hic erit $v = \sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}$; $F = 1$ et $G = z$; hinc formula

$$\mathfrak{z} = \int \frac{\partial z(f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[5]{(1 + 10zz + 5z^4)}},$$

cuius integrale

 $\mathfrak{z} =$

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{\partial p}{2-p^5}\,\tfrac{1}{2} - (f-g)\int\tfrac{\partial q}{2-q^6},$$

exiſtente

$$p = \tfrac{1+z}{v} \text{ et } q = \tfrac{1-z}{v}.$$

11. Sit $n = 6$ et $m = 1$, ideoque $n - m = 5$.

§. 89. Hic erit $v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}$;

$F = 1 + 10zz + 5z^4$ et $G = 5z + 10z^3 + z^5$,

hinc formula

$$\mathfrak{Z} = \int\frac{\partial z[f(1+10zz+5z^4) + g(5z+10z^3+z^5)]}{(1-zz)\sqrt[6]{(1+15zz+15z^4+z^6)^5}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{p^4\,\partial p}{2-p^6} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{q^4\,\partial q}{2-q^6},$$

exiſtente

$$p = \tfrac{1+z}{v} \text{ et } q = \tfrac{1-z}{v}.$$

12. Sit $n = 6$ et $m = 2$, ideoque $n - m = 4$.

§. 90. Hic erit $v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}$,

$F = 1 + 6zz + z^4$ et $G = 4z(1+zz)$;

hinc formula

$$\mathfrak{Z} = \int\frac{\partial z[f(1+6zz+z^4) + 4gz(1+zz)]}{(1-zz)\sqrt[3]{(1+15zz+15z^4+z^6)^2}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f+g)\int\tfrac{p^3\,\partial p}{2-p^6} - \tfrac{1}{2}(f-g)\int\tfrac{q^3\,\partial q}{2-q^6},$$

ex-

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{v} \text{ et } q = \frac{1-z}{v}.$$

13. Sit $n = 6$ et $m = 3$, ideoque $n - m = 3$.

§. 91. Hic erit $v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}$;

$F = 1 + 3zz$ et $G = 3z + z^3$;

hinc formula

$$♃ = \int \frac{\partial z\,[f(1 + 3zz) + gz(3 + zz)]}{(1 - zz)\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}},$$

cuius integrale

$$♃ = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{pp\,\partial p}{2 - p^6} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{qq\,\partial q}{2 - q^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{v} \text{ et } q = \frac{1-z}{v}.$$

14. Sit $n = 6$ et $m = 4$, ideoque $n - m = 2$.

§. 92. Hic erit $v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}$;

$F = 1 + zz$ et $G = 2z$; hinc formula

$$♃ = \int \frac{\partial z\,[f(1 + zz) + 2gz]}{(1 - zz)\sqrt[3]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}},$$

cuius integrale

$$♃ = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \frac{p\,\partial p}{2 - p^6} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \frac{q\,\partial q}{2 - q^6},$$

exiſtente

$$p = \frac{1+z}{v} \text{ et } q = \frac{1-z}{v}.$$

15. Sit $n = 6$ et $m = 5$, ideoque $n - m = 1$.

§. 93. Hic erit $v = \sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}$; $F = 1$ et $G = z$, hinc formula

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z(f + gz)}{(1 - zz)\sqrt[6]{(1 + 15zz + 15z^4 + z^6)}},$$

cuius integrale

$$\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{2}(f + g)\int \tfrac{\partial p}{2 - p^6} - \tfrac{1}{2}(f - g)\int \tfrac{\partial q}{2 - q^6},$$

exiſtente $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$.

Obſervatio in has formulas.

§. 94. Evolvamus iterum caſum, quo in genere eſt $n = 2m$, ideoque

$$v = \sqrt[2m]{[\tfrac{1}{2}(1 + z)^{2m} + \tfrac{1}{2}(1 - z)^{2m}]};$$

$$F = \tfrac{1}{2}(1 + z)^m + \tfrac{1}{2}(1 - z)^m \text{ et}$$

$$G = \tfrac{1}{2}(1 + z)^m - \tfrac{1}{2}(1 - z)^m,$$

unde fit

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\partial z[A(1 + z)^m + B(1 - z)^m]}{(1 - zz)\sqrt{[\tfrac{1}{2}(1 + z)^{2m} + \tfrac{1}{2}(1 - z)^{2m}]}},$$

cuius integrale poſito $p = \frac{1+z}{v}$ et $q = \frac{1-z}{v}$, ita expreſſum invenitur

$$\mathfrak{Z} = A\int \frac{p^{m-1}\partial p}{2 - p^{2m}} - B\int \frac{q^{m-1}\partial q}{2 - q^{2m}}.$$

Quodſi iam hic ponamus $p^m = u$ et $q^m = t$, erit

$\mathfrak{Z} =$

$$z = \frac{A}{m}\int\frac{\partial u}{2 - uu} - \frac{B}{m}\int\frac{\partial t}{2 - tt}.$$

Supra autem vidimus eſſe

$$\int\frac{\partial u}{2 - uu} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\,\frac{\sqrt{2} + u}{\sqrt{2} - u},$$ ideoque etiam

$$\int\frac{\partial t}{2 - tt} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\,\frac{\sqrt{2} + t}{\sqrt{2} - t},$$

quocirca valor integralis per meros logarithmos ita exprimetur:

$$z = \frac{A}{2m\sqrt{2}}\, l\,\frac{\sqrt{2} + p^m}{\sqrt{2} - p^m} - \frac{B}{2m\sqrt{2}}\, l\,\frac{\sqrt{2} + q^m}{\sqrt{2} - q^m}.$$

DE

DE NOVO GENERE QVAESTIONVM ARITHMETICARVM PRO QVIBVS SOLVENDIS CERTA METHODVS ADHVC DESIDERATVR.

Auctore
L. EVLERO.

Conventui exhib. die 19 Maii 1777.

§. 1.

Occaſionem de huiusmodi quaeſtionibus cogitandi mihi ſuppeditavit problema Diophanteum, quo quaeruntur omnes numeri integri pro N accipiendi, ut ambae iſtae formulae: $A^2 + B^2$ et $A^2 + NB^2$, ſimul quadrata reddi queant. Satis enim conſtat infinitos numeros hinc excludi, quibus conditioni praeſcriptae neutiquam ſatisfieri queat. Veluti ſi fuerit $N = -1$, demonſtratio iam in vulgus nota eſt, quod hae duae formulae $A^2 + B^2$ et $A^2 - B^2$, nullo modo ſimul quadrata evadere queant. Idem quoque evenit, ſi capiatur $N = 2$, vel $N = 3$, vel $N = 4$, vel $N = 5$, vel etiam $N = 6$. Poſt unitatem enim primus numerus idoneus pro N accipiendus eſt $N = 7$; quandoquidem ſumtis $A = 3$ et $B = 4$, ut $A^2 + B^2 = 25$, erit quoque $A^2 +$
NB^2

$NB^2 = 121$. Praeterea vero infiniti alii exhiberi poſſunt huiusmodi numeri idonei tam poſitivi quam negativi; ſemper autem infiniti dantur alii, qui ex hoc ordine penitus excluduntur. Quamobrem quaeſtio non parum eſt curioſa, atque attentione ſatis digna: quemadmodum omnes numeros idoneos pro N accipiendos indagari oporteat? Vbi imprimis criteria deſiderantur, quorum ope numeri idonei ab ineptis diſtingui queant.

§. 2. Ante omnia autem evidens eſt ab hac quaeſtione penitus removeri debere caſum, quo alterum quadratorum A^2 et B^2 evaneſceret, ſiquidem ſi eſſet $B = 0$, ambae formulae ultro erunt quadrata; ſumto autem $A = 0$, omnes numeri quadrati pro N aſſumti ſatisfacerent. His ergo caſibus excluſis primo conditioni priori, qua formula $A^2 + B^2$ quadratum reddi debet, eſt ſatisfaciendum; quod fit ponendo $A = xx - yy$ et $B = 2xy$, tum enim erit $A^2 + B^2 = (xx + yy)^2$, ubi ambos numeros x et y pro lubitu accipere licet, ſi modo excludantur caſus, quibus vel alteruter horum numerorum evaneſcit, vel ambo inter ſe aequales capiuntur; quandoquidem priori caſu foret $B = 0$, poſteriori vero fieret $A = 0$, quos caſus modo a noſtra tractatione excluſimus.

§. 3. Subſtituamus nunc iſtos valores pro A et B aſſignatos in formula $A^2 + NB^2$, et prodibit haec expreſſio: $(xx - yy)^2 + 4Nxxyy$, quam ergo quadratum effici oportet. Potuiſſet illa quidem quadrato cuicunque aequalis ſtatui, indeque valor ipſius N definiri. Verum quia requiritur, ut N prodeat numerus integer, in id erit incumbendum, cuiusmodi quadrato iſta expreſſio aequalis ſtatui debeat,

beat, ut inde pro N numerus integer reſultet. Si enim quadratum illud ſtatuatur $= zz$, ex aequatione $(xx - yy)^2 + 4Nxxyy = zz$, elicitur $N = \frac{zz - (xx - yy)}{4xxyy}$. Neceſſe igitur eſt, ut numerator huius fractionis per denominatorem diviſibilis evadat.

§. 4. In genere autem hoc duplici modo fieri poſſe obſervavi, ſi ſumatur vel $Z = xx + 2\alpha xxyy + yy$, vel $Z = xx + 2\alpha xxyy - yy$. Si enim pro α etiam numeri fracti tam poſitivi quam negativi admittantur, quemcunque valorem habuerit quantitas Z, ea ſemper in utraque harum formularum comprehendi poterit. Evolvamus igitur valores, qui hinc pro noſtro numero N reſultant, ac prior quidem forma nobis dabit

$$N = \alpha\alpha xxyy + \alpha xx + \alpha yy + 1 = (\alpha xx + 1)(\alpha yy + 1);$$

ex altera autem forma reperitur

$$N = \alpha\alpha xxyy + \alpha xx - \alpha yy = (\alpha xx - 1)(\alpha yy + 1) + 1.$$

§. 5. Certum igitur eſt omnes plane valores idoneos ipſius N in his formulis contineri debere, ſi modo pro littera α non ſolum numeri integri, ſed etiam fracti quicunque admittantur; dum pro binis litteris x et y ſufficit ſolos numeros integros aſſumſiſſe, propterea quod numeri illi primitivi A et B ſemper tanquam integri ſpectari poſſunt, ſine ulla quaeſtionis reſtrictione. Quin etiam quilibet valor ipſius N in utraque formula contineri debet, quoniam altera ex altera deduci poteſt. Si enim in priori ponamus $\alpha xx + 1 = \beta xx$, id quod ſemper fieri licet, quoniam pro α et β etiam fractiones admittuntur, ob $\alpha = \frac{\beta xx - 1}{xx}$, prior forma evadet $= \beta xxyy - \beta yy + \beta xx$, quae eſt ipſa forma

forma poſterior, ſi ſcilicet ibi loco α ſcribatur β. Interim tamen, quia haec reductio per fractiones eſt facta, praeſtabit utraque forma primo inventa in ſequentibus uti; quandoquidem eae eſſentialiter a ſe invicem diſtinguuntur, dum prior, utpote productum ex duobus factoribus, ſemper numeros compoſitos producit, poſterior vero etiam numeros primos ſuppeditare poteſt. Veluti ponendo $\alpha = 1$; $x = 2$ et $y = 1$, prodit $N = 7$.

§. 6. Quin etiam in genere litteram α negative accipere licet, hincque quatuor formulas generales pro N nanciſcemur, quae erunt:

I. $N = (\alpha x x + 1)(\alpha y y + 1)$,
II. $N = (\alpha x x - 1)(\alpha y y + 1) + 1$,
III. $N = (\alpha x x - 1)(\alpha y y - 1)$,
IV. $N = (\alpha x x + 1)(\alpha y y - 1) + 1$,

Evidens autem eſt quartam formam a ſecunda non eſſe diuerſam, quia tantum numeri x et y permutantur, qui vero ex ſua natura ſunt permutabiles.

§. 7. Cum igitur totum negotium eo redeat, ut hinc numeri integri pro N eliciantur, manifeſtum eſt hoc ſemper uſu venire, quando litterae α valores integri tribuuntur. Hos igitur caſus primum conſideremus, indeque actu omnes valores ipſius N usque ad 100 eliciamus. Vbi probe meminiſſe oportet, amborum numerorum x et y neutrum nihilo aequalem ſtatui poſſe; neque vero etiam inter ſe aequales capi debere. Sumamus igitur primo $\alpha = 1$, ac prima forma erit $N = (x x + 1)(y y + 1)$. Quia igitur numeri

meri in forma $zz+1$ contenti, ſunt: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101; producta ex binis horum numerorum valores idoneos pro N exhibebunt, ſi modo quadrata horum numerorum excludantur. Hoc obſervato numeri idonei centenario non maiores erunt 10, 20, 34, 50, 52, 74, 85, 100.

§. 8. Manente $\alpha = 1$ forma tertia dabit:

$$N = (xx - 1)(yy - 1).$$

Hinc cum numeri formae $zz - 1$ ſint 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, producta ex binis horum numerorum diverſis, quoque valores idoneos pro N praebebunt, qui ad 100 usque erunt 24, 45, 72. Secunda autem forma, caſu $\alpha = 1$, erit $N = (xx - 1)(yy + 1) + 1$, quae forma duplicis generis numeros involvit, qui ſunt

$$zz - 1 = 0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ 48,$$

$$zz + 1 = 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ 50,$$

et ſinguli numeri ſuperioris ſeriei per ſingulos inferioris multiplicati, ſi ad productum unitas adiiciatur, dabunt valores idoneos pro N, ſi modo nullus ſuperiorum per ſubſcriptum multiplicetur. Hinc ergo valores idonei pro N ad 100 usque erunt: 7, 17, 31, 41, 49, 52, 71, 76, 79, 97.

§. 9. Sumamus nunc $\alpha = 2$, et ex forma prima habebimus $N = (2xx + 1)(2yy + 1)$; unde cum numeri formae $2zz + 1$ ſint 3, 9, 19, 33, 51, 73, 99, quorum producta ex binis diverſis ſunt ſumenda, hinc prodeunt pro N ſequentes numeri: 27, 57, 99. Forma autem tertia dat $N = (2xx - 1)(2yy - 1)$. Hinc cum numeri formae $2zz - 1$ ſint 1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, producta ex binis diverſis praebent ſequentes valores idoneos pro N: 7,

17,

17, 31, 49, 71, 79. Forma autem ſecunda praebet $N = (2xx - 1)(2xx + 1) + 1$, ubi duplicis generis factores erunt:

$$2zz - 1 = 1, 7, 17, 49, 71, 97,$$
$$2zz + 1 = 3, 9, 19, 51, 73, 100.$$

Hinc excluſis numeris ſubſcriptis producta ex ſuperioribus per inferiores unitate aucta dabunt valores pro N idoneos, qui ad 100 usque ſunt hi: 10, 20, 22, 52, 74, 94, 101.

§. 10. Sit nunc $\alpha = 3$, ac prima forma dat

$$N = (3xx + 1)(3yy + 1),$$

unde numeri huius formae $3zz + 1$ ſunt 4, 13, 28, 49, 76. Hinc igitur producta ex binis diverſis ſumendo, unicus tantum oritur numerus idoneus pro N infra 100, ſcilicet 52. At ex forma tertia fit $N = (3xx - 1)(3yy - 1)$; unde quia numeri formae $3zz - 1$ ſunt 2, 11, 26, 47, 74, producta ex binis diverſis dant 22, 52, 94. Ex forma autem ſecunda

$$N = (3xx - 1)(3yy + 1) + 1,$$

prodeunt ſequentes pro N valores: 27, 45, 57, 99.

§. 11. Superfluum foret pro α ſumere 4. Nam quia $4xx$ et $4yy$ ſunt quadrata, caſus eodem rediret, ac $\alpha = 1$. Sit igitur $\alpha = 5$, ac prima forma dat

$$N = (5xx + 1)(5yy + 1),$$

unde infra 100 nullus numerus idoneus prodit. Ex forma autem tertia

$$N = (5xx - 1)(5yy - 1),$$

 prodit

prodit 76. At ſecunda forma

$$N = (5xx - 1)(5yy + 1) + 1,$$

praebet 85.

§. 12. Si porro ſtatuere velimus $\alpha = 6$, nullus numerus infra centenarium inde naſcitur. Quamobrem ſi omnes numeros inventos colligamus, valores integri pro α aſſumti pro N ſequentes numeros idoneos in ordine diſpoſitos praebent: 7, 10, 17, 20, 22, 24, 27, 31, 34, 41, 45, 49, 50, 52, 57, 71, 72, 74, 76, 79, 85, 94, 97, 99, 100.

§. 13. Plurimum autem falleretur, ſi quis putaret plures valores idoneos usque ad centenarium non dari. Nullum enim eſt dubium, quin etiam valores fracti pro α aſſumti quosdam quoque centenario minores numeros pro N producant, quos caſus ut perſcrutemur, neceſſe eſt in eas fractiones pro α accipiendas inquirere, unde valores integri pro N oriri queant, id quod in ſequente problemate expediemus.

Problema

Inveſtigare eas fractiones pro α accipiendas, unde iſta formula generalis: $(\alpha xx \pm 1)(\alpha yy \pm 1)$ *valores integros adipiſci poſſit.*

Solutio.

§. 14. Iſta inveſtigatio potiſſimum pendet ab indole binorum numerorum x et y, quos non ſolum ſemper tanquam integros, ſed etiam primos inter ſe ſpectare licet. Res autem nunc praecipue huc redit, vtrum ambo hi numeri x et y factores habeant, nec ne? quandoquidem ab his factoribus

ribus fractiones per α introductae tolli debent. Statuamus igitur in genere $x = pq$ et $y = rs$, quippe qua poſitione defectus factorum non excluditur, quia nihil impedit, quo minus pro p et s unitas accipiatur. Caeterum quia x et y ſunt primi inter ſe, p, q, r, s ut primi inter ſe ſpectari poterunt; hoc modo formula propoſita erit

$$N = (\alpha ppqq \pm 1)(\alpha rrss \pm 1).$$

§. 15. Statuamus nunc pro α hanc fractionem: $\alpha = \frac{a}{qqss}$, ubi iam littera a numeros integros quoscunque deſignet; atque formula propoſita ſequentem induet formam:

$$\left(\frac{app}{ss} \pm 1\right)\left(\frac{arr}{qq} \pm 1\right) = \left(\frac{app \pm ss}{ss}\right)\left(\frac{arr \pm qq}{qq}\right).$$

Vbi obſervaſſe iuvabit, quia tam numeri p et s quam q et r ſunt primi inter ſe, neutram harum duarum fractionum in numerum integrum abire poſſe, propterea quod ex numero a tam factor qq quam ss excluditur; verum permutentur ambo denominatores, ut obtineatur iſta forma:

$$\left(\frac{app \pm ss}{qq}\right)\left(\frac{arr \pm qq}{ss}\right),$$

ubi iam nihil impedit, quo minus utraque haec fractio numero integro aequari poſſit, quandoquidem fieri poteſt, ut tam $app \pm ss$ diviſibile fiat per qq, quam $arr \pm qq$ diviſibile per ss.

§. 16. Vt autem prius eveniat, ex proprietatibus numerorum iam ſatis cognitis oportet ut q ſit numerus formae $aff \pm gg$; tum enim ſemper pro p numeros integros tales invenire licebit, ut forma $app + ss$ fiat diviſibilis per qq. Simili modo etiam requiritur, ut ſit s formae $aff \pm gg$;

tum

tum enim pariter ſemper numeri integri pro r aſſignari poterunt, quibus forma $arr \pm qq$ diviſionem per ss admittat.

§. 17. Hoc problemate ſoluto, ſi ſtatuamus $x = pq$ et $y = rs$, ſumto $\alpha = \frac{a}{qqss}$, tres noſtrae formae generales pro N inventae ſequenti modo repraeſentabuntur:

$$\text{I. } N = \left(\frac{app + ss}{qq}\right)\left(\frac{arr + qq}{ss}\right),$$

$$\text{II. } N = \left(\frac{app - ss}{qq}\right)\left(\frac{arr + qq}{ss}\right) + 1,$$

$$\text{III. } N = \left(\frac{app - ss}{qq}\right)\left(\frac{arr - qq}{ss}\right),$$

ubi pro litteris p, q, r, s, eiusmodi valores accipi debent, ut binae illae fractiones ad numeros integros revocentur; ex quo intelligitur, has formas infinities eſſe generaliores quam praecedentes.

§. 18. Maximum autem diſcrimen hinc ſtatim elucet, quod cum priores formae nunquam ad numeros negativos pro N perducant, hic tam forma ſecunda quam tertia innumerabiles alios numeros negativos exhibere queat, quando ſcilicet vel $app < ss$, vel $arr < qq$, ex quo ſolo iam certo ſequitur, has formulas poſteriores innumerabiles praebere poſſe valores idoneos pro N, qui in formulis primo inventis plane non contineantur.

§. 19. Hae autem formulae ita latiſſime patent, ut difficillimum ſit omnes caſus in iis contentos repraeſentare; quamobrem caſus ſaltem quosdam maxime ſpeciales evolvamus. Ac primo quidem ſumamus $a = 1$ et $s = 1$, et forma noſtra prima dabit $N = \left(\frac{pp + 1}{qq}\right)(rr + qq)$, ubi ergo

tan-

tantum opus eſt, ut qq fiat diviſor formulae $pp + 1$, id quod ſtatim evenit ſumendo $p = 7$ et $q = 5$, ſicque enim fiet $N = 2(rr + 25) = 2rr + 50$. Hinc autem pro N infra 100 ſequentes novi prodeunt valores: 58, 68, 82.

§. 20. Quoniam ſecunda forma etiam hoc modo referri poteſt: $(\frac{app + ss}{qq})(\frac{arr - qq}{ss}) + 1$, ſumto $a = 1$ et $s = 1$ erit $N = (\frac{pp + 1}{qq})(rr - qq) + 1$. Hinc ſumto $p = 7$ & $q = 5$, erit $N = 2rr - 49$, unde primum pro N iſti numeri negativi prodeunt: -17, -31, -41, -47, poſitivi autem infra 100 hinc oriundi ſunt: 23, 49, 19. Deinde vero formula $pp + 1$ per numerum quadratum dividi nequit, usque ad $p = 18$ et $q = 5$, unde prodit $\frac{pp + 1}{qq} = 13$, ideoque ex forma prima fit

$$N = 13(rr + 25) = 13rr + 325,$$

ex ſecunda autem forma fit $N = 13rr - 324$. Hinc autem nulli numeri infra 100 oriuntur.

§. 21. Maneat $a = 1$ et $s = 1$, ac forma tertia dabit

$$N = (\frac{pp - 1}{qq})(rr - qq),$$

ſecunda vero dabit

$$N = (\frac{pp - 1}{qq})(rr + qq) + 1,$$

quae formulae ſatis ſunt foecundae in numeris idoneis pro N exhibendis, quoniam pluribus modis $\frac{pp - 1}{qq}$ poteſt eſſe numerus integer. Primo ſcilicet ſumto $p = 3$ capi poterit $q = 2$, unde prior forma erit $N = 2rr - 8$, poſterior vero $N = 2rr + 9$; illa igitur praebet hunc numerum negativum: $N = -6$, hos vero poſitivos: 10, 24, 42, 64, 90; ex poſteriore vero oriuntur hi poſitivi: 11, 17, 27, 41, 59, 81.

§. 22.

§. 22. Sit nunc $p = 5$ et $q = 2$, et ambae formulae erunt $N = 6rr - 24$ et $N = 6rr + 25$. Ex illa prodit numerus negativus -18; poſitivi vero 30, 72. Ex altera vero oriuntur hi numeri: 31, 49, 79. Sumatur nunc $p = 7$ et $q = 4$, et ambae formulae erunt $N = 3rr - 48$ et $N = 3rr + 49$. Prior dat hos negativos: -45, -36, -21; poſitivos vero hos: 27, 60, 99. Altera forma dat hos poſitivos: 52, 61, 76, 97.

§. 23. Sumamus nunc $p = 8$ et 3, et formulae noſtrae erunt $N = 7rr - 63$ et $N = 7rr + 64$. Ex priore oriuntur hi negativi: -56, -35; et poſitivus 49. Secunda vero forma praebet hos poſitivos: 71, 92.

§. 24. Sumto porro $p = 9$, capi poterit $q = 4$, unde formulae noſtrae fiunt $N = 5rr - 80$ et $N = 5rr + 81$. Prima praebet hos negativos: -75, -60, -35; poſitivos vero hos: 45, 100. Altera vero praebet 86.

§. 25. Sumto porro $p = 10$, erit $q = 3$, et formulae erunt $N = 11rr - 99$ et $N = 11rr + 100$. Prima forma dat hos negativos numeros: -88, -55; poſitivum vero 77. Si hoc modo ulterius progredi velimus, unicus novus numerus infra 100 reperitur, ſcilicet -90.

§. 26. Hactenus igitur ſequentes numeros negativos pro N ſumus adepti: -6, -17, -18, -21, -31, -35, -36, -41, -45, -47, -55, -56, -60, -75, -88, -90; at vero numeri poſitivi hactenus inventi et in ordinem redacti ſunt: 7, 10, 11, 17, 20, 22, 23, 24, 27, 30, 31, 34, 41, 42, 45, 49, 50, 52, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 68, 71, 72, 74, 76, 77, 79, 81, 82, 85, 86, 90, 92, 94, 97, 99, 100.

§. 27.

§. 27. Hic ordo numerorum negativorum adhuc ſatis eſt magnus, dum ex caſibus magis complicatis inſuper plures alii oriuntur; at vero ordo poſitivorum ex talibus caſibus vix uno vel altero augebitur, uti mox docebimus. Maneat adhuc $a = 1$, at ponatur $s = 2$, atque forma prima dabit $N = (\frac{pp+4}{qq})(\frac{rr+qq}{4})$, quae autem, quoniam ſumma duorum quadratorum nunquam per 4 eſt diviſibilis, praetermitti debet; hinc autem forma ſecunda praebet

$$N = (\frac{pp+4}{qq})(\frac{rr-qq}{4}) + 1.$$

Hic iam ſumatur $p = 11$ et $q = 5$, fietque $N = 5(\frac{rr-25}{4}) + 1$. Statuatur porro $r = 2t + 1$, eritque $N = 5(tt + t) - 29$ unde naſcuntur iſti numeri negativi: -19, -29; ad poſitivos vero hinc nullus accedit.

§. 28. Manente $s = 2$ et $a = 1$, forma tertia praebet

$$N = (\frac{pp-4}{qq})(\frac{rr-qq}{4}),$$

ſecunda vero

$$N = (\frac{pp-4}{qq})(\frac{rr+qq}{4}) + 1;$$

quae autem, ob rationem ante memoratam, eſt omittenda. Sumatur nunc primo $p = 7$ et $q = 3$, eritque $N = 5(\frac{rr-9}{4})$, quae forma, poſito $r = 2t + 1$, abit in $N = 5(tt + t) - 10$, unde oritur numerus negativus -10, poſitivus vero nullus novus hinc oritur. Sumto autem $p = 11$, erit

$$N = 13(\frac{rr-9}{4}) = 13(tt + t - 2),$$

unde naſcitur iſte numerus negativus: -26, poſitivorum autem nullus novus accedit.

§. 29. Caſu autem poſtremo ſi ſumamus $p = 1$ et $q = 1$, erit $N = -3\left(\frac{rr-1}{4}\right)$, quae poſito $r = 2t+1$ abit in hanc: $N = -3(tt+t)$, unde oriuntur ſequentes numeri negativi: -6, -18, -36, -60, -90, qui autem omnes iam ſunt inventi. Sumatur vero $s = 3$ et $p = 1$ et $q = 2$, orietur hinc forma $N = -2\left(\frac{rr-4}{9}\right)$. Ponatur hic $r = 9t+2$ fietque $N = -2(9tt+4t)$, unde ſumto $t = -1$, prodit $N = -10$. Ex $t = 1$ fit $N = -26$. At $t = -2$ praebet -56.

§. 30. Nimis longum autem foret omnes huiusmodi caſus proſequi; praeſertim cum nunquam certi eſſe poſſemus omnes valores idoneos pro N inveniſſe, ſiquidem terminus ultra 100 extenderetur; hanc ob rem tantum aliquos caſus ſpeciales ſubiungamus, unde ſaltem novi numeri poſitivi deduci queant. Pro forma autem prima, manente $a = 1$, erit $N = \left(\frac{pp+ss}{qq}\right)\left(\frac{rr+qq}{ss}\right)$, ubi iam notavimus hos factores integros fieri non poſſe, niſi numeri q et s ſint ſummae duorum quadratorum. Sin autem pro forma ſecunda ſit

$$N = \left(\frac{pp+ss}{qq}\right)\left(\frac{rr-qq}{ss}\right)+1,$$

ſufficiet ut tantum q ſit ſumma duorum quadratorum. Hic ergo ſumamus $p = 4$ et $s = 3$, at vero $q = 5$, ut prodeat

$$N = \frac{rr-25}{9}+1 = \frac{rr-16}{9}.$$

Poſito ergo hic $r = 9t+4$, prodit $N = 9tt+8t$, unde autem nulli novi numeri deducuntur.

§. 31. Conſideremus caſum, quo $\frac{pp+ss}{qq} = 1$, ſimul vero ambo numeri q et s ſint ſummae duorum quadratorum, ut prima forma locum habere poſſit, id quod eveniet

niet ſumendo $p = 12$, $s = 5$ et $q = 13$, fietque $N = \frac{rr + 169}{25}$, quae fractio ſi evadat integra caſu $r = f$, etiam numeros integros dabit ponendo $r = 25t \pm f$; tum enim prodibit

$$N = 25tt \pm 2tf + \frac{ff + 169}{25},$$

haec conditio autem adimplebitur, ſumendo $r = 25t \pm 9$, hinc enim fiet $N = 25tt \pm 18t + 10$, unde oriuntur ſequentes valores: 10, 17, 53, 74, quorum 53 plane eſt novus. Si forma ſecunda pro iisdem poſitionibus uti vellemus, haberetur

$$N = \frac{rr - 169}{25} + 1 = \frac{rr - 144}{25},$$

quae ſi ponatur $r = 25t \pm 13$, tranſit in hanc formam:

$$N = 25tt \pm 26t + 1, \text{ ſive } N = (t \pm 1)(25t \pm 1),$$

unde patet hanc formam iam in principali, quae erat

$$N = (\alpha xx \pm 1)(\alpha yy \pm 1)$$

contineri, ſumendo $\alpha = t$; $x = 1$ et $y = 5$, unde novi numeri non ſunt expectandi.

§. 32. Ex iis igitur, quae hactenus ſunt tradita, patet valores idoneos poſitivos pro numero N usque ad 100 hoc ordine procedere:

7, 10, 11, 17, 20, 22, 23, 24, 27, 30, 31, 34, 41, 42
45, 49, 50, 52, 53, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 68, 71, 72
74, 76, 77, 79, 81, 82, 85, 86, 90, 92, 94, 97, 99, 100.

Sequentes autem ex hoc ordine excluſi ſunt putandi:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21,
25, 26, 28, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 43, 44
46, 47, 48, 51, 54, 55, 56, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 70
73, 75, 78, 80, 83, 84, 87, 88, 89, 91, 93, 95, 96, 98.

Quomodocunque autem hos binos ordines contemplemur, nullum plane pateſcit criterium, quo numeri idonei et inepti a ſe invicem diſtinguantur; unde affirmare haud dubito, certam methodum huiusmodi quaeſtiones reſolvendi in Analyſi etiamnunc eſſe incognitam.

§. 33. Cum autem quaeſtio, quam hactenus tractavimus, ſit quodammodo complicata, aliquas quaeſtiones ſimpliciores, ſpeciminis loco, hic ſubiungam, quas, quam diu methodus memorata latuerit, pariter reſolvere non licet.

Quaeſtio I.

§. 34. *Si litterae x et y denotent numeros quoscunque rationales, tam fractos, quam integros, inveſtigare omnes numeros integros N, qui in hac formula: $N=(xx+1)(yy+1)$ contineantur.* Hic quidem primo patet, ſumto $x=0$ ſequentes numeros occurrere:

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, etc.

Praeterea vero manifeſtum eſt in iſta forma non ſolum quadrata ſingulorum horum numerorum, ſed etiam producta ex binis quibusque occurrere, quae ſunt

4, 10, 20, 25, 34, 50, 52, 74, 100.

Hi ſcilicet numeri ex valoribus integris litterarum x et y naſcuntur; verum innumerabiles alii oriri poſſunt ex valoribus fractis. Si enim ponamus $x=\frac{p}{q}$ et $y=\frac{r}{s}$, fiet

$$N=\left(\frac{pp+qq}{qq}\right)\left(\frac{rr+ss}{ss}\right), \text{ ſive } N=\left(\frac{pp+qq}{ss}\right)\left(\frac{rr+ss}{qq}\right),$$

ubi manifeſtum eſt infinitis modis fieri poſſe, ut tam $pp+qq$ per ss quam $rr+ss$ per qq diviſionem admittat. Hic igitur potiſſimum certa methodus deſideratur, quae omnes plane

ne valores idoneos pro N, usque ad terminum quemcunque, aſſignare valeat.

Quaeſtio II.

§. 35. *Si x et y denotent omnes numeros rationales, tam fractos, quam integros, inveſtigare omnes numeros integros, qui in hac formula:* $N = (xx - 1)(yy - 1)$ *contineantur.* Hic autem ex valoribus integris ipſarum x et y numeri reſultantes facile aſſignantur, ac deſcribi poſſunt; at vero ex fractionibus $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{s}$ innumerabiles alii reſultare poſſunt, quorum indolem et nexum cum prioribus perſcrutari — hoc opus hic labor eſt!

METHODVS FACILIS INVENIENDI SERIES PER SINVS COSINVSVE ANGVLORVM MVLTIPLORVM PROCEDENTES, QVARVM VSVS IN VNIVERSA THEORIA ASTRONOMIAE EST AMPLISSIMVS.

Auctore
L. EVLERO.

Conventui exhibita die 26 Maii 1777.

§. 1.

Notum eſt in Aſtronomiae theoria omnes expreſſiones Analyticas in huiusmodi ſeries converti ſolere, quarum termini ſive per ſinus ſive coſinus multiplorum cuiuspiam anguli procedant. Veluti in motu planetarum regulari, ſi anomalia vera fuerit $= \phi$, orbitae excentricitas $= e$ et ſemiparameter $= b$, diſtantia planetae a ſole eſt $= \frac{b}{1 + e \operatorname{coſ}. \phi}$. quae formula in talem ſeriem:

$$A + B \operatorname{coſ}. \phi + C \operatorname{coſ}. 2\phi + D \operatorname{coſ}. 3\phi + E \operatorname{coſ}. 4\phi + \text{etc.}$$

evolvi ſolet, propterea quod eius uſus in tabulis Aſtronomicis condendis maximum adiumentum affert. Deinde etiam expreſſio temporis tali formula integrali: $\int \frac{\partial \phi}{(1 + e \operatorname{coſ}. \phi)^2}$ expreſſa in huiusmodi ſeriem converti convenit. Ac ſi omnia elementa per

per anomaliam mediam exprimere velimus, quae ſit $= \theta$, totum negotium, quod non parum laboris poſtulat, ſemper ad inventionem talis ſeriei:

$$A + B \operatorname{coſ.} \theta + C \operatorname{coſ.} 2\theta + D \operatorname{coſ.} 3\theta + E \operatorname{coſ.} 4\theta + \text{etc.}$$

reducitur; unde deinceps, ſive per differentiationem, ſive per integrationem, ſimiles ſeries ſinus eorundem angulorum multiplorum eliciuntur.

§. 2. Quin etiam pro inveſtigatione motuum irregularium, qui oriuntur ex mutua planetarum actione, cardo rei in evolutione idonea huiusmodi formulae: $(1 + a \operatorname{coſ.} \Phi)^{-\frac{3}{2}}$ verſari ſolet, quam formulam pariter in eiusmodi ſeriem:

$$A + B \operatorname{coſ.} \Phi + C \operatorname{coſ.} 2\Phi + D \operatorname{coſ.} 3\Phi + \text{etc.}$$

evolvi convenit, ubi Φ denotat angulum, quo bini planetae ſe mutuo attrahentes, ex ſole viſi, diſtare a ſe invicem videntur. Tum vero etiam ſi tales inveſtigationes ulterius proſequi velimus, occurrunt quoque altiores poteſtates, veluti $(1 + a \operatorname{coſ.} \Phi)^{-\frac{5}{2}}$ et $(1 + a \operatorname{coſ.} \Phi)^{-\frac{7}{2}}$ etc. quarum evolutio in tales ſeries profundiſſimas inveſtigationes et calculos plerumque valde taedioſos poſtulat. Evenire quoque poteſt in huiusmodi inveſtigationibus ut formulae irrationales adhuc magis complicatae in calculum invehantur, quas ſimili modo in tales ſeries evolvi oporteat.

§. 3. Cum igitur talium formularum evolutio non ſolum in Aſtronomia maximi ſit momenti, ſed etiam per methodos vulgo uſitatas ſummum laborem exigant, aliam methodum novam ac facilem proponam, cuius ope omnes

huius-

huiusmodi formulae, quantumvis fuerint perplexae, facili labore in tales ſeries converti queant. Loquor autem hic potiſſimum de eiusmodi formulis, quae more ſolito in huiusmodi ſeries reſolvuntur:

$$\alpha + \beta \text{ coſ. } \Phi + \gamma \text{ coſ. } \Phi^2 + \delta \text{ coſ. } \Phi^3 + \varepsilon \text{ coſ. } \Phi^4 + \text{etc.}$$

cuius ſcilicet termini per poteſtatas ipſius coſ. Φ procedant. Quoniam enim quaelibet poteſtas ipſius coſ. Φ in coſinus multiplorum eiusdem anguli evolvi poteſt, evidens eſt per evolutionem ſingulorum terminorum ſeriem eiusdem formae oriri debere, qualem hic tractare conſtitui.

§. 4. Quaecunque autem formula hoc modo evolvenda proponatur, quoniam eam ſemper ut certam functionem anguli Φ ſpectare licet, eam more iam recepto hoc charactere $\Gamma : \Phi$ deſignabo, quam quidem functionem ita comparatam eſſe aſſumo, ut more ſolito in talem ſeriem:

$$\alpha + \beta \text{ coſ. } \Phi + \gamma \text{ coſ. } \Phi^2 + \delta \text{ coſ. } \Phi^3 + \varepsilon \text{ coſ. } \Phi^4 + \text{etc.}$$

evolvi queat; quam tamen in praeſenti negotio exhibere nihil attinet. Generaliter igitur ſtatuamus fieri

$$\Gamma : \Phi = A + B \text{ coſ. } \Phi + C \text{ coſ. } 2\Phi + D \text{ coſ. } 3\Phi + E \text{ coſ. } 4\Phi + \text{etc.}$$

ita ut totum negotium iam huc redeat, quemadmodum valores litterarum A, B, C, D, etc. inveſtigari oportet, id quod methodo, quam hic ſum expoſiturus, ſine ullis calculi ambagibus praeſtari poterit.

§. 5. Ante autem quam hoc negotium adgrediar, plurimum intererit obſervaſſe, iſtas litteras neceſſario ſeriem valde convergentem conſtituere debere, ita ut quo longius procedamus, earum valores continuo magis decreſcant. Quoniam

niam enim, ſi angulus Φ exigua particula augeatur, etiam ipſe valor functionis $\Gamma:\Phi$ tantum parvam mutationem patitur, facile oſtendi poteſt, litteram verbi gratia milleſimam in hoc ordine valde paruam eſſe debere. Namque ſi iſte terminus fuerit M coſ. $1000\,\Phi$, eius valor pro caſu $\Phi = 0$ erit $= M$. Augeamus nunc hunc angulum milleſima parte ſemiperipheriae π, eritque $1000\,\Phi = \pi$, ideoque iſte terminus $= -M$, ita ut facta hac exigua mutatione eius valor a $+M$ usque ad $-M$ immutetur. Vnde patet, ne iſta mutatio in valore functionis $\Gamma:\Phi$ enorme diſcrimen pariat, illam litteram M vehementer parvam eſſe debere, id quod multo magis evenire debet in litteris quae coſinus adhuc maiorum multiplorum afficiunt. Haec autem tantum a terminis ab initio maxime remotis ſunt intelligenda, quandoquidem utique evenire poteſt, ut ab initio ſeriei termini A, B, C, D, E, etc. adeo creſcendo procedant, et progreſſionem maxime regularem conſtituant.

§. 6. Quoniam igitur functio propoſita $\Gamma:\Phi$ pro data accipitur, eius valores pro quolibet angulo determinato, qui loco Φ aſſumitur, actu exhiberi poterunt. Hinc ſi primo ſumamus $\Phi = 0$, erit

$$\Gamma:0 = A + B + C + D + E + \text{etc.}$$

Sin autem ſumamus $\Phi = \pi$, erit

$$\Gamma:\pi = A - B + C - D + E - F + \text{etc.}$$

unde ſequitur fore

$$\tfrac{1}{2}\Gamma:0 + \tfrac{1}{2}\Gamma:\pi = A + C + E + G + I + \text{etc.}$$

ubi termini alterni iam ſunt excluſi. Statuamus nunc Φ $\Phi = \frac{\pi}{2}$, eritque

$$\Gamma : \tfrac{\pi}{2} = A - C + E - G + I - L + N - \text{etc.}$$

Quare ſi iſta ſeries ad praecedentem addatur, ſemiſumma ambarum erit

$$\tfrac{1}{4}\Gamma : 0 + \tfrac{1}{4}\Gamma : \pi + \tfrac{1}{2}\Gamma \tfrac{\pi}{2} = A + E + I + N + Q + \text{etc.}$$

ſicque valor ipſius A iam prope innoteſceret, ſi litteras ſequentes E, I, N etc. negligere vellemus.

§. 7. Quoniam hoc modo ſaltus ab A usque ad E eſt factus, ſimili modo ſaltus adhuc ampliores effici poterunt. Sumamus enim $\Phi = \frac{\pi}{4}$, et ponamus brevitatis gratia coſ. $\frac{\pi}{4} = \alpha$, unde ſit coſ. $\frac{3\pi}{4} = -\alpha$; coſ. $\frac{5}{4}\pi = -\alpha$; coſ. $\frac{7}{4}\pi = \alpha$; etc. eritque

$$\Gamma : \tfrac{1}{4}\pi = A + \alpha B - \alpha D - E - \alpha G + \alpha I + K + \alpha L \text{ etc.}$$

Faciamus nunc $\Phi = \frac{3}{4}\pi$, ac reperiemus

$$\Gamma : \tfrac{3}{4}\pi = A - \alpha B + \alpha D - E + \alpha G - \alpha I + K - \alpha L \text{ etc.}$$

Harum igitur duarum ſerierum ſemiſumma erit

$$\tfrac{1}{2}\Gamma : \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Gamma : \tfrac{3}{4}\pi = A - E + K - N + R \text{ etc.}$$

Quodſi ergo huic ſeriei addamus eam, quam paragrapho praecedente invenimus, erit

$$\tfrac{1}{8}\Gamma : 0 + \tfrac{1}{8}\Gamma : \pi + \tfrac{1}{4}\Gamma : \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\Gamma : \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\Gamma : \tfrac{3}{4}\pi = A + I + R + \text{etc.}$$

quae expreſſio iam multo propius dabit verum valorem ipſius A, ob parvitatem terminorum ſequentium.

§. 8. Simili modo ex valoribus $\Phi = \frac{1}{8}\pi$; $\Phi = \frac{3}{8}\pi$; $\Phi = \frac{5}{8}\pi$ et $\Phi = \frac{7}{8}\pi$, ſeries colligi poterit $A - I + R$, etc. quae cum illa coniuncta dabit $A + R$ etc. unde iam ſatis tuto verus valor ipſius A reſultabit. Verum quia hoc modo procedendo mox totum alphabetum exhauriremus, magis ido-

idonea ratione litteras A, B, C, D, etc. deſignemus, unde ſtatim liqueat, ad quodnam multiplum anguli Φ ſingulae referantur. Ponamus ſcilicet $A = (0)$; $B = (1)$; $C = (2)$; $D = (3)$; $E = (4)$; etc. hoc modo ſeries poſtremo loco inventa erit

$$(0) + (8) + (16) + (24) + (32) + (40) + \text{etc.}$$

§. 9. Satuamus iam ſucceſſive pro Φ angulos $\frac{1}{8}\pi$; $\frac{3}{8}\pi$; $\frac{5}{8}\pi$; $\frac{7}{8}\pi$; ac ponendo brevitatis gratia $\operatorname{coſ.}\frac{1}{8}\pi = \beta$; $\operatorname{coſ.}\frac{3}{8}\pi = b$, ut ſit $\beta\beta + bb = 1$, erit $\operatorname{coſ.}\frac{5}{8}\pi = -b$; $\operatorname{coſ.}\frac{7}{8}\pi = -\beta$; $\operatorname{coſ.}\frac{9}{8}\pi = -\beta$; $\operatorname{coſ.}\frac{11}{8}\pi = -b$; $\operatorname{coſ.}\frac{13}{8}\pi = +b$; $\operatorname{coſ.}\frac{15}{8}\pi = +\beta$; $\operatorname{coſ.}\frac{17}{8}\pi = \beta$; $\operatorname{coſ.}\frac{19}{8}\pi = b$; etc. tum vero ſeries hinc reſultantes erunt:

$$\begin{aligned}\Gamma : \tfrac{1}{8}\pi = {} & (0) + \beta(1) + \alpha(2) + b(3) + 0(4) - b(5) - \alpha(6) \\ & - \beta(7) - 1(8) - \beta(9) - \alpha(10) - b(11) \\ & - 0(12) + b(13) + \alpha(14) + \beta(15) + 1(16).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma : \tfrac{3}{8}\pi = {} & (0) + b(1) - \alpha(2) - \beta(3) + 0(4) + \beta(5) + \alpha(6) \\ & - b(7) - 1(8) - b(9) + \alpha(10) + \beta(11) + 0(12) \\ & - \beta(13) - \alpha(14) + b(15) + 1(16).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma : \tfrac{5}{8}\pi = {} & (0) - b(1) - \alpha(2) + \beta(3) + 0(4) - \beta(5) + \alpha(6) \\ & + b(7) - 1(8) + b(9) + \alpha(10) - \beta(11) + 0(12) \\ & + \beta(13) - \alpha(14) - b(15) + 1(16).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma : \tfrac{7}{8}\pi = {} & (0) - \beta(1) + \alpha(2) - b(3) + 0(4) + b(5) - \alpha(6) \\ & + \beta(7) - 1(8) + \beta(9) - \alpha(10) + b(11) - 0(12) \\ & - b(13) + \alpha(14) - \beta(15) + 1(16).\end{aligned}$$

Iam harum quatuor ſerierum ſumma per quatuor diviſa erit

 (0) —

$(0) - (8) + (16) - (24) + (32) - (40) + (48) - (56)$ etc.
cuius ergo ſumma erit

$$\tfrac{1}{4}\Gamma : \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}\Gamma : \tfrac{3}{8}\pi + \tfrac{1}{4}\Gamma : \tfrac{5}{8}\pi + \tfrac{1}{4}\Gamma : \tfrac{7}{8}\pi.$$

§. 10. Quodſi ergo huic ſeriei addatur illa, quae §. 8. fuerat inventa, diviſione facta per 2 habebimus

$$(0) + (16) + (32) + (48) + (64) + \text{etc.}$$

cuius ergo valor erit

$$\tfrac{1}{16}\Gamma : 0 + \tfrac{1}{16}\Gamma : \pi + \tfrac{1}{8}\Gamma : \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{8}\Gamma : \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{8}\Gamma : \tfrac{3}{4}\pi + \tfrac{1}{8}\Gamma : \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{8}\Gamma : \tfrac{3}{8}\pi + \tfrac{1}{8}\Gamma : \tfrac{5}{8}\pi + \tfrac{1}{8}\Gamma : \tfrac{7}{8}\pi.$$

Quodſi porro angulos $\frac{1}{16}\pi$; $\frac{3}{16}\pi$; usque ad $\frac{15}{16}\pi$, in ſubſidium vocare vellemus, ſerierum inde natarum ſumma per 8 diviſa produceret ſeriem hanc:

$$(0) - (16) + (32) - (48) + (64) \text{ etc.}$$

quae cum praecedente coniuncta praebitura eſſet hanc ſeriem: $(0) + (32) + (64) + (96) +$ etc. quae manifeſto iam ſatis exacte valorem primi termini $(0) = A$ praebebit. Interim tamen nihil impedit, quo minus ſimiles operationes ulterius proſequamur.

§. 11. Hoc autem modo tantum ad cognitionem primi termini A pertingimus; at inventio ſecundi termini B, pariter ac ſequentium C, D, E, etc. ex iisdem quidem caſibus, ſed per longe alias combinationes, pluresque ambages, concludi poſſet; quod cum nimis amplam deſcriptionem poſtularet, plurimum intererit, certam et conſtantem methodum attuliſſe, cuius beneficio per ſimiles formulas non ſolum primus terminus A, ſed etiam omnes ſequentes B, C, D, E, etc. tam exacte quam lubuerit indagari queant.

ant. Omnes autem operationes inſtituendae innituntur ſequenti Lemmati:

Lemma.

Si propoſita fuerit iſta ſeries coſinuum:

$$1 + \text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,2\,\Phi + \text{coſ.}\,3\,\Phi + \text{coſ.}\,4\,\Phi \ldots \text{coſ.}\,n\,\Phi,$$

cuius ultimi termini angulus ſit multiplum ſemiperipheriae π, invenire ſummam huius ſeriei.

Solutio.

§. 12. Ponamus ſummam quaeſitam $= S$, ut ſit

$$S = 1 + \text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,2\,\Phi + \text{coſ.}\,3\,\Phi \ldots \text{coſ.}\,n\,\Phi,$$

et multiplicando per $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,\Phi$, ob

$$2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi\,\text{coſ.}\,m\,\Phi = \text{ſin.}\,(m + \tfrac{1}{2})\,\Phi - \text{ſin.}\,(m - \tfrac{1}{2})\,\Phi,$$

nanciſcemur:

$$2\,S\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi = 2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi + \text{ſin.}\tfrac{3}{2}\Phi + \text{ſin.}\tfrac{5}{2}\Phi + \text{ſin.}\tfrac{7}{2}\Phi \ldots \text{ſin.}\,(n + \tfrac{1}{2})\Phi,$$
$$- \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi - \text{ſin.}\tfrac{3}{2}\Phi - \text{ſin.}\tfrac{5}{2}\Phi - \text{ſin.}\,(n - \tfrac{1}{2})\Phi,$$

ita ut ſit

$$2\,S\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi = \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi + \text{ſin.}\,(n + \tfrac{1}{2})\,\Phi.$$

Quodſi iam fuerit $n\,\Phi = \pi$, ultimus terminus erit

$$\text{ſin.}\,(\pi + \tfrac{1}{2})\,\Phi = -\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi,$$

ideoque $2\,S\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,\Phi = 0$, quod idem valet ſi fuerit $n\,\Phi$ vel $3\,\pi$, vel $5\,\pi$, vel in genere $(2\,i - 1)\,\pi$; ſin autem fuerit $n\,\Phi = 2\,\pi$, ultimus terminus erit $= \text{ſin.}\,\frac{1}{2}\,\Phi$, ideoque ſumma ſeriei erit $= 1$.

§. 13. Duo igitur caſus hic occurrunt diſtinguendi, prouti ferrit vel $n\,\Phi = (2\,i - 1)\,\pi$, vel $n\,\Phi = 2\,i\,\pi$. Priori

ſcili-

ſcilicet caſu ſumma erit $= 0$, poſteriore vero caſu $= 1$. Interim tamen hae concluſiones quasdam exceptiones poſtulant, quando angulus $\frac{1}{2}\Phi$ iam ipſe fuerit vel 0, vel π, vel 2π, vel 3π, vel 4π; horum enim caſuum primo $\Phi = 0$ omnes termini ſeriei propoſitae erunt unitati aequales, quorum numerus cum ſit $n+1$, etiam ſumma erit $S = n+1$. Hoc vero ipſum etiam ex ſolutione inventa concludi poteſt; cum enim per $2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi$ dividendo ſit

$$S = \frac{1}{2} + \frac{\text{ſin.}\,(n+\frac{1}{2})\,\Phi}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi},$$

caſu quo Φ infinite parvum, ideoque $\text{ſin.}\,(n+\frac{1}{2})\Phi = (n+\frac{1}{2})\Phi$ et $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{2}\Phi$, his valoribus ſubſtitutis reperitur $S = n+1$.

§. 14. Evolvamus nunc caſum quo $\frac{1}{2}\Phi = \pi$, et quia in expreſſione noſtra etiamnunc poſtremae fractionis numerator et denominator evaneſcunt, eorum loco ſubſtituantur ſua differentialia, eritque

$$S = \frac{1}{2} + \frac{(n+\frac{1}{2})\,\text{coſ.}\,(n+\frac{1}{2})\,\Phi}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi},$$

unde ob $\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi = -1$ et $\text{coſ.}\,(n+\frac{1}{2})\,\Phi = \text{coſ.}\,(2n\pi+\pi) = -1$, erit $S = n+1$; id quod etiam evenit in genere, ſi fuerit $\frac{1}{2}\Phi = \lambda\pi$, tum enim erit

$$S = \frac{1}{2} + (n+\frac{1}{2})\,\frac{\text{coſ.}\,2n\lambda\pi+\lambda\pi}{\text{coſ.}\,\lambda\pi}.$$

Eſt vero $\text{coſ.}\,(2\lambda n\pi+\lambda\pi) = \text{coſ.}\,\lambda\pi$, unde erit $S = n+1$. Hinc ergo ſequuntur iſtae duae concluſiones:

I.

I. Pro caſibus $n\Phi = (2i - 1)\pi$.

His caſibus ſumma ſeriei propoſitae ſemper eſt nihilo aequalis, exceptis caſibus, quibus $\Phi = 2i\pi$, *ſcilicet multiplum totius peripheriae, quippe quibus ſumma ſeriei ſemper eſt* $= n + 1$.

II. Pro caſibus $n\Phi = 2i\pi$.

Pro his caſibus ſumma ſeriei propoſitae ſemper eſt $= 1$, *niſi fuerit* $\Phi = 2i\pi$, *ſcilicet multiplo totius peripheriae aequalis; quandoquidem his caſibus ſumma eſt* $= n + 1$.

§. 15. Ponamus brevitatis gratia $\frac{\pi}{n} = \omega$, atque huius progreſſionis:

$$1 + \text{coſ.}\,\omega + \text{coſ.}\,2\omega \ldots\ldots + \text{coſ.}\,\pi$$

cuius terminorum numerus eſt $n + 1$, ſumma ſemper erit $= 0$; at vero ſi ſinguli anguli duplicentur, huius expreſſionis:

$$1 + \text{coſ.}\,2\omega + \text{coſ.}\,4\omega \ldots\ldots + \text{coſ.}\,2\pi,$$

vi Lemmatis, ſumma ſemper eſt $= 1$. Sin autem angulos hos per numerum quemcunque λ multiplicemus, ut prodeat haec ſeries:

$$1 + \text{coſ.}\,\lambda\omega + \text{coſ.}\,2\lambda\omega \ldots\ldots + \text{coſ.}\,\lambda\pi$$

eius ſumma ſemper erit $= 0$, ſi λ fuerit numerus impar: ſin autem fuerit par, eius ſumma erit $= 1$, exceptis tamen caſibus, quibus eſt vel $\lambda = 2n$, vel $\lambda = 4n$, vel $\lambda = 6n$, etc. quippe quibus ſumma erit $= 1 + n$, quoniam ſecundus terminus erit coſ. $2n\omega =$ coſ. 2π. Hinc iam ſequentis problematis ſolutio dari poteſt.

Problema.

Poſito $\frac{\pi}{n} = \omega$, *ſi proponatur iſta progreſſio:*

$$\Gamma : 0\omega + \Gamma : \omega + \Gamma : 2\omega + \Gamma : 3\omega \ldots\ldots + \Gamma : \pi,$$

cuius

cuius terminorum numerus eſt $n + 1$, eius ſummam, quae ponatur $= S$, definire.

Solutio.

§. 16. Quoniam in genere ſeries ex formula $\Gamma : \Phi$ poſita eſt

$$(0) + (1)\operatorname{coſ}.\Phi + (2)\operatorname{coſ}.2\Phi + (3)\operatorname{coſ}.3\Phi + (4)\operatorname{coſ}.4\Phi + \text{etc.}$$

pro prima formula eſt $\Phi = 0$; pro ſecunda $\Phi = \omega$; pro tertia $\Phi = 2\omega$; etc. Hinc ergo ex ſingulis formulis, ſeries, quae inde naſcuntur, verticaliter ſubſcribamus, ita ut prima ſeries horizontalis exhibeat terminos coëfficiente (0) affectos; ſecunda terminos coëfficiente (1) affectos; tertia coëfficienti (2) reſpondentes; etc. ſequenti modo:

	$\Gamma : 0\omega$	$\Gamma : \omega$	$\Gamma : 2\omega$	$\Gamma : 3\omega$	. . . .	$\Gamma : \pi$.
(0)	1	$+1$	$+1$	$+1$	. . . .	$+1$
(1)	$1+$	$\operatorname{coſ}.\omega$	$+\operatorname{coſ}.2\omega$	$+\operatorname{coſ}.3\omega$	. . .	$+\operatorname{coſ}.\pi$
(2)	$1+$	$\operatorname{coſ}.2\omega$	$+\operatorname{coſ}.4\omega$	$+\operatorname{coſ}.6\omega$	. . .	$+\operatorname{coſ}.2\pi$
(3)	$1+$	$\operatorname{coſ}.3\omega$	$+\operatorname{coſ}.6\omega$	$+\operatorname{coſ}.9\omega$	. . .	$+\operatorname{coſ}.3\pi$
.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.		.
(λ)	$1+$	$\operatorname{coſ}.\lambda\omega$	$+\operatorname{coſ}.2\lambda\omega$	$+\operatorname{coſ}.3\lambda\omega$	. . .	$+\operatorname{coſ}.\lambda\pi$.

§. 17. Nunc igitur vi lemmatis ſumma primae ſeriei horizontalis erit $= (1 + n)(0)$; ſecundae vero ſumma erit $= 0$; tertiae $= (2)\,1$; tum vero omnium coëfficientium imparium ſummae evaneſcunt, parium vero ſummae unitati aequantur, exceptis coëfficientibus $(2n)$; $(4n)$; $(6n)$; $(8n)$ etc. quorum valores erunt $= n + 1$, ſicque ſumma quaeſita ita exhiberi poterit:

$$S = (1 + n)(0) + (n + 1)(2n) + (n + 1)(4n) \text{ etc.}$$
$$+ 1(2) + 1(4) + 1(6) + \text{etc.}$$

Sci-

Scilicet pro coëfficiente generali (λ) termini tantum occurrunt, quando λ eſt numerus par, quorum valor eſt $= 1$, exceptis caſibus, quibus eſt $\lambda = 2n$; vel $\lambda = 4n$; vel $\lambda = 6n$; etc. quippe pro quibus habemus $n = 1$.

§. 18. Conſideremus nunc aggregata primi et ultimi termini cuiusque ſeriei horizontalis, ſive factorem formae $\Gamma : 0 + \Gamma : \pi$, ac pro (0) prodit 2; pro (1) fiet $= 0$; pro (2) iterum prodit 2; atque ita porro pro omnibus imparibus oritur 0, pro paribus vero 2; unde manifeſtum eſt fore

$$\tfrac{1}{2}\Gamma : 0 + \tfrac{1}{2}\Gamma : \pi = (0) + (2) + (4) + (6) + (8) + \text{etc.}$$

ideoque omnes coëfficientes pares hic occurrunt, ſine ulla exceptione. Quam ob rem ſi hanc ſeriem a valore ante pro S invento ſubtrahamus, omnes termini ſola unitate affecti tolluntur, atque habebimus ſequentem ſeriem memorabilem pro forma $S - \tfrac{1}{2}\Gamma : 0 - \tfrac{1}{2}\Gamma : \pi$, quae erit

$$n(0) + n(2n) + n(4n) + n(6n) + \text{etc.}$$

unde ſequens theorema:

Theorema.

Si in expreſſione praecedentis problematis primi et poſtremi termini tantum ſemiſſis capiatur, ita ut habeatur iſta forma:

$$\tfrac{1}{2}\Gamma : 0 + \Gamma : \omega + \Gamma : 2\omega \;\ldots\ldots\; \tfrac{1}{2}\Gamma : \pi = \Sigma,$$

exiſtente $\omega = \frac{\pi}{n}$, *eius valor per ſequentem ſeriem infinitam exprimetur:*

$$\Sigma = n(0) + n(2n) + n(4n) + n(6n) + n(8n) + \text{etc.}$$

§. 19. Quicunque ergo numerus integer pro n accipiatur, ſi ponatur $\frac{\pi}{n} = \omega$, huius ſeriei infinitae:

$$(0) + (2n) + (4n) + (6n) + (8n) + \text{etc.}$$

ſumma erit $= \frac{1}{n}\Sigma$, exiſtente

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma : 0 + \Gamma : \omega + \Gamma : 2\omega + \Gamma : 3\omega \ldots\ldots + \tfrac{1}{2}\Gamma : \pi.$$

Ita ſi ſumamus $n = 12$, poſito $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$, ita ut ſit

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma : 0 + \Gamma : \omega + \Gamma : 2\omega + \Gamma : 3\omega \ldots\ldots + \tfrac{1}{2}\Gamma : \pi,$$

eius pars duodecima, ſcilicet $\frac{1}{12}\Sigma$, exprimet ſummam huius ſeriei: $(0) + (24) + (48) + (72) + \text{etc.}$ Quare quia termini poſt primum ſunt valde parvi, illa formula $\frac{1}{12}\Sigma$ ſatis exacte exhibebit valorem formulae (0), qui initio per litteram A eſt indicatus.

§. 20. Cum igitur hoc modo valor primi termini A, quem hic per (0) deſignamus, tam exacte definiri queat quam lubuerit, (tantum enim opus eſt pro n numeros maiores accipere), oſtendamus etiam quomodo ſimili ratione valor ſecundi termini $B = (1)$ inveſtigari poſſit; quem in finem conſiderari conveniet iſtam expreſſionem:

$$S = \Gamma : 0 + \cos.\omega\,\Gamma : \omega + \cos.2\omega\,\Gamma : 2\omega + \cos.3\omega\,\Gamma : 3\omega \ldots + \cos.\pi\,\Gamma : \pi,$$

exiſtente iterum $\omega = \frac{\pi}{n}$, ita ut terminorum numerus ſit $= 1 + n$. Evolvamus igitur huius expreſſionis membrum quodcunque $\cos.\lambda\omega\,\Gamma : \lambda\omega$, et cum ſit

$$\Gamma : \lambda\omega = (0) + (1)\cos.\lambda\omega + (2)\cos.2\lambda\omega + (3)\cos.3\lambda\omega + \text{etc.}$$

erit

$$2\cos.\lambda\omega\,\Gamma : \lambda\omega = 2(0)\cos.\lambda\omega + (1)(1 + \cos.2\lambda\omega)$$
$$+ (2)(\cos.\lambda\omega + \cos.3\lambda\omega) + (3)(\cos.2\lambda\omega + \cos.4\lambda\omega)$$
$$+ (4)(\cos.3\lambda\omega + \cos.5\lambda\omega) + \text{etc.}$$

§. 21.

§. 21. Quodſi iam hoc modo ſingulis terminis propoſitis bis ſumtis ſeries inde reſultantes verticaliter ſubſcribamus, erit ut ſequitur:

$$2S = 2\Gamma : 0 + 2\,\text{coſ.}\,\omega\,\Gamma : \omega + 2\,\text{coſ.}\,2\omega\,\Gamma : \text{coſ.}\,2\omega \ldots + 2\,\text{coſ.}\,\pi\,\Gamma : \pi.$$

(0)	$2 + 2\,\text{coſ.}\,\omega$	$+ 2\,\text{coſ.}\,2\omega$	. . . .	$+ 2\,\text{coſ.}\,\pi$
(1)	$1 + 1$	$+ 1$	. . . .	$+ 1$
	$1 + \text{coſ.}\,2\omega$	$+ \text{coſ.}\,4\omega$	. . . .	$+ \text{coſ.}\,2\pi$
(2)	$1 + \text{coſ.}\,\omega$	$+ \text{coſ.}\,2\omega$	. . . .	$+ \text{coſ.}\,\pi$
	$+ 1 + \text{coſ.}\,3\omega$	$+ \text{coſ.}\,6\omega$	. . . .	$+ \text{coſ.}\,3\pi$
(3)	$1 + \text{coſ.}\,2\omega$	$+ \text{coſ.}\,4\omega$	. . . .	$+ \text{coſ.}\,2\pi$
	$+ 1 + \text{coſ.}\,4\omega$	$+ \text{coſ.}\,8\omega$	. . . .	$+ \text{coſ.}\,4\pi$
(4)	$1 + \text{coſ.}\,3\omega$	$+ \text{coſ.}\,6\omega$	. . . .	$+ \text{coſ.}\,3\pi$
	$+ 1 + \text{coſ.}\,5\omega$	$+ \text{coſ.}\,10\omega$	. . . .	$+ \text{coſ.}\,5\pi$
.	.	.		.
.	.	.		.
(λ)	$1 + \text{coſ.}\,(\lambda - 1)\omega$	$+ \text{coſ.}\,2(\lambda - 1)\omega$	. . . .	$+ \text{coſ.}\,(\lambda - 1)\pi$
	$+ 1 + \text{coſ.}\,(\lambda + 1)\omega$	$+ \text{coſ.}\,2(\lambda + 1)\omega$	. . . .	$+ \text{coſ.}\,(\lambda + 1)\pi.$

§. 22. Nunc ope Lemmatis ſupra expoſiti facile erit ſingulas has progreſſiones ſummare. Scilicet pro (0) erit ſumma $= 0$, pariter ac ſumma primi et ultimi. At pro (1) prioris ſeriei ſumma eſt $1 + n$, poſterioris vero ſumma eſt 1, ita ut pro (1) iunctim prodeat $2 + n$. At vero primus et ultimus terminus ſimul dant 4, quorum ſemiſſis ſi inde auferatur, remanebit $(1)\,n$. Pro (2) ſuperior ſeries dat 0, et inferior pariter 0, ita ut hic terminus prorſus evaneſcat Pro (3) ſuperior ſeries dat 1, inferior vero pariter 1, quare ſi ſemiſumma primi et ultimi hinc auferatur, etiam iſte terminus evaneſcit, id quod ſemper eveniet, niſi in ſecundis terminis occurrat vel coſ. 2π; vel coſ. 4π; vel coſ. 6π; etc. quoniam tum ſeriei ſumma eſt $1 + n$.

§. 23. Conſideremus igitur indicem generalem (λ) pro quo ſuperior ſeries eſt:

$$1 + \cos.(\lambda - 1)\omega + \cos. 2(\lambda - 1)\omega + \ldots + \cos.(\lambda - 1)\pi$$

cuius ſumma, ſi fuerit $\lambda - 1 = 2n$, erit $1 + n$; inferioris autem ſeriei ſumma erit $1 + n$, quando fuerit $\lambda + 1 = 2n$. Hinc ſi ſemiſumma primi et ultimi termini ſubtrahatur, utroque caſu remanebit tantum n. Ex quo patet ſi perpetuo ſemiſummam primi et ultimi termini ſubtrahamus, omnes terminos e medio tolli, praeter eos, quibus eſt vel $\lambda - 1 = 2in$ vel $\lambda + 1 = 2in$, denotante $2i$ numerum parem quemcunque, pro quibus valor erit $= n$, id quod ergo locum habet pro forma $2S - \Gamma : 0 - \cos. \pi\Gamma : \pi$. Quare ſi proponatur iſta expreſſio:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma : 0 + \cos.\omega\Gamma : \omega + \cos. 2\omega\Gamma : 2\omega + \cos. 3\omega\Gamma : 3\omega + \ldots$$
$$\ldots + \tfrac{1}{2}\cos.\pi\Gamma : \pi,$$

eius valor erit

$$\tfrac{1}{2}n(1) + \tfrac{1}{2}n(2n-1) + \tfrac{1}{2}n(2n+1) + \tfrac{1}{2}n(4n-1) + \ldots$$
$$\ldots + \tfrac{1}{2}n(4n+1) \text{ etc.}$$

unde concludimus huius ſeriei:

$$\left.\begin{matrix}(1) + (2n-1) + (4n-1) + (6n-1) + (8n-1) \\ + (2n+1) + (4n+1) + (6n+1) + (8n+1)\end{matrix}\right\} \text{ etc.}$$

ſummam eſſe $\frac{2}{n}\Sigma$; unde ſi n fuerit numerus ſatis magnus, iſta expreſſio $\frac{2}{n}\Sigma$ ſatis exacte praebebit valorem (1), quem ſupra littera B deſignavimus.

§. 24. Contemplemur hic quoque caſum, quo $n = 12$ et $\omega = \frac{\pi}{12} = 15^\circ$, ideoque formula:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma : 0 + \cos.\omega\Gamma : \omega + \cos. 2\omega\Gamma : 2\omega + \cos. 3\omega\Gamma : 3\omega + \ldots$$
$$\ldots + \tfrac{1}{2}\cos.\pi\Gamma : \pi,$$

ex

ex quo valore cognito innoteſcet ſumma ſequentis ſeriei:

$$\left\{\begin{array}{l}(1)+(23)+(47)+(71)\\ \quad\;\; +(25)+(49)+(73)\end{array}\right\}\text{ etc.} = \tfrac{1}{6}\Sigma,$$

qui ergo valor iam ſatis prope dabit valorem $(1)=B$. Quodſi ſimili modo in valorem tertii termini $C=(2)$ inquirere velimus, talem expreſſionem:

$$S = \Gamma:0 + \operatorname{coſ}.2\omega\Gamma:\omega + \operatorname{coſ}.4\omega\Gamma:2\omega + \operatorname{coſ}.6\omega\Gamma:3\omega + \ldots$$
$$\ldots + \operatorname{coſ}.2\pi\Gamma:\pi$$

evolvere debemus, quae ut fractiones evitentur, duplicetur, ac ſinguli termini per ſeries verticales ſequenti modo exhibeantur:

$$2S = 2\Gamma:0 + 2\operatorname{coſ}.2\omega\Gamma:\omega + 2\operatorname{coſ}.4\omega\Gamma:2\omega + 2\operatorname{coſ}.6\omega\Gamma:3\omega \ldots + 2\operatorname{coſ}.2\pi\Gamma:\pi$$

$$\begin{array}{c|l}
(0) & \quad 2 + 2\operatorname{coſ}.2\omega + 2\operatorname{coſ}.4\omega + 2\operatorname{coſ}.6\omega \ldots + 2\operatorname{coſ}.2\pi. \\
(1) & \left\{\begin{array}{l} \;\;1 + \operatorname{coſ}.\omega + \operatorname{coſ}.2\omega + \operatorname{coſ}.3\omega \ldots\ldots \operatorname{coſ}.\pi. \\ +1 + \operatorname{coſ}.3\omega + \operatorname{coſ}.6\omega + \operatorname{coſ}.9\omega \ldots\ldots + \operatorname{coſ}.3\pi. \end{array}\right. \\
(2) & \left\{\begin{array}{l} \;\;1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots + 1. \\ +1 + \operatorname{coſ}.4\omega + \operatorname{coſ}.8\omega + \operatorname{coſ}.12\omega \ldots + \operatorname{coſ}.4\pi. \end{array}\right. \\
(3) & \left\{\begin{array}{l} \;\;1 + \operatorname{coſ}.\omega + \operatorname{coſ}.2\omega + \operatorname{coſ}.3\omega \ldots\ldots + \operatorname{coſ}.\pi. \\ +1 + \operatorname{coſ}.5\omega + \operatorname{coſ}.10\omega + \operatorname{coſ}.15\omega \ldots + \operatorname{coſ}.5\pi. \end{array}\right. \\
\cdot & \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot & \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
(\lambda) & \left\{\begin{array}{l} \;\;1 + \operatorname{coſ}.(\lambda-2)\omega + \operatorname{coſ}.2(\lambda-2)\omega + \operatorname{coſ}.3(\lambda-2)\omega \ldots \operatorname{coſ}.(\lambda-2)\pi. \\ +1 + \operatorname{coſ}.(\lambda+2)\omega + \operatorname{coſ}.2(\lambda+2)\omega + \operatorname{coſ}.3(\lambda+2)\omega \ldots \operatorname{coſ}(\lambda+2)\pi. \end{array}\right.
\end{array}$$

§. 25. Hinc igitur formula (0) afficietur per 2; unde ergo ſi ſemiſumma primi et ultimi ſubtrahatur, hic terminus prorſus e medio tolletur. Porro pro (1) ſuperioris ſeriei ſumma erit $=0$, inferioris vero pariter $=0$, quemadmodum etiam ſemiſummae primi et ultimi termini evaneſcunt,

ſcunt, ita ut iſte terminus pariter auferatur. At pro (2) ſeries ſuperior dat $1 + n$, inferior vero 1, hinc ſemiſumma primi et ultimi ablata relinquet n. Pro ſequente (3) ſuperior ſeries dat 0, pariter ac inferior, ita ut iſte terminus e medio tollatur. Eodem modo etiam in genere terminus (λ) e medio tolletur, ſiquidem ſemiſumma primi et ultimi ſubtrahatur, niſi fuerit vel $\lambda - 2 = 2in$, vel $\lambda + 2 = 2in$, quippe quibus caſibus ſumma ſit $= n$.

§. 26. Quodſi ergo ponamus

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma:0 + \text{coſ.}\,2\omega\Gamma:\omega + \text{coſ.}\,4\omega\Gamma:2\omega + \text{coſ.}\,6\omega\Gamma:3\omega \ldots \ldots + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\,2\pi\Gamma:\pi,$$

exiſtente $\omega = \frac{\pi}{n}$, iſta quantitas per hanc ſeriem repraeſentabitur:

$$\Sigma = \left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{2}n(2) + \tfrac{1}{2}n(2n-2) + \tfrac{1}{2}n(4n-2) + \tfrac{1}{2}n(6n-2) \\ + \tfrac{1}{2}n(2n+2) + \tfrac{1}{2}n(4n+2) + \tfrac{1}{2}n(6n+2) \end{matrix}\right\} \text{etc.}$$

unde viciſſem iſtius ſeriei

$$\left\{\begin{matrix} (2) + (2n-2) + (4n-2) + (6n-2) + (8n-2) \\ + (2n+2) + (4n+2) + (6n+2) + (8n+2) \end{matrix}\right\} \text{etc.}$$

ſumma erit $= \frac{2}{n}\Sigma$; ſicque hinc ſatis exacte valor termini $(2) = C$ definiri poterit, ſi modo pro n numerus ſatis magnus accipiatur. Ita ſi ſumamus $n = 12$, ut ſit $\omega = \frac{\pi}{12} = 15^0$, atque computemus valorem huius formae:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma:0 + \text{coſ.}\,2\omega\Gamma:\omega + \text{coſ.}\,4\omega\Gamma:2\omega + \text{coſ.}\,6\omega\Gamma:3\omega \ldots \ldots + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\,2\pi\Gamma:\pi,$$

quarum partium numerus eſt 13; huius ſeriei:

$$\left\{\begin{matrix} (2) + (22) + (46) + (70) + (94) + (118) \\ + (26) + (50) + (74) + (98) + (122) \end{matrix}\right\} \text{etc.}$$

ſumma erit $= \frac{1}{6}\Sigma$.

§. 27.

§. 27. Nunc iam ſine pluribus ambagibus ſimiles formulas pro ſequentibus terminis (3); (4); (5); etc. exhibere poterimus. Ita pro termino $(3) = C$, ſumto n numero ſatis magno, poſitoque $\frac{\pi}{n} = \omega$, inveſtigetur valor huius expreſſionis:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma:0 + \text{coſ.}\,3\omega\Gamma:\omega + \text{coſ.}\,6\omega\Gamma:2\omega + \text{coſ.}\,9\omega\Gamma:3\omega \ldots \ldots + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\,3\pi\Gamma:\pi,$$

atque hinc conſequemur hanc ſummationem:

$$\left\{\begin{matrix}(3) + (2n-3) + (4n-3) + (6n-3) \\ + (2n+3) + (4n+3) + (6n+3)\end{matrix}\right\} \text{etc.} = \frac{2}{n}\Sigma.$$

Ita ſi fuerit $n = 12$, ideoque $\omega = 15°$, habebimus:

$$\left\{\begin{matrix}(3) + (21) + (45) + (69) \\ + (27) + (51) + (75)\end{matrix}\right\} \text{etc.} = \frac{1}{6}\Sigma.$$

§. 28. Eodem modo pro termino ſequente $(4) = D$ in ſubſidium vocetur iſta forma:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma:0 + \text{coſ.}\,4\omega\Gamma:\omega + \text{coſ.}\,8\omega\Gamma:2\omega + \text{coſ.}\,12\omega\Gamma:3\omega \ldots \ldots + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\,4\pi\Gamma:\pi,$$

unde ſequens orietur ſummatio

$$\left\{\begin{matrix}(4) + (2n-4) + (4n-4) + (6n-4) + (8n-4) \\ + (2n+4) + (4n+4) + (6n+4) + (8n+4)\end{matrix}\right\} \text{etc.} = \frac{2}{n}\Sigma.$$

Hinc ſi ſumamus $n = 12$ et $\omega = 15°$, ſummatio inde oriunda erit:

$$\left\{\begin{matrix}(4) + (20) + (44) + (68) + (92) \\ + (28) + (52) + (76) + (100)\end{matrix}\right\} \text{etc.} = \frac{1}{6}\Sigma.$$

Ex his iam ſatis intelligitur, ſi definire debeat in genere character (λ), computandam ante omnia eſſe formam:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma:0 + \text{coſ.}\,\lambda\omega\Gamma:\omega + \text{coſ.}\,2\lambda\omega\Gamma:2\omega \ldots + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\,\lambda\pi\Gamma:\pi,$$

tum

tum vero hinc iſtam ſummationem obtineri:

$$\left\{\begin{matrix}(\lambda)+(2n-\lambda)+(4n-\lambda)+(6n-\lambda)+(8n-\lambda)\\ +(2n+\lambda)+(4n+\lambda)+(6n+\lambda)+(8n+\lambda)\end{matrix}\right\}\text{etc.}=\frac{2}{n}\Sigma.$$

Hinc ergo ſi capiatur $\lambda = n$, ſeries hanc induet formam:

$$2(n)+2(3n)+2(5n)+2(7n)+2(9n)+2(11n)+\text{etc.}=\frac{2}{n}\Sigma,$$

ſicque orietur iſta ſeries ſatis ſimplex:

$$(n)+(3n)+(5n)+(7n)+(9n)+(11n)+\text{etc.}=\frac{1}{n}\Sigma,$$

in qua continetur inſignis proprietas coëfficientium (0); (1); (2); (3); etc., quorum naturam hic inveſtigamus.

§. 29. Sin autem hic ſtatuere velimus $\lambda = 2n$, ſeries ſummata tranſibit in hanc formam:

$$(0)+2(2n)+2(4n)+2(6n)+2(8n)\text{ etc.}=\frac{2}{n}\Sigma,$$

quae eſt nova ſeries ſatis memorabilis pro inveniendo primo termino (0), pro qua igitur erit:

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma:0+\text{coſ.}\,2\pi\Gamma:\omega+\text{coſ.}\,4\pi\Gamma:2\omega+\text{coſ.}\,6\pi\Gamma:3\omega\ \dots$$
$$\dots + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\,2n\pi\Gamma:\pi,$$

qui coſinus cum omnes ſint unitati aequales, erit

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\Gamma:0+\Gamma:\omega+\Gamma:2\omega+\Gamma:3\omega+\Gamma:4\omega\ \dots\ \tfrac{1}{2}\Gamma:\pi,$$

quae expreſſio prorſus convenit cum ea, quam ſupra §. 19. exhibuimus. Verum in ſerie, quae inde eſt deducta, ingens diſcrimen ſe exſerit, cum hic primus terminus deberet eſſe duplo maior; huius autem diſcriminis cauſa in eo latet, quod in genere ſuppoſuimus ſummam ſeriei pro (0) eſſe nihilo aequalem, cum caſu $\Gamma = 2n$ iſta ſeries

$$2+2\,\text{coſ.}\,\gamma\omega+2\,\text{coſ.}\,2\gamma\omega+2\,\text{coſ.}\,3\gamma\omega+\text{etc.}$$

non evaneſcat, ſed evadat $=2(1+n)$.

§. 30.

§. 30. His expoſitis ſatis perſpicuum eſt, quemadmodum pro quovis caſu oblato, qui more vulgari in talem ſeriem:

$$\alpha + \beta \text{ coſ. } \Phi + \gamma \text{ coſ. } \Phi^2 + \delta \text{ coſ. } \Phi^3 + \varepsilon \text{ coſ. } \Phi^4 + \text{etc.}$$

converti poteſt, altera ſeries ad uſum aſtronomicum neceſſaria et per coſinus angulorum multiplorum procedens, quam hac forma repraeſentavimus;

$$A + B \text{ coſ. } \Phi + C \text{ coſ. } 2\Phi + D \text{ coſ. } 3\Phi + E \text{ coſ. } 4\Phi + \text{etc.}$$

formari debeat, idque ex ſola indole functionis propoſitae, ſine ulla integratione, dum totum negotium eo tantum redit, ut pro certis caſibus, quibus ſtatuitur vel $\Phi = 0$, vel $\Phi = \omega$, vel $\Phi = 2\omega$, etc. valores ipſius functionis reſolvendae definiantur, id quod plerumque ſine ullo labore fieri poteſt. Ita ſi formula propoſita fuerit $(1 - e \text{ coſ.} \Phi)^{-\frac{3}{2}} = \Gamma : \Phi$, per univerſam Aſtronomiam frequentiſſime occurrens, ſtatim patet fore:

$$\Gamma : 0 = (1 - e)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 - e\sqrt{(1 - e)}} \text{ et } \Gamma : \pi = (1 + e)^{-\frac{3}{2}};$$

at vero $\Gamma : \frac{\pi}{2} = 1$, ita ut perpetuo ſit $1 = A - C + E - G + I$ etc. ſive $(0) - (2) + (4) - (6) + (8) - (10)$ etc. in infinitum $= 1$. Praeterea vero modus, quo hoc argumentum tractavimus, plurimas alias inſignes proprietates ſuppeditavit, quibus determinatio ſingulorum terminorum non mediocriter ſublevari poteſt.

DISQVISITIO VLTERIOR SVPER SERIEBVS SECVNDVM MVLTIPLA CVIVSDAM ANGVLI PROGREDIENTIBVS.

Auctore
L. EVLERO.

Conventui exhib. die 26 Maii 1777.

§. 1.

Contemplabor hic denuo eiusmodi functiones cuiuſpiam anguli ϕ, quas in ſeries, quarum termini coſinus angulorum multiplorum ipſius ϕ continent, evolvere liceat. Scilicet ſi Φ denotet talem functionem anguli ϕ, quae per evolutionem huiusmodi ſeriei oriatur:

$$\Phi = A + B\,\text{coſ.}\,\phi + C\,\text{coſ.}\,2\phi + D\,\text{coſ.}\,\phi + E\,\text{coſ.}\,4\phi + \text{etc.}$$

manifeſtum eſt talem reſolutionem ſemper ſuccedere, quando eadem functio Φ per ſolutionem communem in talem ſeriem converti poteſt:

$$\Phi = \alpha + \beta\,\text{coſ.}\,\phi + \gamma\,\text{coſ.}\,\phi^2 + \delta\,\text{coſ.}\,\phi^3 + \varepsilon\,\text{coſ.}\,\phi^4 + \text{etc.}$$

propterea quod omnes poteſtates coſinuum in coſinus multiplorum eiusdem anguli reſolvi poſſunt, id quod in poteſtatibus ſinuum non ſuccedit, quoniam tantum poteſtates pares in coſinus multiplorum reſolvuntur, poteſtates vero impares ad ſinus multiplorum perducuntur. Quia vero omnes

ſinus

ſinus facillime ad coſinus revocantur, ea quae hic ſum tradíturus, pariter quoque ad ſinus pertinere ſunt cenſenda.

§. 2. Niſi autem functio propoſita Φ fuerit rationalis et ſatis ſimplex, ſeriei quae ex eius evolutione naſcitur:

$$A + B \operatorname{cof.} \phi + C \operatorname{cof.} 2\phi + D \operatorname{cof.} 3\phi + E \operatorname{cof.} 4\phi + \text{etc.}$$

ſinguli termini ita deprehenduntur comparati, ut eorum valores non niſi per quantitates maxime transcendentes exhiberi queant. Veluti ſi functio propoſita fuerit

$$\Phi = (1 - n \operatorname{cof.} \phi)^{-\frac{3}{2}},$$

a cuius evolutione propemodum univerſa theoria Aſtronomiae pendet, ſeriei inde oriundae primus terminus A per hanc ſeriem exprimi invenitur:

$$1 + \frac{3.5}{4.4} n n + \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{7.9}{8.8} n^4 + \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{11.13}{12.12} \cdot n^6 + \text{etc.}$$

cuius ſummatio omnia artificia analytica hactenus inventa eludit; hinc olim plurimum in hoc elaboravi, ut eius ſummationem ad reſolutionem aequationis differentialis reducerem, unde deinceps haec inveſtigatio ad genera quantitatum transcendentium, ſive ad quadraturas curvarum magis cognitas, deduci poſſet; verum etiam in hoc labore operam meam nequicquam conſumſi. Nuper autem ſe mihi obtulit idea, quae me ad formulas integrales ſatis concinnas manuduxit, quibus non ſolum primus huius ſeriei terminus A, ſed adeo omnes termini, ſatis commode exprimi poſſunt, quas in ſequenti theoremate ſum complexurus.

Theorema generale.

§. 3. Si functio Φ anguli φ ita fuerit comparata, ut in talem ſeriem reſolvi ſe patiatur:

 Φ =

$$\Phi = A + B\,\text{coſ.}\,\phi + C\,\text{coſ.}\,2\,\phi + D\,\text{coſ.}\,3\,\phi$$
$$+ E\,\text{coſ.}\,4\,\phi + \text{etc.}$$

tum ſingulae quantitates A, B, C, D, E, etc. per ſequentes formulas integrales determinantur, ſiquidem in ſingulis integratio a termino $\phi = 0$, usque ad terminum $\phi = \pi$ extendatur, denotante π ſemiperipheriam circuli cuius radius $= 1$.

1. $A = \frac{1}{\pi} \int \Phi\, \partial\, \phi$.
2. $B = \frac{2}{\pi} \int \Phi\, \partial\, \phi\, \text{coſ.}\, \phi$.
3. $C = \frac{2}{\pi} \int \Phi\, \partial\, \phi\, \text{coſ.}\, 2\, \phi$.
4. $D = \frac{2}{\pi} \int \Phi\, \partial\, \phi\, \text{coſ.}\, 3\, \phi$.
5. $E = \frac{2}{\pi} \int \Phi\, \partial\, \phi\, \text{coſ.}\, 4\, \phi$.

etc. etc.

ubi notetur primum coëfficientem eſſe $\frac{1}{\pi}$ dum ſequentes omnes ſunt $\frac{2}{\pi}$.

§. 4. Hic primum obſervaſſe iuvabit omnes has formulas integrales facillime per quadraturas curvarum ſatis
Tab. I. Fig. 6. ſimplicium repraeſentari poſſe. Si enim ſuper axe rectilineo A B abſciſſae A P aequales capiantur arcubus, qui angulos ϕ metiuntur, ita ut ſit $AP = \phi$, tum vero ſuper hoc axe conſtruatur curva E M F, cuius applicatae P M referant functionem propoſitam Φ, tum formula $\int \Phi\, \partial\, \phi$ exprimet aream A E M P, cuius initium in A ſtatuitur, ubi $\phi = 0$. Quodſi iam punctum P usque ad B promoveatur, ut fiat $AB = \pi$, tum area A E F B per $\frac{1}{\pi}$ multiplicata ſtatim praebet primum terminum A ſeriei quam quaerimus. Simili modo ſecundus terminus B, ſimulque omnes ſequentes, con-

conſtrui poterunt, ſi curva E M F ita deſcribatur, ut pro ſecundo termino B capiatur applicata $PM = \Phi \operatorname{coſ.} \phi$; pro tertio vero $PM = \Phi \operatorname{coſ.} 2\phi$; pro quarto $PM = \Phi \operatorname{coſ.} 3\phi$, et ita porro; tum enim tota area A E M F in $\frac{2}{\pi}$ ducta has ipſas quantitates B, C, D, etc. exhibebit.

§. 5. Quoniam hoc modo abſciſſae A P arcubus circularibus aequales ſunt capiendae, iſtae curvae deſcriptae pro algebraicis haberi nequeunt; interim tamen harum curvarum loco algebraicae ſubſtitui poterunt, ita ut omnes noſtrae quantitates adeo per quadraturas curvarum algebraicarum exhiberi queant; tantum enim ponatur $\operatorname{coſ.} \phi = x$, et cum functio Φ ſpectari poſſit tanquam functio ipſius ϕ, erit nunc Φ functio algebraica ipſius x. Cum autem hinc fiat $\partial \phi = \frac{-\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$, pro prima quantitate habebimus:

$$A = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\Phi \partial x}{\sqrt{(1-xx)}},$$

unde constructio ita erit inſtituenda, ut ſingulis abſciſſis $AP = x$ reſpondeant applicatae $PM = \frac{\Phi}{\sqrt{(1-xx)}}$, ita ut iam futura ſit area $AEMP = \int \frac{\Phi \partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$, quam autem nunc a termino $x = 1$ usque ad terminum $x = -1$ extendi oportet. Hic ergo abſciſſas a puncto fixo medio C capi conveniet, ſtatuique $CP = x$ et $PM = \frac{\Phi}{\sqrt{(1-xx)}}$; tum enim, ſi fuerit $CA = 1$ et $CB = -1$, area A E F B, toti baſi A B imminens, propoſito ſatisfaciet, ita ut omes iſtae determinationes per quadraturas linearum curvarum expediri queant.

§. 6. His praenotatis adgrediamur demonſtrationem noſtri theorematis, ac primo manifeſtum eſt, ſi i denotet numerum

rum integrum quemcunque, integrale

$$\int \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi = \frac{1}{i} \operatorname{fin.} i \Phi,$$

annihilari tam poſito $\Phi = 0$, quam poſito $\Phi = \pi$, quod ergo pro omnibus numeris integris i valebit, ſolo caſu $i = 0$ excepto, quippe quo prodit $\int \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi = \pi$. Hoc obſervato, quoniam per hypotheſin eſt

$$\Phi = A + B \operatorname{cof.} \Phi + C \operatorname{cof.} 2 \Phi + D \operatorname{cof.} 3 \Phi + \text{etc.}$$

erit $\int \Phi \partial \Phi = A \pi$, integralibus ſcilicet a $\Phi = 0$ usque ad $\Phi = \pi$ extenſis. Hinc igitur iam evicta eſt pars prima noſtrae theorematis, qua eſt $A = \frac{1}{\pi} \int \Phi \partial \Phi$.

§. 7. Pro reliquis partibus conſideremus formulam differentialem $\partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi \operatorname{cof.} \lambda \Phi$, quae in ſimplices coſinus reſoluta dat

$$\frac{1}{2} \partial \Phi [\operatorname{cof.} (i - \lambda) \Phi + \operatorname{cof.} (i + \lambda) \Phi],$$

unde eius integrale erit

$$\int \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi \operatorname{cof.} \lambda \Phi = \frac{\operatorname{fin.} (i - \lambda) \Phi}{2 (i - \lambda)} + \frac{\operatorname{fin.} (i + \lambda) \Phi}{2 (i + \lambda)},$$

quod integrale utique evaneſcit, tam ſumto $\Phi = 0$ quam ſumto $\Phi = \pi$, ob i et λ numeros integros; ſi modo unicum caſum excipiamus, quo $\lambda = i$, quippe quo caſu reperitur

$$\int \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi^2 = \frac{1}{2} \Phi + \frac{1}{4 i} \operatorname{fin.} 2 i \Phi,$$

qui valor ſumto $\Phi = \pi$ abit in $\frac{1}{2} \pi$.

§. 7. Cum igitur, integrationem a $\Phi = 0$ usque ad $\Phi = \pi$ extendendo, ſemper ſit $\int \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi \operatorname{cof.} \lambda \Phi = 0$, ſolo caſu excepto $\lambda = i$, quippe quo caſu integrale erit $= \frac{\pi}{2}$, ex aequatione

$\Phi =$

$$\Phi = A + B \cos. \phi + C \cos. 2\phi + D \cos. 3\phi + E \cos. 4\phi + \text{etc.}$$

pro parte ſecunda theorematis noſtri reperiemus

$$\int \Phi \partial \phi \cos. \phi = \tfrac{1}{2} \pi B,$$

propterea quod ex omnibus reliquis formulis nihil oritur; hinc viciſſim concluditur fore

$$B = \tfrac{2}{\pi} \int \Phi \partial \phi \cos. \phi,$$

ſi quidem integrale a $\phi = 0$ ad $\phi = \pi$ extendatur.

§. 8. Simili modo pro parte tertia reperiemus

$$\int \Phi \partial \phi \cos. 2\phi = \tfrac{1}{2} \pi C,$$

ideoque viciſſim habebimus:

$$C = \tfrac{2}{\pi} \int \Phi \partial \phi \cos. 2\phi.$$

Pari modo pro partibus ſequentibus prodibit

$$D = \tfrac{2}{\pi} \int \Phi \partial \phi \cos. 3\phi.$$

$$E = \tfrac{2}{\pi} \int \Phi \partial \phi \cos. 4\phi,$$

ſicque porro in infinitum: hocque ergo modo veritas noſtri theorematis perfecte eſt demonſtrata.

§. 9. Poſtquam veritatem noſtri theorematis extra omne dubium collocavimus, haud difficile erit, pro quovis caſu, quo functio propoſita Φ per ſeriem datur, cuius ſinguli termini ſecundum poteſtates ipſius $\cos. \phi$ progrediuntur, alteram ſeriem, quam intendimus

$$A + B \cos. \phi + C \cos. 2\phi + D \cos. 3\phi + \text{etc.}$$

formare atque dilucide oſtendere, quemadmodum ſinguli eius termini A, B, C, D, etc. exprimantur. Quoniam vero ſingulae

gulae litterae latinae maiores ab omnibus litteris graecis, ſequentibus in infinitum pendent, ne ex ordine iſtarum litterarum confuſio oriatur, loco litterarum graecarum ſequentes characteres introducamus:

$$\Phi = (0) + (1)\,\text{coſ.}\,\phi + (2)\,\text{coſ.}\,\phi^2 + (3)\,\text{coſ.}\,\phi^3 + (4)\,\text{coſ.}\,\phi^4 + \text{etc.}$$

et iam quaeſtio huc redit, quomodo ſingulae litterae latinae A, B, C, D, etc. ex iſtis characteribus (0); (1); (2); (3); etc. definiri debeant.

§. 10. Incipiamus a primi littera A, cuius evolutio poſtulat ſequens Lemma:

Lemma.

Si integralia a $\phi = 0$ usque ad $\phi = \pi$, extendantur, ſemper erit

$$\int \partial\phi\,\text{coſ.}\,\phi^\lambda = \tfrac{\lambda-1}{\lambda}\int\partial\phi\,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-2}.$$

Ad hoc demonſtrandum ponatur

$$\int\partial\phi\,\text{coſ.}\,\phi^\lambda = f\,\text{ſin.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-1} + g\int\partial\phi\,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-2},$$

et ſumtis differentialibus erit

$$\text{coſ.}\,\phi^\lambda = f\,\text{coſ.}\,\phi^\lambda - f(\lambda-1)\,\text{ſin.}\,\phi^2\,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-2} + g\,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-2},$$

quae aequatio, ob $\text{ſin.}\,\phi^2 = 1 - \text{coſ.}\,\phi^2$, induet hanc formam:

$$\text{coſ.}\,\phi^\lambda = \lambda f\,\text{coſ.}\,\phi^\lambda - f(\lambda-1)\,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-2} + g\,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-2},$$

unde primo fit $g = f(\lambda - 1)$ et $f = \frac{1}{\lambda}$, ideoque $g = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. ſicque in genere habemus hanc reductionem:

$$\int\partial\phi\,\text{coſ.}\,\phi^\lambda = \tfrac{1}{\lambda}\,\text{ſin.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-1} + \tfrac{\lambda-1}{\lambda}\int\partial\phi\,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-2},$$

quod integrale ita capi debet, ut poſito $\phi = 0$ evaneſcat.

Quam-

Quamobrem ſi ſtatuamus $\Phi = \pi$, unde ſit ſin. $\Phi = 0$, caſu Lemmatis habebimus:

$$\int \partial \Phi \cos. \Phi^{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \int \partial \Phi \cos. \Phi^{\lambda - 2}.$$

§. 11. Quoniam igitur a caſibus ſimpliciſſimis incipiendo habemus:

$$\text{I. } \int \partial \Phi \cos. \Phi^{0} = \pi.$$

$$\text{II. } \int \partial \Phi \cos. \Phi^{1} = 0,$$

hinc omnes ſequentes formulas aſſignare poſſumus:

III. $\int \partial \Phi \cos. \Phi^{2} = \frac{1}{2} \pi.$	IV. $\int \partial \Phi \cos. \Phi^{3} = 0.$
V. $\int \partial \Phi \cos. \Phi^{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \pi.$	VI. $\int \partial \Phi \cos. \Phi^{5} = 0.$
VII. $\int \partial \Phi \cos. \Phi^{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \pi.$	VIII. $\int \partial \Phi \cos. \Phi^{7} = 0.$
IX. $\int \partial \Phi \cos. \Phi^{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \pi.$	X. $\int \partial \Phi \cos. \Phi^{9} = 0.$
etc.	etc.

§. 12. Quia igitur ſupra invenimus eſſe

$$\pi A = \int \Phi \partial \Phi, \text{ ob}$$

$$\Phi = (0) + (1) \cos. \Phi + (2) \cos. \Phi^{2} + (3) \cos. \Phi^{3} + \text{etc.}$$

integrationes modo aſſignatae praebent

$$\pi A = (0) \pi + (2) \tfrac{1}{2} \pi + (4) \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \pi + (6) \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \pi + (8) \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \pi + \text{etc.}$$

diviſione ergo per π facta nanciſcimur hanc determinationem:

$$A = (0) + \tfrac{1}{2}(2) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4}(4) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6}(6) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8}(8) + \text{etc.}$$

ſive elegantius

 A =

$$A = (0) + \tfrac{2}{4}(2)\tfrac{4 \cdot 3}{4 \cdot 8}(4) + \tfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 8 \cdot 12}(6) + \tfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}(8) + \text{etc.}$$

quae eſt eadem ſeries, quam olim per ſatis longas ambages ſum adeptus.

§. 13. Ope eiusdem Lemmatis etiam ſecunda littera B definiri poterit. Quia enim invenimus $\frac{1}{2}\pi B = \int \Phi \partial \Phi \operatorname{cof.} \Phi$, ſi loco Φ ſeriem cognitam ſubſtituamus, integrationes Lemmatis nobis dabunt:

$$\tfrac{1}{2}\pi B = + \tfrac{1}{2}\pi(1) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4}\pi \cdot (3) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6}\pi \cdot (5) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \pi \cdot (7) + \text{etc.}$$

unde per π dividendo erit:

$$\tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2} \cdot (1) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot (3) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot (5) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot (7) + \text{etc.}$$

ſive

$$B = (1) + \tfrac{3}{4} \cdot (3) + \tfrac{5 \cdot 4}{4 \cdot 8}(5) + \tfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12}(7) + \tfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}(9) + \text{etc.}$$

§. 14. Pro tertia littera C peculiari Lemmate opus erit, quo eſt

$$\int \partial \Phi \operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda} = \tfrac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-4} \int \partial \Phi \operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda-2}.$$

ſiquidem integralia a $\Phi = 0$ usque $\Phi = \pi$ extendantur. Ad hoc demonſtrandum ponamus in genere eſſe

$$\int \partial \Phi \operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda} = f \operatorname{ſin.} 2\Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda} + g \operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda-1} + h \int \partial \Phi \operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda-2},$$

unde differentiatio praebet hanc aequationem:

$$\operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda} = 2f \operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda} + g \operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda} - g(\lambda-1) \operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{ſin.} \Phi^2 \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda-2} - \lambda f \operatorname{ſin.} 2\Phi \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda-1} - 2g \operatorname{ſin.} 2\Phi \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda-1} + h \operatorname{cof.} 2\Phi \operatorname{cof.} \Phi^{\lambda-2}.$$

Hic

Hic iam primo termini, qui continent ſin. 2 Φ, tolli debent, unde fit $g = -\frac{\lambda f}{2}$; tum vero remanebit haec aequatio, poſtquam loco ſin. Φ^2 ſcriptum fuerit $1 - \text{coſ.}\,\Phi^2$, diviſione per coſ. 2 Φ facta,

$$\text{coſ.}\,\Phi^\lambda = -\frac{f(\lambda\lambda-4)}{2}\,\text{coſ.}\,\Phi^\lambda + \frac{\lambda f}{2}(\lambda-1)\,\text{coſ.}\,\Phi^{\lambda-2} + h\,\text{coſ.}\,\Phi^{\lambda-2},$$

unde manifeſto fit $f = \frac{-2}{\lambda\lambda-4}$, hincque $h = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-4}$, ſicque reductio generalis ita ſe habebit:

$$\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^\lambda = \frac{-2}{\lambda\lambda-4}\,\text{ſin.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^\lambda$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda\lambda-4}\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^{\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-4}\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^{\lambda-2}.$$

Hinc iam, poſito $\Phi = \pi$, erit ſecundum Lemma

$$\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^\lambda = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda-4}\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^{\lambda-2}.$$

§. 15. Tribuamus nunc exponenti λ ſucceſſive ordine valores 0, 1, 2, 3, 4, etc. ac pro $\lambda = 0$ erit

$$\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2\Phi = 0,$$

Pro caſu $\lambda = 1$ ipſum Lemma praebet $= 0$; at vero pro caſu $\lambda = 2$ uſus Lemmatis ceſſat: tractanda ergo erit ipſa formula $\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2$, quae ob $\text{coſ.}\,\Phi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2\Phi$ abit in hanc: $+\frac{1}{2}\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi^2$, quae ob $\text{coſ.}\,2\Phi^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{coſ.}\,4\Phi$, abit in $\frac{1}{4}\int\partial\Phi\,(1+\text{coſ.}\,4\Phi) = \frac{1}{4}\pi$, ſicque pro caſu $\lambda = 2$ erit $\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2 = \frac{\pi}{4}$.

§. 16. His igitur caſibus ſimplicioribus expeditis ſequentes ope Lemmatis facile conficiuntur; reperiemus enim:

1. $\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^3 = 0.$
2. $\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^4 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{4}.$
3. $\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^5 = 0.$

$$4.\ \int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 2\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^6 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\frac{6\cdot 5}{4\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

$$5.\ \int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 2\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^8 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\frac{6\cdot 5}{4\cdot 8}\cdot\frac{8\cdot 7}{6\cdot 10}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

etc. etc.

Cum igitur invenerimus $\frac{1}{2}\pi C = \int \Phi \partial \Phi \operatorname{coſ.} 2\Phi$, ſi integralia modo inventa introducantur, ac per π dividantur, reperietur:

$$\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{4}(2) + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4\cdot 3}{2\cdot 6}(4) + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\tfrac{6\cdot 5}{4\cdot 8}(6) + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4\cdot 3}{2\cdot 6}\cdot\tfrac{6\cdot 5}{4\cdot 8}\cdot\tfrac{8\cdot 7}{6\cdot 10}(8) + \text{etc.}$$

quae concinnius hoc modo exprimi poteſt:

$$\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}(2) + \tfrac{3}{2\cdot 6}(4) + \tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 8}(6) + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 10}(8) + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 12}(10) + \text{etc.}$$

quae adhuc elegantius ita referri poteſt:

$$\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{4}\cdot(2) + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{2}(4) + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}(6) + \tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}(8) + \tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}(10) + \text{etc.}$$

ſive adhuc elegantius ita:

$$2C = (2) + \tfrac{4}{4}(4) + \tfrac{6\cdot 5}{4\cdot 8}\cdot(6) + \tfrac{7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}(8) + \tfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}(10) + \text{etc.}$$

§. 17. Pro ſequentibus terminis ſtabiliamus iſtud Lemma generale:

$$\int \partial\Phi \operatorname{coſ.} i\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^\lambda \left(\frac{a\ \Phi = 0}{ad\ \Phi = \pi}\right) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda - ii}\int \partial\Phi \operatorname{coſ.} i\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^{\lambda-2},$$

pro quo demonſtrando ſtatuamus in genere

$$\int \partial\Phi \operatorname{coſ.} i\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^\lambda = f \operatorname{ſin.} i\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^\lambda + g \operatorname{coſ.} i\Phi \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^{\lambda-1} + h\int \partial\Phi \operatorname{coſ.} i\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^{\lambda-2},$$

unde

unde differentiatio perducit ad hanc aequationem:

$$\text{coſ.}\, i\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^\lambda = (fi+g)\,\text{coſ.}\, i\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^\lambda - (\lambda f + gi)\,\text{ſin.}\, i\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^{\lambda-1}$$
$$- g(\lambda-1)\,\text{coſ.}\, i\Phi\, \text{ſin.}\, \Phi^2\, \text{coſ.}\, \Phi^{\lambda-2} + h\,\text{coſ.}\, i\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^{\lambda-2}$$

Hic iam primo termini, qui continent $\text{ſin.}\, i\Phi$, tolli debent, unde fit $g = -\frac{\lambda f}{i}$, quo valore ſubſtituto, per coſ. $i\Phi$ dividendo, poſtquam loco ſin. Φ^2 ſcriptum fuerit $1 - \text{coſ.}\, \Phi^2$, prodit iſta aequatio:

$$\text{coſ.}\, \Phi^\lambda = -\frac{f(\lambda\lambda - ii)}{i}\,\text{coſ.}\, \Phi^\lambda + \frac{\lambda f}{i}(\lambda-1)\,\text{coſ.}\, \Phi^{\lambda-2} + h\,\text{coſ.}\, \Phi^{\lambda-2},$$

unde manifeſto fit $f = \frac{-i}{\lambda\lambda - ii}$, hincque $h = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda - ii}$, ſicque reductio generalis ita ſe habebit:

$$\int \partial\Phi\, \text{coſ.}\, i\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^\lambda = \frac{-i}{\lambda\lambda - ii}\,\text{ſin.}\, i\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^\lambda$$
$$+ \frac{\lambda}{\lambda\lambda - ii}\,\text{coſ.}\, \Phi\, \text{ſin.}\, i\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^{\lambda-1}$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda\lambda - ii}\int \partial\Phi\, \text{coſ.}\, i\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^{\lambda-2},$$

quae ſaepenumero maximam utilitatem habere poteſt; poſito autem $\Phi = \pi$ manifeſto prodit effatum Lemmatis.

§. 18. Hoc Lemmate conſtituto pro littera D definienda ſumi debet $i = 3$, eritque

$$\int \partial\Phi\, \text{coſ.}\, 3\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^\lambda = \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}\int \partial\Phi\, \text{coſ.}\, 3\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^{\lambda-2};$$

unde ſtatim patet, caſibus $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ formulam iſtam evaneſcere, poſito ſcilicet $\Phi = \pi$, ita ut ſit

$$\int \partial\Phi\, \text{coſ.}\, 3\Phi = 0 \text{ et } \int \partial\Phi\, \text{coſ.}\, 3\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi = 0.$$

Hinc autem porro patet, caſu quoque $\lambda = 2$ fore

$$\int \partial\Phi\, \text{coſ.}\, 3\Phi\, \text{coſ.}\, \Phi^2 = 0.$$

At vero caſu $\lambda = 3$ Lemma dabit

$\int \partial\Phi$

$$\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^3 = \tfrac{0}{0},$$

cuius ergo valor peculiari modo inveſtigari debet; neque vero artificia cognita hic ullum uſum praeſtari poterunt.

§. 19. Ad ipſam ergo indolem formulae propoſitae $\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^3$ reſpicere debemus, reſolvendo poteſtatem $\operatorname{coſ.} \Phi^3$ in hanc formam: $\frac{\operatorname{coſ.} 3 \Phi + 3 \operatorname{coſ.} \Phi}{4}$; tum igitur erit

$$\operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^3 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} \operatorname{coſ.} 2 \Phi + \tfrac{3}{8} \operatorname{coſ.} 4 \Phi + \tfrac{1}{8} \operatorname{coſ.} 6 \Phi,$$

quae forma ducta in $\partial \Phi$ et integrata dat

$$\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^3 = \tfrac{1}{8} \Phi + \tfrac{3}{16} \operatorname{ſin.} 2 \Phi + \tfrac{3}{32} \operatorname{ſin.} 4 \Phi + \tfrac{1}{48} \operatorname{ſin.} 6 \Phi,$$

unde ſumto $\Phi = \pi$ valor exſurgit $= \frac{1}{8} \pi$, ita ut ſit

$$\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^3 = \tfrac{1}{8} \pi.$$

§. 20. Ab hoc autem valore $\lambda = 3$ pendent ſequentes: $\lambda = 5$; $\lambda = 7$; $\lambda = 9$; etc., qui ergo ita ſe habebunt:

$$\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^3 = \tfrac{\pi}{8},$$
$$\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^5 = \tfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 8} \cdot \tfrac{\pi}{8},$$
$$\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^7 = \tfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 8} \cdot \tfrac{7 \cdot 6}{4 \cdot 10} \cdot \tfrac{\pi}{8},$$
$$\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^9 = \tfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 8} \cdot \tfrac{7 \cdot 6}{4 \cdot 10} \cdot \tfrac{9 \cdot 8}{6 \cdot 12} \cdot \tfrac{\pi}{8},$$
$$\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} 3 \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^{11} = \tfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 8} \cdot \tfrac{7 \cdot 6}{4 \cdot 10} \cdot \tfrac{9 \cdot 8}{6 \cdot 12} \cdot \tfrac{11 \cdot 10}{8 \cdot 14} \cdot \tfrac{\pi}{8},$$

etc. etc.

reliqui vero caſus omnes evaneſcunt.

§. 21.

§. 21. Cum nunc ſit $D = \frac{2}{\pi}\int \Phi\, \partial\phi \,\text{coſ.}\, 3\phi$, exiſtente

$$\Phi = (0) + (1)\,\text{coſ.}\,\phi + (2)\,\text{coſ.}\,\phi^2 + (3)\,\text{coſ.}\,\phi^3 + (4)\,\text{coſ.}\,\phi^4 + \text{etc.}$$

ſingulos valores integrales in unam ſummam colligendo reperietur:

$$D = \tfrac{1}{4}\left[1\,(3) + \tfrac{5.4}{2.8}(5) + \tfrac{5.4}{2.8}\cdot\tfrac{7.6}{4.10}(7) + \tfrac{5.4}{2.8}\cdot\tfrac{7.6}{4.10}\cdot\tfrac{9.8}{6.12}(9) + \text{etc.}\right]$$

quae quidem expreſſio in plures alias formas transfundi poſſet, quarum elegantiſſima eſt haec:

$$4D = (3) + \tfrac{5}{4}(5) + \tfrac{7.6}{4.8}(7) + \tfrac{9.3.7}{4.8.12}(9) + \tfrac{11.10.9.8}{4.8.12.16}(11) + \tfrac{13.12.11.10.9}{4.8.12.16.20}(13) + \text{etc.}$$

§. 22. Pro littera porro E invenienda poni debet $i = 4$, et Lemma praemiſſum dabit:

$$\int \partial\phi \,\text{coſ.}\, 4\phi \,\text{coſ.}\,\phi^\lambda = \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-4)(\lambda+4)}\int \partial\phi \,\text{coſ.}\, 4\phi \,\text{coſ.}\,\phi^{\lambda-2},$$

unde iterum patet caſibus $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ valorem evaneſcere, quod propterea etiam continget caſibus $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$; at vero caſus $\lambda = 4$ peculiarem evolutionem poſtulat. Quoniam vero ante vidimus eſſe $\text{coſ.}\,\phi^3 = \frac{1}{4}\,\text{coſ.}\,3\phi + \frac{3}{4}\,\text{coſ.}\,\phi$, ſi denuo per $\text{coſ.}\,\phi$ multiplicemus, prodibit $\text{coſ.}\,\phi^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2\phi + \frac{1}{8}\,\text{coſ.}\,4\phi$, quae forma porro in $\text{coſ.}\,4\phi$ ducta dabit:

$$\text{coſ.}\,4\phi\,\text{coſ.}\,\phi^4 = \tfrac{1}{16} + \tfrac{4}{16}\,\text{coſ.}\,2\phi + \tfrac{6}{16}\,\text{coſ.}\,4\phi + \tfrac{4}{16}\,\text{coſ.}\,6\phi + \tfrac{1}{16}\,\text{coſ.}\,8\phi.$$

Haec iam formula ducatur in $\partial\phi$ et integretur, tum vero facto $\phi = \pi$ manifeſto reſultabit valor quaeſitus $= \frac{1}{16}\pi$, qui eatenus tantum prodiit, quatenus poteſtas $\text{coſ.}\,\phi^4$ per reſolutionem dederat $\text{coſ.}\,4\phi$.

§. 23. Cum igitur caſu $\lambda = 4$ prodierat valor $\frac{\pi}{16}$, reliqui independentes vi Lemmatis ſequentes accipient valores:

$\int \partial\phi$

$$\int \partial \Phi \operatorname{cof.} 4 \Phi \operatorname{cof.} \Phi^4 = \frac{\pi}{16},$$
$$\int \partial \Phi \operatorname{cof.} 4 \Phi \operatorname{cof.} \Phi^6 = \frac{6.5}{2.10} \cdot \frac{\pi}{16},$$
$$\int \partial \Phi \operatorname{cof.} 4 \Phi \operatorname{cof.} \Phi^8 = \frac{6.5}{2.10} \cdot \frac{8.7}{4.12} \cdot \frac{\pi}{16},$$
$$\int \partial \Phi \operatorname{cof.} 4 \Phi \operatorname{cof.} \Phi^{10} = \frac{6.5}{2.10} \cdot \frac{8.7}{4.12} \cdot \frac{10.9}{6.14} \cdot \frac{\pi}{16}.$$
etc. etc.

Cum igitur ſit $E = \frac{2}{\pi} \int \Phi \partial \Phi \operatorname{cof.} 4 \Phi$, exiſtente

$$\Phi = (0) + (1) \operatorname{cof.} \Phi + (2) \operatorname{cof.} \Phi^2 + (3) \operatorname{cof.} \Phi^3 + (4) \operatorname{cof.} \Phi^4 + \text{etc.}$$

praemiſſae reductiones nobis ſuppeditabunt ſequentem valorem:

$$E = \frac{1}{8} [(4) + \frac{5.6}{2.10} (6) + \frac{5.6.\ 7.8}{2.10.4.12} (8) + \frac{5.6.\ 7.8.\ 9.10}{2.10.4.12.6.14} (10) + \text{etc.}]$$

quae forma haud difficulter in ſequentem transfunditur:

$$8E = (4) + \frac{6}{4} (6) + \frac{8.7}{4.8} (8) + \frac{10.9.8}{4.\ 8.12} (10) + \frac{13.11.10.9}{4.\ 8.\ 12.16} (12) + \text{etc.}$$

His caſibus evolutis iam rem in genere exſequi poſſumus pro quocunque numero i, ubi totum negotium ad caſum $\lambda = i$ reducitur, quem ergo in peculiari problemate reſolvamus.

Problema.

Denotante i numerum integrum quemcunque inveſtigare valorem huius formulae integralis: $\int \partial \Phi \operatorname{cof.} i \Phi \operatorname{cof.} \Phi^i$, *ſi quidem poſt integrationem ſtatuatur* $\Phi = \pi$.

Solutio.

§. 24. Vt ſolutionem ex primis principiis repetamus, ponamus

$$\operatorname{cof.} \Phi + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi = p \text{ et } \operatorname{cof.} \Phi - \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi = q,$$

erit-

eritque primo $pq = 1$, deinde vero erit coſ. $\Phi = \frac{p+q}{2}$, et quia porro eſt

$$p^n = \text{coſ.}\, n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\, n\Phi \text{ et}$$
$$q^n = \text{coſ.}\, n\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\, n\Phi,$$

erit coſ. $i\Phi = \frac{p^i + q^i}{2}$, praeterea vero erit coſ. $\Phi^i = \frac{(p+q)^i}{2^i}$.

§. 25. Evolvatur iam poteſtas $(p+q)^i$ more ſolito; verum termini poſtremi cum primis iuncti repraeſententur hoc modo:

$$(p+q)^i = +p^i + \tfrac{i}{1}p^{i-1}q + \tfrac{i(i-1)}{1.\ 2}p^{i-2}qq + \tfrac{i(i-1)(i-2)}{1.\ 2.\ 3}p^{i-3}q^3 + \text{etc.}$$
$$+q^i + \tfrac{i}{1}pq^{i-1} + \tfrac{i(i-1)}{1.\ 2}ppq^{i-2} + \tfrac{i(i-1)(i-2)}{1.\ 2.\ 3}p^3q^{i-3} + \text{etc.}$$

quae ſeries, ob $pq = 1$, in hanc formam commodiorem redigitur:

$$(p+q)^i = p^i + q^i + \tfrac{i}{1}.(p^{i-2} + q^{i-2}) + \tfrac{i(i-1)}{1.\ 2}(p^{i-4} + q^{i-4})$$
$$+ \tfrac{i(i-1)(i-2)}{1.\ 2.\ 3}(p^{i-6} + q^{i-6}) \text{ etc.}$$

Hic tantum notari oportet caſibus, quibus i eſt numerus par, terminum dari medium ſolitarium, qui continebit quantitatem conſtantem, quam ergo duplicare non decet.

§. 26. Cum igitur ad angulos regrediendo ſit in genere $p^n + q^n = 2$ coſ. $n\Phi$, erit nunc:

$$(p+q)^i = 2\,\text{coſ.}\, i\Phi + \tfrac{2i}{1}\text{coſ.}(i-2)\Phi + \tfrac{2i(i-1)}{1.\ 2}\text{coſ.}(i-4)\Phi$$
$$+ \tfrac{2i(i-1)(i-2)}{1.\ 2.\ 3}\text{coſ.}(i-6)\Phi + \text{etc.}$$

quoniam vero eſt $p+q = 2$ coſ. Φ, erit

$$2^{i-1}\text{coſ.}\,\Phi^i = \text{coſ.}\, i\Phi + \tfrac{i}{1}\text{coſ.}(i-2)\Phi + \tfrac{i(i-1)}{1.\ 2}\text{coſ}\,(i-4)\Phi$$
$$+ \tfrac{i(i-1)(i-2)}{1.\ 2.\ 3}\text{coſ.}(i-6)\Phi + \text{etc.}$$

Multiplicetur nunc utrinque per $2\,\text{coſ.}\,i\,\Phi$ et per notiſſimas reductiones reperietur:

$$2\,\text{coſ.}\,i\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^i = 1 + \tfrac{i}{1}\,\text{coſ.}\,2\Phi + \tfrac{i(i-1)}{1.\;2}\,\text{coſ.}\,4\Phi + \tfrac{i(i-1)(i-2)}{1.\;2.\;3}\,\text{coſ.}\,6\Phi + \text{etc.}$$
$$+ \text{coſ.}\,2\,i\,\Phi + \tfrac{i}{1}\,\text{coſ.}\,(2\,i-2)\,\Phi + \tfrac{i(i-1)}{1.\;2}\,\text{coſ.}\,(2\,i-4)\,\Phi$$
$$+ \tfrac{i(i-1)(i-2)}{1.\;2.\;3}\,\text{coſ.}\,(2\,i-6)\,\Phi + \text{etc.}$$

§. 27. Multiplicetur nunc utrinque per $\partial\,\Phi$ et integretur, prodibitque

$$2^i\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,i\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^i = \Phi + \tfrac{i}{2}.\,\text{ſin.}\,2\,\Phi + \tfrac{i(i-1)}{4.\;2}\,\text{ſin.}\,4\,\Phi + \text{etc.}$$
$$+ \tfrac{1}{2\,i}\,\text{ſin.}\,2\,i\,\Phi + \tfrac{i}{2\,i-2}\,\text{ſin.}\,(2\,i-2)\,\Phi + \tfrac{i(i-1)}{(2\,i-4)\,2}\,\text{ſin.}\,(2\,i-4)\,\Phi + \text{etc.}$$

quae formula iam evaneſcit poſito $\Phi = 0$. Statuatur ergo $\Phi = \pi$, atque proveniet $2^i\int\partial\,\Phi\,\text{coſ.}\,i\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^i = \pi$, quocirca valor in problemate quaeſitus erit

$$= \int\partial\,\Phi\,\text{coſ.}\,i\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^i = \frac{\pi}{2^i}.$$

§. 28. Quodſi iam ponamus in ſerie quam quaerimus

$$A + B\,\text{coſ.}\,\Phi + C\,\text{coſ.}\,2\,\Phi + D\,\text{coſ.}\,3\,\Phi + E\,\text{coſ.}\,4\,\Phi + \text{etc.}$$

coëfficientem ipſius coſ. $i\,\Phi$ eſſe I, ita ut ſit

$$I = \tfrac{2}{\pi}\int\Phi\,\partial\,\Phi\,\text{coſ.}\,i\,\Phi, \text{ exiſtente}$$
$$\Phi = (\;) + (1)\,\text{coſ.}\,\Phi + (2)\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + (3)\,\text{coſ.}\,\Phi^3 + (4)\,\text{coſ.}\,\Phi^4 + \text{etc.}$$

evidens eſt ex ſingulis terminis initialibus nihil prodire, donec perveniatur ad $\lambda = i$, quippe quo caſu modo vidimus eſſe $\int\partial\,\Phi\,\text{coſ.}\,i\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^i = \frac{\pi}{2^i}$, a quo valore pendent caſus ſequentes per binarium aſcendentes, $\lambda = i + 2$; $\lambda = i + 4$; $\lambda = i + 6$; etc. Scilicet vi Lemmatis erit:

$\int\partial\,\Phi$

$$\int \partial \Phi \,\text{coſ.}\, i\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi^{i+2} = \frac{\pi}{2^i} \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-i)(\lambda+i)} = \frac{(i+2)}{4} \cdot \frac{\pi}{2^i};$$

$$\int \partial \Phi \,\text{coſ.}\, i\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi^{i+4} = \frac{(i+4)}{4.}\frac{(i+3)}{8} \cdot \frac{\pi}{2^i};$$

$$\int \partial \Phi \,\text{coſ.}\, i\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi^{i+6} = \frac{(i+6)}{4.}\frac{(i+5)}{8.}\frac{(i+4)}{12} \cdot \frac{\pi}{2^i};$$

$$\int \partial \Phi \,\text{coſ.}\, i\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi^{i+8} = \frac{(i+8)}{4.}\frac{(i+7)}{8.}\frac{(i+6)}{12.}\frac{(i+5)}{16} \cdot \frac{\pi}{2^i};$$

$$\int \partial \Phi \,\text{coſ.}\, i\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi^{i+10} = \frac{(i+10)}{4.}\frac{(i+9)}{8.}\frac{(i+8)}{12.}\frac{(i+7)}{16.}\frac{(i+6)}{20} \cdot \frac{\pi}{2^i};$$

etc. etc.

§. 29. His iam terminis colligendis et multiplicando per 2^{i-1} orietur ſequens expreſſio:

$$2^{i-1}I = (i) + \frac{i+2}{4}(i+2) + \frac{(i+4)}{4.}\frac{(i+3)}{8}(i+4) + \frac{(i+6)}{4.}\frac{(i+5)}{8.}\frac{(i+4)}{12}(i+6)$$
$$+ \frac{(i+8)}{4.}\frac{(i+7)}{8.}\frac{(i+6)}{12}\frac{(i+5)}{16}(i+8) + \text{etc.}$$

quae forma iam continet determinationem omnium terminorum ſeriei, in quam formulam:

$$\Phi = (0) + (1)\,\text{coſ.}\,\Phi + (2)\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + (3)\,\text{coſ.}\,\Phi^3 + (4)\,\text{coſ.}\,\Phi^4 + \text{etc.}$$

evolvere erat propoſitum, quam hoc modo hactenus repraeſentavimus:

$$\Phi = A + B\,\text{coſ.}\,\Phi + C\,\text{coſ.}\,2\Phi + D\,\text{coſ.}\,3\Phi + E\,\text{coſ.}\,4\Phi + \text{etc.}$$

cuius ſinguli termini per ſequentes ſeries exprimentur:

$$A = (0) + \tfrac{2}{4}(2) + \tfrac{4.3}{4.8}(4) + \tfrac{6.5.4}{4.8.12}(6) + \tfrac{8.7.6.5}{4.8.12.16}(8) + \text{etc.}$$

$$1.\; B = (1) + \tfrac{3}{4}(3) + \tfrac{5.4}{4.8}(5) + \tfrac{7.6.5}{4.8.12}(7) + \tfrac{9.8.7.6}{4.8.12.16}(9) + \text{etc.}$$

$$2.\; C = (2) + \tfrac{4}{4}(4) + \tfrac{6.5}{4.8}(6) + \tfrac{8.7.6}{4.8.12}(8) + \tfrac{10.9.8.7}{4.8.12.16}(10) + \text{etc.}$$

$$4.\,D = (3) + \tfrac{5}{4}(5) + \tfrac{7.6}{4.8}(7) + \tfrac{9.3.7}{4.8.12}(9) + \tfrac{11.10.9.8}{4.8.12.16}(11) + \text{etc.}$$

$$8.\,E = (4) + \tfrac{6}{4}(6) + \tfrac{8.7}{4.8}(8) + \tfrac{10.9.8}{4.8.12}(10) + \tfrac{12.11.10.9}{4.8.12.16}(12) + \text{etc.}$$

$$16.\,F = (5) + \tfrac{7}{4}(7) + \tfrac{9.8}{4.8}(9) + \tfrac{11.10.9}{4.8.12}(11) + \tfrac{13.12.11.10}{4.8.12.16}(13) + \text{etc.}$$

etc. etc.

atque in genere, ſi in ſerie quaeſita terminus indici i reſpondens fuerit I coſ. $i\,\Phi$ erit:

$$2^{i-1}\text{I} = (i) + \tfrac{i+2}{4}(i+2) + \tfrac{i+4}{4}\cdot\tfrac{i+3}{8}(i+4) + \tfrac{i+6}{4}\cdot\tfrac{i+5}{8}\cdot\tfrac{i+4}{12}(i+6)$$
$$+ \tfrac{i+8}{4}\cdot\tfrac{i+7}{8}\cdot\tfrac{i+6}{12}\cdot\tfrac{i+5}{16}(i+8) + \text{etc.}$$

INVE-

INVESTIGATIO QVARVNDAM SERIERVM, QVAE AD RATIONEM PERIPHERIAE CIRCVLI AD DIAMETRVM VERO PROXIME DEFINIENDAM MAXIME SVNT ACCOMMODATAE.

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhibita die 7 Iunii 1779.

§. 1.

Qui poſt *Ludolphum a Ceulen* veram rationem peripheriae ad diametrum proxime aſſignare ſuſceperunt, uſi ſunt ſerie *Leibnitiana*, qua pro circulo, cuius radius $= 1$, arcus quicunque s per ſuam tangentem t ita exprimi ſolet, ut ſit

$$s = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 + \text{etc.},$$

quae eo magis convergit, quo minor tangens t accipiatur. Sed quia arcus s ad totam peripheriam, vel ad arcum quadrantis cognitam rationem tenere debet, pro arcu s vix minorem valorem aſſumere licet, quam 30 graduum quippe cuius tangens eſt $\frac{1}{\sqrt{3}}$, quo valore in ſerie ſubſtituto, ſi ſemiperipheria circuli per π deſignetur, erit $\pi = 6s$, unde deducitur haec ſeries:

$$\pi = \sqrt{12} \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \text{etc.}\right)$$

Hinc

Hinc patet, calculum huius ſeriei ante inſtitui non poſſe, quam radix quadrata ex numero 12 ad tot figuras decimales fuerit extracta, ad quot valor ipſius π deſideratur, quem ſtupendum laborem olim *Abrahamus Sharp* usque ad 72 figuras decimales; tum vero Profeſſor Greshamienſis *Machin* ad 100 figuras eſt exſecutus. Multo maiorem autem laborem ſollertiſſimus calculator Gallus *de Lagny* eſt exantare coactus, qui ex eadem ſerie valorem ipſius π adeo usque ad 128 figuras decimales determinavit, qui labor certe plus quam Herculeus eſt cenſendus, cum tamen extractio radicis ex numero 12 tantum tanquam opus praeliminare ſit ſpectandum, iſtam enim immenſam fractionem decimalem demum opus erat continuo per 3 dividere, quo facto inſuper ſinguli termini per numeros impares 3, 5, 7, 9, 11, etc. ordine dividi debebant. Cum igitur iſtius ſeriei quilibet terminus in hac forma contineatur: $\frac{+\sqrt{12}}{(2n+1)3^n}$, ubi n denotat numerum terminorum, tot terminos computari oportet, donec fiat $\frac{(2n+1)3^n}{\sqrt{12}} = 10^{128}$, ſive, logarithmis vulgaribus ſumendis, donec fiat $l(2n+1) + nl3 - \frac{1}{2}l12 = 128$; unde primam partem $l(2n+1)$ negligendo colligitur $n = \frac{128 + \frac{1}{2}l12}{l3}$, hincque prodit terminorum numerus aliquanto minor quam 269; ex quo utique maxime eſt mirandum, quemquam fuiſſe repertum, qui hunc ſtupendum laborem exſequi ſit auſus.

§. 2. Iam dudum autem propoſui methodum iſtum laborem plurimum ſublevandi. Poſtquam ſcilicet oſtendi, duos

duos arcus ſatis exiguos in hunc uſum adhiberi poſſe, quorum quidem neuter ad peripheriam teneat rationem rationalem, quorum tamen ſumma talem rationem teneat. Tales arcus ſunt: $A\ tang.\ \frac{1}{2} + A\ tang.\ \frac{1}{3} = A\ tang.\ 1 = \frac{\pi}{4}$, ita ut $\pi = 4\ A\ tang.\ \frac{1}{2} + 4\ A\ tang.\ \frac{1}{3}$, quorum uterque per noſtram ſeriem facile evolvitur, cum ſit:

$$A\ tang.\ \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3 \cdot 2^3} + \tfrac{1}{5 \cdot 2^5} - \tfrac{1}{7 \cdot 2^7} + \text{etc. et}$$

$$A\ tang.\ \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3 \cdot 3^3} + \tfrac{1}{5 \cdot 3^5} - \tfrac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{etc.}$$

ubi termini illius ſeriei fere in ratione quadrupla decreſcunt, huius vero in ratione fere noncupla, ideoque multo magis convergunt, quam ſeries ab Auctoribus memoratis uſurpata. Praecipue vero notandum eſt hoc modo nullam extractionem radicis requiri, ſicque fere maximam partem illius laboris evitari; praeterea etiam ſinguli termini harum novarum ſerierum facillime in fractiones decimales convertuntur, quae, quia figurae certum ordinem, imprimis ab initio, ſervant, computus ad quotcunque figuras ſine magno labore extenditur.

§. 3. Multo magis autem labor diminuetur, ſi adhuc minores arcus in ſubſidium vocentur. Cum enim ſit

$$A\ tang.\ \tfrac{1}{2} = A\ tang.\ \tfrac{1}{3} + A\ tang.\ \tfrac{1}{7},$$

erit nunc

$$\pi = 8\ A\ tang.\ \tfrac{1}{3} + 4\ A\ tang.\ \tfrac{1}{7},$$

ſicque in ſerie priore termini ſtatim in ratione noncupla decreſcunt, in poſteriore vero adeo 49 vicibus evadunt minores. Vnicum autem, quod hic deſiderari poſſet, in hoc conſiſtit, quod non tam facile per 49 continua diviſio inſtituatur, optandumque fuiſſet, ut iſta diviſio vel per poteſtatem denarii vel alius numeri ſimplicem ad 10 rationem tenentis, expediri poſſet.

§. 4. Incidi autem nuper in modum prorſus ſingularem, quo huic incommodo feliciſſimo ſucceſſu occurritur atque adeo ſeries praecedentes magis convergentes redduntur. Conſtat autem iſte modus in idonea transformatione ſeriei *Leibnitianae*, quae per ſequentes operationes procedit:

$$s = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + \text{etc.}$$

$$stt = t^3 - \frac{t^5}{3} + \frac{t^7}{5} - \frac{t^9}{7} + \text{etc.}$$

$$\text{ergo } s + stt = t + \tfrac{2}{3}t^3 - \frac{2}{3.5}t^5 + \frac{2}{5.7}t^7 - \text{etc.} = t + s'tt$$

$$\text{ergo } s' = \tfrac{2}{3}t - \frac{2}{3.5}t^3 + \frac{2}{5.7}t^5 - \frac{2}{7.9}t^7 + \text{etc.}$$

$$\text{hinc } s'tt = \frac{2}{1.3}t^3 - \frac{2}{3.5}t^5 + \frac{2}{5.7}t^7 - \text{etc.}$$

$$s'(1+tt) = \tfrac{2}{3}t + \frac{2.4}{3.5}t^3 - \frac{2.4}{3.5.7}t^5 + \frac{2.4}{5.7.9}t^7 - \text{etc.} = \tfrac{2}{3}t + s''tt$$

$$\text{ergo } s'' = \frac{2.4}{1.3.5}t - \frac{2.4}{3.5.7}t^3 + \frac{2.4}{5.7.9}t^5 - \text{etc.}$$

$$s''tt = + \frac{2.4}{1.3.5}t^3 - \frac{2.4}{3.5.7}t^5 + \text{etc.}$$

$$s''(1+tt) = \frac{2.4}{3.5}t + \frac{2.4.6}{1.3.5.7}t^3 - \frac{2.4.6}{3.5.7.9}t^5 + \text{etc.} = \frac{2.4}{3.5}t + s'''tt$$

$$s''' = \frac{2.4.6}{3.5.7}t - \frac{2.4.6}{3.5.7.9}t^3 + \frac{2.4.6}{5.7.9.11}t^5 - \text{etc.}$$

$$s'''tt = + \frac{2.4.6}{1.3.5.7}t^3 - \frac{2.4.6}{3.5.7.9}t^5 + \text{etc.}$$

$$s'''(1+tt) = \frac{2.4.6}{3.5.7}t + \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9}t^3 - \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9.11}t^5 + \text{etc.}$$

etc. etc.

§. 5. Colligamus iam ſingulas ſubſtitutiones hic factas, quae ſunt:

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{s'tt}{1+tt},$$

$$s' = \frac{2t}{3(1+tt)} + \frac{s''tt}{1+tt},$$

$$s'' = \frac{2.4t}{3.5(1+tt)} + \frac{s'''tt}{1+tt},$$
$$s''' = \frac{2.4.6t}{3.5.7(1+tt)} + \frac{s''''tt}{1+tt},$$
etc.

Quod ſi iam valores poſteriores in praecedentibus ſubſtituantur, pro arcu s ſequens obtinebitur nova ſeries:

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4} + \text{etc.}$$

quae ad ſequentem formam commodiorem reducitur:

$$s = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{tt}{1+tt}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$

ubi ſinguli termini adhuc facilius evolvuntur quam in ſerie praecedente, propterea quod ex quolibet termino ſequens immediate determinari poteſt. Ita ex primo termino reperitur ſecundus, ſi ille per $\frac{2}{3}$ et per $\frac{tt}{1+tt}$ multiplicetur (Multiplicatio autem per $\frac{2}{3}$ fit, dum pars tertia ſubtrahitur). Secundus per $\frac{4}{5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)$ multiplicatus dat tertium; hic vero, per $\frac{6}{7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)$ multiplicatus, dat quartum, et ita porro. Facillime autem per fractiones $\frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}$, etc. multiplicatur. Praeterea vero haud exiguum eſt lucrum, quod omnes termini ſunt poſitivi, eorumque ergo ſola additio arcum quaeſitum s ſuppeditat.

§. 6. Ad hanc autem novam ſeriem primum methodo longe alia ſum perductus, quam hic appoſuiſſe operae erit pretium. Cum ſit $s = \int\frac{\partial t}{1+tt}$, quaeſtionem hoc modo determinate ſum contemplatus, ut ſcilicet quaereretur valor huius formulae integralis, ſi a termino $t = 0$ usque ad terminum $t = a$ extendatur, ita ut futurum ſit $s = \text{A tang.}\, a$.

§. 7. Tum vero huius formulae denominatorem $1 + tt$ ſub hac forma repraeſento: $1 + aa - (aa - tt)$,

 hinc-

hincque porro ſub hac: $1 + aa(1 - \frac{aa-tt}{1+aa})$, quo facto fractio $\frac{1}{1+tt}$ evolvetur in hanc ſeriem:

$$\frac{1}{1+aa}[1 + \frac{aa-tt}{1+aa} + (\frac{aa-tt}{1+aa})^2 + (\frac{aa-tt}{1+aa})^3 + \text{etc.}]$$

ſicque erit

$$s = \frac{1}{1+aa}\int \partial t\,[1 + \frac{aa-tt}{1+aa} + (\frac{aa-tt}{1+aa})^2 + \text{etc.}],$$

poſtquam ſcilicet integratio a $t = 0$ usque ad $t = a$ fuerit extenſa; unde ſtatim patet, pro primo termino fore $\int \partial t = a$; pro ſecundo autem $\int \partial t\,(aa - tt) = \frac{2}{3}a^3$.

§. 8. At vero, quo facilius omnes termini ſequentes integrentur, ſequentem aequationem evolvi conveniet:

$$\int \partial t(aa-tt)^{n+1} = A\int \partial t(aa-tt)^n + Bt(aa-tt)^{n+1},$$

quae differentiata ac per $\partial t\,(aa - tt)^n$ diviſa praebet:

$$aa - tt = A + B(aa - tt) - 2(n+1)Btt,$$

ubi duplicis generis termini occurrunt, ſcilicet vel mere conſtantes, vel quadrato tt affecti, qui ſeorſim ſe mutuo tollere debent.

§. 9. Quoniam autem huius aequationis membrum primum et tertium continet factorem $aa - tt$, neceſſe eſt ut ſecundum cum quarto eundem factorem involvat, quod evenit, ſtatuendo $A = 2(n+1)Baa$, quo facto, ſi aequatio inſuper per $aa - tt$ dividatur, prodibit $1 = B(2n+3)$; unde colligitur: $B = \frac{1}{2n+3}$ hincque $A = \frac{2(n+1)}{2n+3}aa$, ſicque aequatio noſtra aſſumta iam erit:

$$\int \partial t(aa-tt)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}aa\int \partial t(aa-tt)^n + \frac{t}{2n+3}(aa-tt)^{n+1}.$$

Qua-

Quare ſi integralia a $t = 0$ usque ad $t = a$ extendantur, poſtremum membrum ſponte abit in nihilum, ſicque habebimus hanc reductionem generalem:

$$\int \partial t\,(aa - tt)^{n+1} = \frac{2(n+1)aa}{2n+3}\int \partial t\,(aa - tt)^n.$$

§. 10. Iam ope huius reductionis ex quolibet termino noſtrae ſeriei facillime terminus ſequens aſſignari poterit. Quod ſi enim loco exponentis n ſucceſſive omnes valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. ponamus, ſequentia integralia nanciſcemur:

$$\int \partial t\,(aa - tt) = \tfrac{2}{3}a^3,$$
$$\int \partial t\,(aa - tt)^2 = \tfrac{2.4}{3.5}a^5,$$
$$\int \partial t\,(aa - tt)^3 = \tfrac{2.4.6}{3.5.7}a^7,$$
$$\int \partial t\,(aa - tt)^4 = \tfrac{2.4.6.8}{3.5.7.9}a^9,$$

etc.

§. 11. Quod ſi iam ſinguli hi valores in noſtra ſerie ſubſtituantur, integrale, quod quaerimus, ſequenti modo exprimetur:

$$s = \text{A tag.}\,a = \frac{1}{1+aa}\left(a + \frac{\frac{2}{3}a^3}{1+aa} + \frac{\frac{2.4}{3.5}a^5}{(1+aa)^2} + \frac{\frac{2.4.6}{3.5.7}a^7}{(1+aa)^3} + \text{etc.}\right)$$

unde, ſi loco a reſtituamus t, orietur ipſa ſeries methodo praecedente inventa, ſcilicet:

$$s = \text{A tag.}\,t = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{tt}{1+tt}\right) + \tfrac{2.4}{3.5}\left(\tfrac{tt}{1+tt}\right)^2 + \tfrac{2.4.6}{3.5.7}\left(\tfrac{tt}{1+tt}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

§. 12. Nunc igitur hanc novam ſeriem ad noſtrum inſtitutum propius accommodemus, et quoniam ſupra primo hanc habuimus aequationem: $\pi = 4\,\text{A tang.}\,\frac{1}{2} + 4\,\text{A tang.}\,\frac{1}{3}$,

pro priore parte, ubi $t = \frac{1}{2}$, obtinebimus hanc ſeriem:

$$A\ \text{tang.}\ \frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right)$$

pro altera autem parte, ubi $t = \frac{1}{3}$, erit

$$A\ \text{tang.}\ \frac{1}{3} = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{10^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{10^3} + \text{etc.}\right)$$

conſequenter valor ipſius π per binas ſequentes ſeries exprimetur:

$$\pi = \left\{\begin{array}{l} + \frac{16}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{10}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right) \\ + \frac{12}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right) \end{array}\right\},$$

quae duae ſeries manifeſto multo minore labore per numeros evolvuntur, quam eae, quas ſupra dedimus, propterea quod hic in factoribus habemus ipſum denarium, atque hae ſeries adeo magis convergunt.

§. 13. Lucrum autem adhuc multo erit maius, ſi forma $\pi = 8\ A\ \text{tang}\ \frac{1}{3} + 4\ A\ \text{tang.}\ \frac{1}{7}$ per novam ſeriem evolvatur, cuius pars prior iam eſt evoluta; pro altera autem, ubi $t = \frac{1}{7}$, nunc habebimus:

$$A\ \text{tang.}\ \frac{1}{7} = \frac{7}{50}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{50^3} + \text{etc.}\right).$$

Hinc igitur nanciſcemur ſequentes ſeries pro valore ſemiperipheriae π indagando:

$$\pi = \left\{\begin{array}{l} + \frac{24}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right) \\ + \frac{28}{50}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \text{etc.}\right) \end{array}\right\},$$

haeque duae ſeries ſunt aptiſſimae ad valorem ipſius π ad quotcunque figuras decimales exprimendum, propterea quod ſinguli termini ex praecedentibus facillime formantur atque adeo prioris ſeriei termini iam in ratione decupla, poſterioris vero in quinquies decupla decreſcunt. Vnde ſi quis hunc valorem

lorem ad 128 figures definire vellet, pro priori ſerie computare deberet terminos centum viginti octo, poſterioris vero ſeptuaginta quinque tantum.

§. 14. Quo uſus harum ſerierum clarius appareat, utriusque ſeriei octo terminos priores in fractiones decimales evolvamus, eritque

Pro parte priore.

term.	I.	= 2, 4 etc.
——	II.	= - 16 etc.
——	III.	= - - 128 etc.
——	IV.	= - - 109,714285,714285,714285,7142 etc.
——	V.	= - - - - 97,523809,523809,523809,523 etc.
——	VI.	= - - - - - 8,865800,865800,865800,865 etc.
——	VII.	= - - - - - - 81,838161,838161,838161,8 etc.
——	VIII.	= - - - - - - 76,382284,382284,382284, etc.
Pars.	I.	= 2,574004427 | 231435 | 231435 | 231435 etc.

Pro parte poſteriore.

term.	I.	= 0,560 etc.
——	II.	= - - 7466666666666666666666666 etc.
——	III.	= - - - 119466666666666666666666 etc.
——	IV.	= - - - - 2048000000000000000000 etc.
——	V.	= - - - - - 36408888888888888888 etc.
——	VI.	= - - - - - - 661979797979797979 etc.
——	VII.	- - - - - - - - - 1222116550116550 1 etc.
——	VIII.	= - - - - - - - - - 2281284226884 22 etc.
Pars	II.	= 0,56758821841665131 | 412587 | 4125 etc.

Hinc

Hinc patet iſtas ſummas octo priorum terminorum, ob revolutiones periodicas in figuris occurrentes, ſine ullo labore ad quotcunque figuras continuari poſſe.

§. 15. Ex hoc ſchemate iam ſtatim verus valor ipſius π ad octo figuras usque aſſignari poterit. Cum enim octo priorum terminorum ſumma ſit

Partis prioris $= 2,57400443$
Partis poſterioris $= 0,56758822$

erit valor ipſius $\pi = 3,14159265$

ubi ne in ultima quidem figura erratur. Facile autem iſte calculus ad plures figuras extendi poteſt, propterea quod termini octavum ſubſequentes ex eo ipſo ſine difficultate computantur. Eſt enim

Pro parte priore.

terminus IX. $= \frac{1}{10}(1 - \frac{1}{17})$ VIII.
—— X. $= \frac{1}{10}(1 - \frac{1}{19})$ IX.
—— XI. $= \frac{1}{10}(1 - \frac{1}{21})$ X.
etc.

Pro parte poſteriore.

terminus IX. $= \frac{2}{100}(1 - \frac{1}{17})$ VIII.
—— X. $= \frac{2}{100}(1 - \frac{1}{19})$ IX.
—— XI. $= \frac{2}{100}(1 - \frac{1}{21})$ X.
etc.

§. 16. Quo uſus harum formularum magis eluceſcat, quaeramus valorem ipſius π usque ad 16 figuras, et calculus erit:

Pro

Pro parte priore.

I. . . . VIII.	=	2, 574004427231435 23
term. IX.	=	- - - - - 718892088
— X.	=	- - - - - 68105566
— XI.	=	- - - - - - 6486244
— XII.	=	- - - - - - 620423
— XIII.	=	- - - - - - 59561
— XIV.	=	- - - - - - - 5735
— XV.	=	- - - - - - - 554
— XVI.	=	- - - - - - - - 54
Summa	=	2, 5740044351731 3748.

Pro parte poſteriore.

I. . . . VIII.	=	0, 5675882184166 5131
term. IX.	=	- - - - - - - 429
— X.	=	- - - - - - - - 8
Pars II.	=	0, 5675882184166 5567
Pars I.	=	2, 5740044351731 3748
hinc π	=	3, 1415926535897 9315

§. 17. Poſſunt vero etiam aliae huiusmodi formulae pro π inveniri, quae adhuc magis convergant ac pariter per poteſtates denarii procedant. Cum enim in genere ſit

$$\text{A tang.}\, \frac{\alpha}{a} = \text{A tang.}\, \frac{\beta}{b} + \text{A tang.}\, \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha\beta + a b},$$

ſi ſumamus $t = \frac{\alpha}{a}$, vel $\frac{\beta}{b}$, erit $\frac{tt}{1+tt} = \frac{\alpha\alpha}{\alpha\alpha + aa}$ vel $\frac{\beta\beta}{\beta\beta + bb}$; ſumto vero $t = \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha\beta + ab}$ fiet $\frac{tt}{1+tt} = \frac{(\alpha b - \beta a)^2}{(\alpha\alpha + aa)(\beta\beta + bb)}$. Vnde patet, ſi priores denominatores $\alpha\alpha + aa$ et $\beta\beta + bb$ fuerint poteſtates denarii, vel eo ſaltem reduci queant, quod eve-

evenit, quando alios factores non involvunt praeter 2 et 5, tum etiam tertium denominatorem certe ad poteſtatem denarii reduci poſſe.

§. 18. Quoniam igitur habuimus hanc formulam:

$$\pi = 8 \text{ A tang. } \tfrac{1}{3} + 4 \text{ A tang. } \tfrac{1}{7},$$

loco prioris arcus ope reductionis allatae duos alios introducamus, ponendo ſcilicet $\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{3}$; et pro $\frac{\beta}{b}$ ſumamus $\frac{1}{7}$, ſietque tertius arcus $= \text{A tang. } \frac{2}{11}$, ita ut ſit

$$\text{A tang. } \tfrac{1}{3} = \text{A tang. } \tfrac{1}{7} + \text{A tang. } \tfrac{2}{11},$$

quo valore ſubſtituto formula noſtra erit

$$\pi = 12 \text{ A tang. } \tfrac{1}{7} + 8 \text{ A tang. } \tfrac{2}{11},$$

cuius arcum priorem iam ante evolvimus. At vero ob $\frac{tt}{1+tt} = \frac{4}{125} = \frac{32}{1000}$ pro altero habebimus:

$$\text{A tang. } \tfrac{2}{11} = \tfrac{22}{125} \left[1 + \tfrac{2}{3} \left(\tfrac{32}{1000}\right) + \tfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\tfrac{32}{1000}\right)^2 + \tfrac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\tfrac{32}{1000}\right)^3 + \text{etc.} \right]$$

Verum hic continua multiplicatio per numerum 32 non ſatis ad calculum eſt idonea, praecipue autem haec ſeries minus convergit quam quae ex $\frac{1}{7}$ eſt deducta.

§. 19. Hanc ob cauſſam penitus reiiciamus iſtum arcum, eiusque loco ope reductionis ſupra datae ſubſtituamus duos novos arcus, quorum alter ſit $\frac{1}{7}$, ſtatuendo $\frac{\alpha}{a} = \frac{2}{11}$ et $\frac{\beta}{b} = \frac{1}{7}$, hincque fiet $\frac{\alpha b - \beta a}{\alpha \beta + a b} = \frac{3}{79}$, ita ut ſit

$$\text{A tang. } \tfrac{2}{11} = \text{A tang. } \tfrac{1}{7} + \text{A tang. } \tfrac{3}{79},$$

hincque

$$\pi = 20 \text{ A tang. } \tfrac{1}{7} + 8 \text{ A tang. } \tfrac{3}{79}.$$

Vbi

Vbi notetur, poſito $t = \frac{3}{79}$ fore

$$\frac{tt}{1+tt} = \frac{9}{6250} = \frac{144}{100000},$$

quae fractio propemodum eſt $\frac{1}{700}$; unde patet, hanc ſeriem:

$$A\ tang.\ \frac{3}{79} = \frac{237}{6250}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \text{etc}\right]$$

maxime convergere eiusque terminos propemodum ſeptingenties fieri minores.

§. 20. Iſta igitur ſeries maxime eſt notatu digna, propter inſignem convergentiam, atque adeo plurimum operae pretium erit multiplicatione per 144 non deterreri, quippe quae, bis per 12 multiplicando, facile abſolvi poteſt. Per 12 autem multiplicare vix difficilius eſt quam per 2. Evolvamus igitur ambos iſtos arcus per noſtram novam ſeriem, atque impetrabimus ſequentem formam:

$$\pi = \begin{cases} + \frac{28}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ + \frac{30336}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \text{etc}\right] \end{cases}$$

Hic igitur coëfficiens prioris ſeriei quinquies maior eſt quam ſupra, unde etiam ſinguli termini ibi exhibiti toties maiores ſunt capiendi, unde ſumma octo priorum terminorum erit:

2, 837941092083256̇5 | 706293 | 706293 | 706 etc.

octavus autem terminus:

0, 00000000000114064 | 211344 | 211344 | 211 etc.

ex quo iam ſequentes termini facile colliguntur.

§. 21. Quo autem pro altera ſerie calculus commodius inſtitui poſſit, primo conveniet diviſiones per 100000 prorſus praetermitti, ita ut ex quolibet termino ſequens ob-

tineatur, dum ille bis per 12 multiplicetur et a producto debita pars ſubtrahatur, nullo reſpectu habito ad loca ciphrarum decimalium; quandoquidem ex hoc capite aberrari nequit, dum ſatis conſtat quoties quilibet terminus minor eſt praecedente. Talem calculum pro ſex prioribus terminis hic exhibeamus:

term. I. =	0,30336
	364032
3.)	4368384
	1456128
term. II. =	2912256
	34947072
5.)	419364864
	838729728
term. III. =	3354918912
	40259026944
7.)	483108323328
	69015474761, 142857, 142857, 142 etc.
term. IV. =	414092848566, 857142, 857142, 857 etc.
	4969114182802, 285714, 285714, 285 etc.
9.)	59629370193627, 428571, 428571, 428 etc.
	6625485577069, 714285, 714285, 714 etc.
term. V. =	53003884616557, 714285, 714285, 714 etc.
	636046615398692, 571428, 571428, 571 etc.

11.)

11.) = 7632559384784310, 857142, 857142, 857 etc.
= 6938690349803 91, 896103, 896103, 8961 etc.

term. VI. = 693869034980391, 896103, 896103, 8961 etc.

unde ipſos terminos deſumamus et in unam ſummam colligamus:

term. I. =	0, 30336
— II. =	2912256
— III. =	33549189 12
— IV. =	41409284 8566, 857142, 857142
— V. =	530038846 16557, 714285, 7
— VI. =	6938690349803918, 96
Summa =	0,3036515615065147812820577003918,961038, 961038, 961038 etc.

ubi imprimis notatu dignum occurrit, quod ſumma quinque priorum terminorum abſolute exhiberi poteſt, dum ſcilicet fractio decimalis in figura 26ma abrumpitur, haecque poſtrema formula pro π data ad calculum maxime videtur accommodata.

§. 22. Ex eodem principio, unde noſtram ſeriem deduximus, aliae ſimiles ſeries derivari poſſunt pariter maxime convergentes. Inchoando ſcilicet a ſerie vulgari:

$$\text{A tang. } t = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 + \text{ etc.}$$

ponamus huius ſeriei iam n terminos actu eſſe collectos, quorum ſumma ſit

$$\Sigma = 1 - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \ldots \ldots \pm \frac{t^{2n-1}}{2n-1}.$$

T 2 Sum-

Summam autem ſequentium terminorum ſtatuamus:

$$s = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+3}}{2n+3} + \frac{t^{2n+5}}{2n+5} - \text{etc.}$$

ita ut ſit A tang. $t = \Sigma \pm s$, ubi ergo numerus Σ tanquam iam inventus ſpectatur, alter vero s inveſtigari debeat.

§. 23. Ratiocinium igitur eodem modo inſtituamus, ut ſupra §. 4, quas operationes hic apponamus.

$$s = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+3}}{2n+3} + \frac{t^{2n+5}}{2n+5} - \text{etc.}$$

$$stt = \quad + \frac{t^{2n+3}}{2n+1} - \frac{t^{2n+5}}{2n+3} + \text{etc.}$$

$$s(1+tt) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2t^{2n+5}}{(2n+3)(2n+5)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + s'tt.$$

$$s(1+tt) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2t^{2n+5}}{(2n+3)(2n+5)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + s'tt, \text{ ergo}$$

$$s' = \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2t^{2n+3}}{(2n+3)(2n+5)} + \text{etc.}$$

$$s'tt = \quad + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} - \text{etc.}$$

$$s'(1+tt) = \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{2.4\,t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} - \text{etc.}$$

$$= \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + s''tt. \text{ etc.}$$

§. 24.

§. 24. Quod ſi iam valores introducti reſtituantur, facile patet tandem ad hanc ſeriem perventum iri:

$$s = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(1+tt)} + \frac{2\,t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(1+tt)^2}$$
$$+ \frac{2 \cdot 4\, t^{2n+5}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(1+tt)^3} + \text{etc.}$$

quae expreſſio contrahitur in ſequentem:

$$s = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(1+tt)} \left(1 + \frac{2tt}{(2n+3)(1+tt)} \right.$$
$$\left. + \frac{2 \cdot 4\, t^4}{(2n+3)(2n+5)(1+tt)^2} + \text{etc.} \right)$$

haecque ſeries utique aliquanto magis convergit quam praecedens, propterea quod denominatores multo maiores ſunt quam numeratores; veruntamen formulae ante exhibitae his ſeriebus longiſſime anteferendae videntur, ſiquidem ad uſum practicum reſpiciamus.

DE

DE NOVO GENERE SERIERVM RATIONALIVM ET VALDE CONVERGENTIVM QVIBVS RATIO PERIPHERIAE AD DIAMETRVM EXPRIMI POTEST.

Auctore
L. EVLERO.

Conventui exhibita die 17 Iunii 1779.

§. 1.

Principium, unde hae ſeries ſunt deductae, ſitum eſt in hac formula binomiali: $4+x^4$, quam conſtat involvere hos duos factores rationales: $2+2x+xx$ et $2-2x+xx$. Hinc enim ſtatim ſequitur hanc formulam integralem: $\int\frac{\partial x(2+2x+xx)}{4+x^4}$, quam ſigno $\odot$ indicemus, reduci ad hanc: $\odot=\int\frac{\partial x}{2-2x+xx}$, cuius integrale, ita ſumtum, ut evaneſcat poſito $x=0$, eſt A tang. $\frac{x}{2-x}$. Vbi obſervetur, caſu $x=1$ eſſe $\odot=\frac{\pi}{4}$; at vero caſu $x=\frac{1}{2}$ erit $\odot=$ A tang. $\frac{1}{3}$; tum vero caſu $x=\frac{1}{4}$ erit $\odot=$ A tang. $\frac{1}{7}$. Notum autem eſt eſſe

$$2\text{ A tang. }\tfrac{1}{3}+\text{A tang. }\tfrac{1}{7}=\text{A tang. }1=\tfrac{\pi}{4}.$$

§. 2. Cum igitur formula integralis illa ſigno ⊙ indicata tribus conſtet partibus, ſingulas ſeorſim evolvamus, quas brev. gr. ſequentibus characteribus inſigniamus:

$$\text{I. } \int \frac{\partial x}{4+x^4} = ♄; \quad \text{II. } \int \frac{x\,\partial x}{4+x^4} = ♃; \quad \text{III. } \int \frac{x x\,\partial x}{4+x^4} = ♂;$$

ita ut ſit

$$⊙ = 2♄ + 2♃ + ♂ = \text{A tang.} \frac{x}{2-x}.$$

Nunc igitur iſtas tres formulas integrales more ſolito in ſeries infinitas evolvamus, inde formandas, quod ſit

$$\frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{4^2} - \frac{x^{12}}{4^3} + \frac{x^{16}}{4^4} - \text{etc.}\right)$$

§. 3. Quod ſi iam primo iſtam ſeriem ducamus in ∂x et integremus, prima formula ♄ per ſequentem ſeriem exprimetur:

$$♄ = \frac{x}{4}\left[1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{13}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

At vero illa ſeries ducta in $x\,\partial x$ et integrata dabit

$$♃ = \frac{x x}{8}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{5}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

Denique eadem ſeries ducta in $x x\,\partial x$ et integrata praebet

$$♂ = \frac{x^3}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{11}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{15}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

§. 4. Cum igitur ſit $⊙ = 2♄ + 2♃ + ♂$, evolvamus ſeorſim caſus initio memoratos, quibus eſt vel $x = 1$, vel $x = \frac{1}{2}$, vel $x = \frac{1}{4}$, quorum primo eſt $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}$; ſecundo vero eſt $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{64}$; tertio vero $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{1024}$; unde patet binos caſus poſteriores maxime convergere; quin etiam ipſa prima, cuius termini in ratione quadrupla decreſcunt, iam magis convergit quam ſeries Leibnitiana, ſumto arcu cuius tangens eſt

eſt $\frac{1}{\sqrt{3}}$, praeterquam quod hic calculus nulla irrationalitate perturbatur.

Evolutio caſus primi.

quo $x = 1$ et $\odot =$ A tang. $1 = \frac{\pi}{4}$.

§. 5. Cum igitur hic ſit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}$, tres noſtrae ſeries principales ♄, ♃, ⊙ ſequenti modo procedent:

$$♄ = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{13}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{17}\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \text{etc.}\right]$$
$$♃ = \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \text{etc.}\right]$$
$$♂ = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{19}\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \text{etc.}\right]$$

§. 6. Cum igitur ſit $\odot = 2♄ + 2♃ + ♂ = \frac{\pi}{4}$, per 4 multiplicando valor ipſius π per ſequentes tres ſeries exprimitur

$$\pi = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{4^4} - \text{etc.}\right) \\ 1\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4^4} - \text{etc.}\right) \\ 1\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{4^4} - \text{etc.}\right) \end{cases}$$

§. 7. Ex his certe ternis ſeriebus ratio peripheriae ad diametrum multo minore labore computari potuiſſet quam ex ſerie *Leibnitiana*, qua Auctores illi meritiſſimi *Sharp*, *Machin* & *Lagny* ſunt uſi, quorum primus valorem ipſius π in fractione decimali usque ad 72 figuras, ſecundus ad 100, ac poſtremus adeo usque ad 128 determinavit. At vero ſequentes caſus multo magis iſtum laborem ſublevare poſſent.

Evo-

Evolutio caſus ſecundi,
quo $x = \frac{1}{2}$.

§. 8. Hoc igitur caſu erit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{64}$, unde tres illae ſeries ſequenti modo referentur:

$$\text{♄} = \tfrac{1}{8}\left(1 - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{64^2} - \tfrac{1}{13}\cdot\tfrac{1}{64^3} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{♃} = \tfrac{1}{32}\left(1 - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{64^2} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{64^3} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{♂} = \tfrac{1}{32}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{1}{64^2} - \tfrac{1}{15}\cdot\tfrac{1}{64^3} + \text{etc.}\right)$$

§. 9. Cum igitur $2\,\text{♄} + 2\,\text{♃} + \text{♂} = \text{A tang.}\,\frac{1}{3}$, erit

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{3} = \begin{cases} \tfrac{1}{4}\left(1 - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{64^2} - \tfrac{1}{13}\cdot\tfrac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ \tfrac{1}{16}\left(1 - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{64^2} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{64^3} + \text{etc}\right) \\ \tfrac{1}{32}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{1}{64^2} - \tfrac{1}{15}\cdot\tfrac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Etſi autem hic tres computandae ſunt ſeries, tamen, quia ſingulae ſecundum eandem rationem 1 : 64 decreſcunt, laborem mirum in modum contrahere licebit.

Evolutio caſus tertii,
quo $x = \frac{1}{4}$.

§. 10. Cum igitur hic ſit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{1024}$, ſeries noſtrae tres principales ita ſe habebunt:

$$\text{♄} = \tfrac{1}{16}\left(1 - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{1024} + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{1024^2} - \tfrac{1}{13}\cdot\tfrac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{♃} = \tfrac{1}{128}\left(1 - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{1024} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{1024^2} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{♂} = \tfrac{1}{256}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{1024} + \tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{1}{1024^2} - \tfrac{1}{15}\cdot\tfrac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right)$$

§. 11. Cum igitur $2 ♄ + 2 ♃ + ♂ = \text{A tang.} \frac{1}{7}$, erit his ſeriebus debite iunctis:

$$\text{A tang.} \frac{1}{7} = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{64}\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{256}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Applicatio binorum caſuum poſteriorum ad peripheriam circuli per ſeries maxime convergentes exprimendam.

§. 12. Cum ſit, uti iam obſervavimus, $\frac{\pi}{4} = 2\,\text{A tang.} \frac{1}{3} + \text{A tang.} \frac{1}{7}$ erit $\pi = 8\,\text{A tang.} \frac{1}{3} + 4\,\text{A tang.} \frac{1}{7}$ ſeriebus ſupra inventis ſubſtitutis valor ipſius π per ſex ſequentes ſeries coniunctim exprimetur:

$$\pi = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{64^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ \frac{1}{64}\left(1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1024} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Hic ergo maxime notatu dignum occurrit, quod omnes iſtae ſeries per ſolas poteſtates binarii procedant.

VI.

VLTERIORES DISQVISITIONES CIRCA SERIES QVIBVS SINVS ET COSINVS ANGVLORVM MVLTIPLORVM EXPRIMVNTVR.

Auctore
NICOLAO FUSS.

Conventui exhibitae die 28 Nov. 1791.

§. 1.

Inter egregia inventa, quibus Eulerus Calculum ſinuum locupletavit, infimum locum minime tenent variae illae disquiſitiones circa multiplicationem et diviſionem angulorum, et circa formulas, quibus ſinum coſinumve anguli multipli cuiusvis exprimere licet. Duplicis autem generis eſt evolutio ſinus et coſinus anguli multipli: altera per producta, altera per ſeries. Quod priorem attinet, eam Auctor modo laudatus primo in Introductione in Analyſin Infinitorum, poſtmodum vero in variis diſſertationibus docuit, veluti in ſchediasmate Tomo I. Opusculorum analyticorum inſerto et inſcripto: *Quomodo ſinus et coſinus angulorum multiplorum per producta exprimi queant;* nec non multo prolixius in diſſertatione: *De multiplicatione angulorum per factores expedienda,* in Tomo V. Nov. Act.

§. 2. Quod evolutionem per ſeries attinet, de qua hic potiſſimum ſermo eſt, Eulerus pariter, primus ni fallor, in Introductione in Analyſin Infinitorum ſeries dedit generales, ſed per inductionem tantum erutas, ſinum et coſinum anguli multipli exhibentes. Poſtea vero hoc argumentum penitus dereliquiſſe videtur, ita ut nequidem in Diſſertatione: *Subſidium Calculi Sinuum*, (*V. Nov. Comment. Tom. V.*) ubi omnia collegit, quae de linearum trigonometricarum in Algorithmum Introductione et uſu paſſim invenerat, horum ſerierum ullam mentionem fecerit, etiamſi expreſſiones analogas poteſtatum ibi tradiderit.

§. 3. Longo tempore poſt operis memorati promulgationem hoc argumentum denuo examini ſubiecit et ex profeſſo tractavit in Diſſertatione: *Dilucidationes ſuper formulis quibus ſinus et coſinus angulorum multiplorum exprimi ſolent, ubi ſimul ingentes difficultates diluuntur* (*V. Nov. Act. Tom. IX.*). Obſervaverat enim Eulerus ſeries conſuetas pro ſinu et coſinu anguli multipli $n\Phi$ dari ſolitae, ſcilicet:

$$2\,\text{coſ.}\,n\Phi = x^n - \frac{n}{1}x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6} + \text{etc.}$$

$$\text{ſin.}\,n\Phi = y\Big(x^{n-1} - \frac{n-2}{1}x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}x^{n-7} + \text{etc.}$$

exiſterte $x = 2\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y = \text{ſin.}\,\Phi$, quamvis eximium uſum praeſtent in multiplicatione angulorum, tamen neutiquam ſecundum rigorem geometricum pro generaliter veris haberi poſſe, ſed omnem earum uſum reſtringi ad caſus ubi littera n denotat numerum integrum poſitivum, et his adeo caſibus ſeries non ulterius continuari debere quam quoad exponentes ipſius x ex poſitivis in negativos abeant.

§. 4.

§. 4. Quaeſtio igitur hic ſuboriebatur, cur memoratae ſeries plurimis caſibus tam vehementer a veritate recedant, et quomodo huic incommodo obviam ire, aliasque ſeries inveſtigare liceat veritati perpetuo et in omnibus caſibus, et quousque eae continuentur, conſentaneae? Hoc Eulerus praeſtitit in diſſertatione titulum ſupra expoſitum prae ſe ferente, dum ſcilicet ex ipſis Analyſeos principiis, iisque quae iam ſolidiſſime ſtabilita ſunt, eiusmodi ſeries derivavit, quae ab incommodis ſupra memoratis non ſolum ſunt immunes et pro omni numero n valent, ſed ex quibus inſuper patet, cur ſeries ſupra allatas non ad exponentes negativos usque extendere liceat.

§. 5. Hic autem haud immerito obiici poteſt, eundem ſcopum multo facilius attingi poſſe, ſi ambae illae ſeries invertantur, et caſus quibus n eſt vel numerus par, vel impar, a ſe invicem diſtinguantur. Si enim caſus illos ſpeciales, tam in Introductione quam in Diſſertatione memorata evolutos, attente conſideremus et invertamus, haud difficile erit, poſito coſ. $\Phi = z$ et ſin. $\Phi = y$, ſequentes inde derivare expreſſiones generales:

Pro n pari:

$$\text{I. coſ. } n\Phi = \pm\left[1 - \frac{nn}{2}z^2 + \frac{nn(nn-4)}{2.3.4}z^4 - \frac{nn(nn-4)(nn-16)}{2\ldots\ldots 6}z^6 + \text{etc.}\right]$$

$$\text{II. ſin. } n\Phi = \pm nzy\left[1 - \frac{nn-4}{2.3}z^2 + \frac{(nn-4)(nn-16)}{2\ldots 5}z^4 - \frac{(nn-4)(nn-16)(nn-64)}{2\ldots\ldots 7}z^6 + \text{etc.}\right]$$

Pro n impari.

$$\text{III. coſ. } n\Phi = \pm nz\left[1 - \frac{nn-1}{2.3}z^2 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4.5}z^4 - \frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{2\ldots\ldots 7}z^6 + \text{et.}\right]$$

IV.

IV. ſin. $n\,\Phi = \pm y\,[1 - \frac{(nn-1)}{2} + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4} z^4$
$- \frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{2\ldots 6} z^6 + \text{etc.}]$

ubi pro coſinu ſignum $+$ valet, ſi n fuerit numerus formae $4\,i$ et $4\,i+1$, ſignum $-$ autem, ſi n fuerit numerus formae $4\,i+2$ et $4\,i+3$; pro ſinu vero ſignum $+$ valet, ſi n fuerit numerus formae $4\,i+1$ et $4\,i+2$, ſignum $-$ autem, ſi fuerit n formae $4\,i$ et $4\,i+3$.

§. 6. Iſtae ſeries incommodis ſupra memoratis non laborant: nunquam enim z in denominatorem tranſit, et omnes quatuor ſeries ſponte abrumpuntur, quoties n eſt numerus integer, ſive poſitivus, ſive negativus. Verum fatendum eſt, earum veritatem non niſi inductioni inniti et quomodo eam ex ſolidis principiis Calculi angulorum derivare liceat, non tam facile perſpici. Cum igitur animadvertiſſem methodum ab Eulero in ſaepius laudata diſſertatione adhibitam etiam uſum praeſtari poſſe in demonſtranda veritate illarum ſerierum aſcendentium, hanc demonſtrationem ſuſcipere et hic exponere eo minus dubitavi, quod determinatio conſtantium et quae inde fluunt conditiones pro forma numeri n peculiare aliquid involvunt.

§. 7. Cum igitur, ſi ſtatuatur

$$\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi = p,$$
$$\text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi = q,$$

ſit $2\,\text{coſ.}\,n\,\Phi = p^n + q^n$ et $2\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\,\Phi = p^n - q^n$; ponamus coſ. $\Phi = z$, coſ. $n\,\Phi = s$ et ſin. $n\,\Phi = v\sqrt{(1-zz)}$, eritque $p = z + \sqrt{(zz-1)}$ et $q = z - \sqrt{(zz-1)}$, ideoque

$$2\,s = [z + \sqrt{(zz-1)}]^n + [z - \sqrt{(zz+1)}]^n$$

2 v

$$2v = \frac{[z + \sqrt{(zz - 1)}]^n - [z - \sqrt{(zz - 1)}]^n}{\sqrt{(zz - 1)}},$$

ubi igitur totum negotium eo redit, ut expreſſiones $2s$ et $2v$ in ſeries convertantur ſecundum poteſtates ipſius z aſcendentes.

§. 8. Ad hoc facilius praeſtandum, conſideremus primo valorem pro s inventum, et cum ſit $q = \frac{1}{p}$, erit $p^{2n} + 1 = 2sp^n$, ideoque

$$p^n = s + \sqrt{(ss - 1)} = [z + \sqrt{(zz - 1)}]^n,$$

unde ſumtis differentialibus logarithmicis prodibit $\frac{\partial s}{\sqrt{(ss - 1)}} = \frac{n\partial z}{\sqrt{(zz - 1)}}$, ſive $\partial s^2(zz - 1) = nn\partial z^2(ss - 1)$ denuoque differentiando, ſumto elemento ∂z conſtante, ſequens prodit aequatio differentialis ſecundi gradus:

$$\frac{\partial\partial s}{\partial z^2}(zz - 1) + \frac{z\partial s}{\partial z} - nns = 0,$$

cuius ope valorem ipſius s ſequenti modo per ſeriem aſcendentem inveſtigare licet.

§. 9. Quoniam variabilis z cum ſuo differentiali in aequatione vel nullam vel duas habet dimenſiones, exponentes ipſius z in ſerie binario creſcere debent. Statuatur ergo

$$s = Az^\lambda + Bz^{\lambda+2} + Cz^{\lambda+4} + Dz^{\lambda+6} + \text{etc.}$$

et iam differentiando fiet

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \lambda Az^{\lambda-1} + (\lambda+2)Bz^{\lambda+1} + (\lambda+4)Cz^{\lambda+3} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial\partial s}{\partial z^2} = \lambda(\lambda-1)Az^{\lambda-2} + (\lambda+1)(\lambda+2)Bz^\lambda + (\lambda+3)(\lambda+4)Cz^{\lambda+2} + \text{etc.}$$

unde

unde porro colligitur

$$\frac{zz\partial\partial s}{\partial z^2} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad +\lambda(\lambda-1)\,Az^\lambda+(\lambda+1)(\lambda+2)Bz^{\lambda+2}+\text{etc.}$$

$$-\frac{\partial\partial s}{\partial z^2}=-\lambda(\lambda-1)Az^{\lambda-2}-(\lambda+1)(\lambda+2)Bz^\lambda-(\lambda+3)(\lambda+4)Cz^{\lambda+2}-\text{etc.}$$

$$+\frac{z\partial s}{\partial z}= \quad - \quad - \quad - \quad - \quad +\lambda Az^\lambda \quad +(\lambda+2) \quad Bz^{\lambda+2}+\text{etc.}$$

$$-nns= \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -nnAz^\lambda \quad -nn \quad Bz^{\lambda+2}-\text{etc.}$$

Cum igitur eſſe debeat $\frac{\partial\partial s}{\partial z^2}(zz-1)+\frac{z\partial s}{\partial z}-nns=0$, omnes termini ſeorſim ſe deſtruere debent, unde ſtatim ex primo ſequitur eſſe debere vel $\lambda=0$ vel $\lambda=1$. His ergo binis valoribus primi exponentis λ inventis valor s ſequentibus ſeriebus geminatis exprimetur:

$$s=Az^0+Bz^2+Cz^4+Dz^6+Ez^8+\text{etc.}$$

$$s=\mathfrak{A}z^1+\mathfrak{B}z^3+\mathfrak{C}z^5+\mathfrak{D}z^7+\mathfrak{E}z^9+\text{etc.}$$

ubi igitur totum negotium eo redit, ut coëfficientes rite determinentur.

§. 10. Conſideretur primo ſeries prior:

$$s=Az^0+Bz^2+Cz^4+Dz^6+\text{etc.}$$

et cum inde fiat

$$\frac{zz\partial\partial s}{\partial z^2}= \quad - \quad - \quad +2Bz^2+4.3Cz^4+6.5Dz^6+\text{etc.}$$

$$-\frac{\partial\partial s}{\partial z^2}=-2B-4.3Cz^2-6.5Dz^4-8.7Ez^6-\text{etc.}$$

$$+\frac{z\partial s}{\partial z}= \quad - \quad - \quad +2Bz^2+4Cz^4+6Dz^6+\text{etc.}$$

$$-nns=-nnA-nnBz^2-nnCz^4-nnDz^6-\text{etc.}$$

pro coëfficientibus ſequentes emergent valores:

$$B=-\frac{nn}{2}A,$$

$$C=-\frac{(nn-4)}{3.4}B,$$

D =

$$D = -\frac{(nn-16)}{5.6} C,$$
$$E = -\frac{(nn-36)}{7.8} D,$$

ita ut habeamus

$$s = A - \frac{nn}{2} A z^2 + \frac{nn(nn-4)}{2.3.4} A z^4 - \frac{nn(nn-4)(nn-16)}{2 \ldots 6} A z^6 + \text{etc.}$$

§. 11. Pro altera ſerie:

$$s = \mathfrak{A} z + \mathfrak{B} z^3 + \mathfrak{C} z^5 + \mathfrak{D} z^7 + \text{etc.}$$

cum ex ea fiat

$$\frac{zz\partial\partial s}{\partial z^2} = \cdot \cdot \cdot + 2.3 \mathfrak{B} z^3 + 4.5 \mathfrak{C} z^5 + \text{etc.}$$
$$-\frac{\partial\partial s}{\partial z^2} = -2.3 \mathfrak{B} z - 4.5 \mathfrak{C} z^3 - 6.7 \mathfrak{D} z^5 - \text{etc.}$$
$$+\frac{z\partial s}{\partial z} = + \mathfrak{A} z + 3 \mathfrak{B} z^3 + 5 \mathfrak{C} z^5 + \text{etc.}$$
$$-nns = -nn \mathfrak{A} z - nn \mathfrak{B} z^3 - nn \mathfrak{C} z^5 - \text{etc.}$$

inde ſequentes obtinebuntur determinationes:

$$\mathfrak{B} = -\frac{(nn-1)}{2.3} \mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{C} = -\frac{(nn-9)}{4.5} \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{D} = -\frac{(nn-25)}{6.7} \mathfrak{C},$$
etc.

hincque ipſa ſeries ita ſe habebit:

$$s = \mathfrak{A} z - \frac{(nn-1)}{2.3} \mathfrak{A} z^3 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2 \ldots 5} \mathfrak{A} z^5 - \text{etc.}$$

§. 12. Quod ſi igitur ambae ſeries in unam ſummam colligantur, prodibit:

$$2s = \left\{ \begin{array}{l} A[1 - \frac{nn}{2} z^2 + \frac{nn(nn-4)}{2.3.4} z^4 - \frac{nn(nn-4)(nn-16)}{2 \ldots 6} z^6 + \text{etc.}] \\ + \mathfrak{A}[z - \frac{(nn-1)}{2.3} z^3 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4.5} z^5 - \frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{2 \ldots 7} z^7 + \text{etc.}] \end{array} \right\}$$

ubi nil aliud ſupereſt, niſi ut valores litterarum A et $\mathfrak{A}$ rite

determinentur, qui ita debent eſſe comparati, ut hae ſeries cum expreſſione ſupra §. 7. pro $2s$ inventa, ſcilicet

$$2s = [z + \sqrt{(zz - 1)}]^n + [z - \sqrt{(zz - 1)}]^n$$

conveniant.

§. 13. Hunc in finem tam in ſeriebus quam in expreſſione finita ſtatuatur z infinite parvum, atque ſtatim manifeſtum eſt hoc caſu ex prioribus fore $2s = A + \mathfrak{A}z$. Quod alterum valorem attinet, cum ſumto z infinite parvo fit $\sqrt{(zz - 1)} = \sqrt{-1}$, ideoque

$$z + \sqrt{(zz - 1)} = z + \sqrt{-1}$$

$$z - \sqrt{(zz - 1)} = z - \sqrt{-1}$$

conſequenter

$$[z + \sqrt{(zz - 1)}]^n = (\sqrt{-1})^n + nz(\sqrt{-1})^{n-1},$$

$$[z - \sqrt{(zz - 1)}]^n = (-\sqrt{-1})^n + nz(-\sqrt{-1})^{n-1},$$

habebimus

$$2s = (\sqrt{-1})^n + (-\sqrt{-1})^n + nz[(\sqrt{-1})^{n-1} + (-\sqrt{-1})^{n-1}],$$

quo valore cum altero $2s = A + \mathfrak{A}z$ comparato ſequitur fore

$$A = (\sqrt{-1})^n + (-\sqrt{-1})^n,$$

$$\mathfrak{A} = n[(\sqrt{-1})^{n-1} + (-\sqrt{-1})^{n-1}].$$

§. 14. Hic quatuor caſus ſunt diſtinguendi, prout ſcilicet littera n fuerit numerus formae $4n$, $4n+1$, $4n+2$, vel $4n+3$. Pro quolibet valores correſpondentes coëfficientium A et $\mathfrak{A}$ in ſequenti tabella exhibebimus:

n	A	$\mathfrak{A}$
$4i$	$+2$	0
$4i+1$	0	$+2n$
$4i+2$	-2	0
$4i+3$	0	$-2n$

His notatis ſequentes pro coſinu anguli multipli $n\Phi$ habebimus ſeries:

$$\text{coſ.}\, n\Phi = \pm[1 - \frac{nn}{2}z^2 + \frac{nn(nn-4)}{2.3.4}z^4 - \frac{nn(nn-4)(nn-16)}{2\ldots 6}z^6 + \text{etc.}]$$

$$\text{coſ.}\, n\Phi = \pm nz[1 - \frac{(nn-1)}{2.3}z^2 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4.5}z^4 - \frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{2\ldots 7}z^6 + \text{etc.}]$$

quarum prior valet, quando n fuerit numerus par, et quidem cum ſigno $+$, ſi n fuerit pariter par, cum ſigno vero $-$, ſi impariter par. Altera valet quando n eſt numerus impar, et quidem cum ſigno $+$, quoties n formae $4i+1$, cum ſigno vero $-$, quoties fuerit n formae $4i+3$, quemadmodum iam ſupra per inductionem invenimus.

§. 15. Tractemus nunc ſimili modo valorem alterum

$$2v = \frac{[z+\sqrt{(zz-1)}]^n - [z-\sqrt{(zz-1)}]^n}{\sqrt{(zz-1)}},$$

quem ſequenti modo in aequationem differentialem ſecundi gradus transformemus: Cum ſit $p^n - q^n = 2v\sqrt{(zz-1)}$ (§. 7.) ponatur brevitatis gratia $v\sqrt{(zz-1)} = t$, et ob $q = \frac{1}{p}$ erit $p^{2n} - 1 = 2tp^n$, unde ſit $p^n = t + \sqrt{(tt+1)}$, ergo

$$t + \sqrt{(tt+1)} = [z + \sqrt{(zz-1)}]^n,$$

ideoque ſumtis differentialibus logarithmicis

$$\frac{\partial t}{\sqrt{(tt+1)}} = \frac{n\partial z}{\sqrt{(zz-1)}}, \text{ ſive}$$

$$\partial t^2(zz-1) = nn(tt+1)\partial z^2$$

X 2 hinc

hinc differentiando, ſumto ∂z conſtante, prodit

$$\frac{\partial \partial t}{t}(zz-1)+\frac{z\partial z\partial t}{t}-nn\partial z^2=0.$$

Cum autem ſit $t=v\sqrt{(zz-1)}$, erit

$$\frac{\partial t}{t}=\frac{\partial v}{v}+\frac{z\partial z}{zz-1},$$

$$\frac{\partial \partial t}{t}-\frac{\partial t^2}{tt}=\frac{\partial \partial v}{v}-\frac{\partial v^2}{vv}+\frac{\partial z^2}{zz-1}-\frac{2zz\partial z^2}{(zz-1)^2}.$$

Addatur utrinque

$$\frac{\partial t^2}{tt}=\frac{\partial v^2}{vv}+\frac{2z\partial v\partial z}{v(zz-1)}+\frac{zz\partial z^2}{(zz-1)^2},$$

et prodibit pro $\frac{\partial \partial t}{t}$ ſequens valor:

$$\frac{\partial \partial t}{t}=\frac{\partial \partial v}{v}+\frac{\partial z^2}{zz-1}+\frac{2z\partial v\partial z}{v(zz-1)}-\frac{zz\partial z^2}{(zz-1)^2},$$

quo ſubſtituto, una cum valore $\frac{\partial t}{t}$, ſequens prodit aequatio:

$$\frac{\partial \partial v}{v}(zz-1)+3z\partial z\frac{\partial v}{v}+(1-nn)\partial z^2=0,$$

quae porro in hanc formam transfunditur:

$$\frac{\partial \partial v}{\partial z^2}(zz-1)+3z\frac{\partial v}{\partial z}-(nn-1)v=0.$$

§. 16. Fingatur nunc haec ſeries:

$$v=Az^\lambda+Bz^{\lambda+2}+Cz^{\lambda+4}+Dz^{\lambda+6}+\text{etc.}$$

eritque ſumtis differentialibus

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\lambda Az^{\lambda-1}+(\lambda+2)Bz^{\lambda+1}+(\lambda+4)Cz^{\lambda+3}+\text{etc.}$$

$$\frac{\partial \partial v}{\partial z^2}=\lambda(\lambda-1)Az^{\lambda-2}+(\lambda+1)(\lambda+2)Bz^\lambda$$
$$+(\lambda+3)(\lambda+4)Cz^{\lambda+2}+\text{etc.}$$

unde porro fit

$$zz\frac{\partial \partial v}{\partial z^2}= \quad - \; - \; - \; - \; - \quad +\lambda(\lambda-1)\;Az^\lambda+(\lambda+1)(\lambda+2)Bz^{\lambda+2}+\text{etc.}$$

$$-\frac{\partial \partial v}{\partial z^2}=-\lambda(\lambda-1)Az^{\lambda-2}-(\lambda+1)(\lambda+2)Bz^\lambda-(\lambda+3)(\lambda+4)Cz^{\lambda+2}-\text{etc.}$$

$$+3z\frac{\partial v}{\partial z}= \quad - \; - \; - \quad +3\lambda \quad Az^\lambda+3(\lambda+2)Bz^{\lambda+2}+\text{etc.}$$

$$-(nn-1)v= \quad - \; - \quad -(nn-1)\;Az^\lambda-(nn-1)Bz^{\lambda+2}-\text{etc.}$$

unde

unde ſtatim videmus eſſe debere vel $\lambda = 0$, vel $\lambda = 1$, ita ut habeamus has duas ſeries pro v:

$$v = A z^0 + B z^2 + C z^4 + D z^6 + \text{etc.}$$

$$v = \mathfrak{A} z^1 + \mathfrak{B} z^3 + \mathfrak{C} z^5 + \mathfrak{D} z^7 + \text{etc.}$$

quarum coëfficientes nunc ſequenti modo determinabimus.

§. 17. Conſideremus primo priorem ſeriem:

$$v = A z^0 + B z^2 + C z^4 + D z^6 + \text{etc.}$$

atque habebimus

$$zz \frac{\partial \partial v}{\partial z^2} = \quad - \quad - \quad - \quad 2 B z^2 + 3.4 C z^4 + 5.6. D z^6 + \text{etc.}$$

$$-\frac{\partial \partial v}{\partial z^2} = - 2 B - 3.4 C z^2 - 5.6 D z^4 - 7.8. E z^6 - \text{etc.}$$

$$+ 3 z \frac{\partial v}{\partial z} = \quad - \quad - \quad 2.3 B z^2 + 4.3 C z^4 + 6.3. D z^6 + \text{etc.}$$

$$-(nn-1) v = -(nn-1) A - (nn-1) B z^2 - (nn-1) C z^4 - (nn-1) D z^6 - \text{etc.}$$

unde ſequentes derivantur valores:

$$B = -\frac{(nn-1)}{2} A,$$

$$C = -\frac{(nn-9)}{3.4} B,$$

$$D = -\frac{(nn-25)}{5.6} C,$$

$$E = -\frac{(nn-49)}{7.8} D,$$

etc.

quibus ſubſtitutis ſeries noſtra prior erit

$$v = A \left[1 - \frac{(nn-1)}{2} z^2 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4} z^4 - \frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{2 \cdot \cdot \cdot 6} z^6 + \text{etc.} \right].$$

§. 18. Tractemus ſimili modo alteram ſeriem

$$v = \mathfrak{A} z + \mathfrak{B} z^3 + \mathfrak{C} z^5 + \mathfrak{D} z^7 + \text{etc.}$$

et cum ex ea ſequentes oriantur

zz

$$zz\frac{\partial\partial v}{\partial z^2} = \quad \cdot \quad \cdot \quad + 2.3\mathfrak{B}z^3 + 4.5\mathfrak{C}z^5 + 6.7\mathfrak{D}z^7 + \text{etc.}$$

$$-\frac{\partial\partial v}{\partial z^2} = -2.3\mathfrak{B}z - 4.5\mathfrak{C}z^3 - 6.7\mathfrak{D}z^5 - 8.9\mathfrak{E}z^7 - \text{etc.}$$

$$+3z\frac{\partial v}{\partial z} = +3\mathfrak{A}z + 3.3\mathfrak{B}z^3 + 3.5\mathfrak{C}z^5 + 3.7\mathfrak{D}z^7 + \text{etc.}$$

$$-(nn-1)v = -(nn-1)\mathfrak{A}z - (nn-1)\mathfrak{B}z^3 - (nn-1)\mathfrak{C}z^5 - (nn-1)\mathfrak{D}z^7 - \text{etc.}$$

his collectis nanciscimur

$$\mathfrak{B} = -\frac{(nn-4)}{2.3}\mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{(nn-16)}{4.5}\mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{(nn-36)}{6.7}\mathfrak{C},$$

etc.

unde ipſa altera ſeries erit

$$v = \mathfrak{A}z\left[1 - \frac{(nn-4)}{2.3}z^2 + \frac{(nn-4)(nn-16)}{2.3.4.5}z^4 - \frac{(nn-4)(nn-16)(nn-36)}{2\ldots7}z^6 + \text{etc.}\right].$$

§. 19. Quod ſi nunc ambae ſeries in unam ſummam colligantur, habebitur:

$$2v = \begin{cases} A\left[1 - \frac{(nn-1)}{2}z^2 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4}z^4 - \frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{2\ldots6}z^6 + \text{etc.}\right] \\ +\mathfrak{A}z\left[1 - \frac{(nn-4)}{2.3}z^2 + \frac{(nn-4)(nn-16)}{2.3.4.5}z^4 - \frac{(nn-4)(nn-16)(nn-36)}{2\ldots7}z^6 + \text{etc.}\right] \end{cases}$$

Iam igitur id tantum adhuc nobis efficiendum reſtat, ut conſtantes A et $\mathfrak{A}$ ita determinentur, ut hic valor pro $2v$ inventus conveniat cum expreſſione ſupra §. 7. allata:

$$2v = \frac{[z+\sqrt{(zz-1)}]^n - [z-\sqrt{(zz-1)}]^n}{\sqrt{(zz-1)}}.$$

§. 20. Hoc facillime praeſtabitur, ſi valores, qui poſito z infinite parvo emergunt ex utraque expreſſione, inter ſe comparentur. Eſt vero, uti iam ſupra vidimus:

$\sqrt{}$

$$\surd(zz-1)=\surd-1,$$
$$[z+\surd(zz-1)]^n=(\surd-1)^n+nz(\surd-1)^{n-1},$$
$$[z-\surd(zz-1)]^n=(-\surd-1)^n+nz(-\surd-1)^{n-1},$$

unde naſcitur

$$2v=\frac{(\surd-1)^n+nz(\surd-1)^{n-1}-(-\surd-1)^n-nz(-\surd-1)^{n-1}}{\surd-1},$$

qui valor comparatus cum eo qui ex ſeriebus deducitur $2v=A+\mathfrak{A}z$, praebet:

$$A=\frac{(\surd-1)^n-(-\surd-1)^n}{\surd-1},$$

$$\mathfrak{A}=\frac{n[(\surd-1)^{n-1}-(-\surd-1)^{n-1}]}{\surd-1},$$

ita ut pro quatuor formis, quos numerus n omnino induere poteſt, habeamus:

n	A	$\mathfrak{A}$
$4i$	0	$-2n$
$4i+1$	$+2$	0
$4i+2$	0	$+2n$
$4i+3$	-2	0

§. 21. Hinc igitur pro ſinu anguli multipli cuiuscunque $n\Phi$ ſequentes fluunt expreſſiones:

$$\text{ſin.}n\Phi=\pm y\left[1-\frac{(nn-1)}{2}z^2+\frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4}z^4-\text{etc.}\right]$$

$$\text{ſin.}n\Phi=\pm nyz\left[1-\frac{(nn-4)}{2.3}z^2+\frac{(nn-4)(nn-16)}{2.3.4.5}z^4-\text{etc.}\right]$$

quarum prior valet quoties n eſt numerus impar, et quidem cum ſigno $+$, quoties n eſt formae $4i+1$, cum ſigno vero $-$, ſi n fuerit formae $4i+3$. Altera ſeries valet pro numeris

meris paribus ipſi n tribuendis, ſcilicet cum ſigno $+$, ſi n impariter par, cum ſigno $-$ vero, ſi n pariter par, quemadmodum iam initio per inductionem invenimus.

§. 22. Quodſi iam ſucceſſive loco n ſcribamus ordine numeros 0, 1, 2, 3, 4, etc. debito reſpectu habito ad cuiusque formam, obtinebimus ſequentes expreſſiones:

Pro ſinibus:

$$
\begin{aligned}
&\text{ſin.}\, 0\,\Phi = 0\\
&\text{ſin.}\, 1\,\Phi = y\\
&\text{ſin.}\, 2\,\Phi = 2yz\\
&\text{ſin.}\, 3\,\Phi = -y(1-4z^2)\\
&\text{ſin.}\, 4\,\Phi = -4yz(1-2z^2)\\
&\text{ſin.}\, 5\,\Phi = y(1-12z^2+16z^4)\\
&\text{ſin.}\, 6\,\Phi = 6yz(1-\tfrac{16}{3}z^2+\tfrac{16}{3}z^4)\\
&\text{ſin.}\, 7\,\Phi = -y(1-24z^2+80z^4-64z^6)\\
&\text{ſin.}\, 8\,\Phi = -8yz(1-10z^2+24z^4-16z^6)\\
&\quad\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Pro coſinibus:

$$
\begin{aligned}
&\text{coſ.}\, 0\,\Phi = 1\\
&\text{coſ.}\, 1\,\Phi = z\\
&\text{coſ.}\, 2\,\Phi = -1+2z^2\\
&\text{coſ.}\, 3\,\Phi = -3z(1-\tfrac{4}{3}z^2)\\
&\text{coſ.}\, 4\,\Phi = 1-8z^2+8z^4\\
&\text{coſ.}\, 5\,\Phi = 5z(1-4z^2+\tfrac{16}{5}z^4)\\
&\text{coſ.}\, 6\,\Phi = -1+18z^2-48z^4+32z^6\\
&\text{coſ.}\, 7\,\Phi = -7z(1-8z^2+16z^4-\tfrac{64}{7}z^6)\\
&\text{coſ.}\, 8\,\Phi = 1-32z^2+160z^4-256z^6+128z^8\\
&\quad\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

qui

qui valores omnes perfecte congruunt cum iis quos Eulerus in Introductione in Analyſin Infinitorum pag. 198 et 206 tradidit.

§. 23. Series igitur, quarum demonſtrationem hic dedimus, utique incommodo illo non laborant, cui emendando Eulerus operam dederat in illa diſſertatione, ubi ſeries deſcendentes in Introductione ſine demonſtratione exhibitas accuratiori examini ſubiecit. Verum non pro omnibus valoribus ipſius n hae expreſſiones ſinuum et coſinuum anguli $n\Phi$ aeque commode adhiberi poſſunt. Quamvis enim ſeries illae pro s et v inventae in genere verae ſint, & valere debeant, quicunque numerus pro n accipiatur; tamen ob formam conſtantium A et 𝔄, quae pro omni fractione, cuius denominator eſt numerus par, imaginariae evadunt, ſeries illae hoc caſu nullius ſunt uſus. Sin autem denominator fractionis pro n aſſumtae fuerit numerus impar, conſtantes A et 𝔄 iterum fient vel 0, vel $+$ [illegible], vel $\pm 2n$, ita ut ſeries pro s et v datae etiam his caſibus valeant, debito ad ſigna reſpectu habito.

§. 24. Eulerus in Tomo I. Calculi Integralis pag. 113. ſequentes exhibuit ſeries aſcendentes pro coſinu et ſinu anguli $n\Phi$:

$$\text{coſ.}\, n\Phi = 1 - \frac{nn}{2}y^2 + \frac{nn(nn-4)}{2.3.4}y^4 - \frac{nn(nn-4)(nn-16)}{2\ldots6}y^6 + \text{etc.}$$

$$\text{ſin.}\, n\Phi = ny\left[1 - \frac{(nn-1)}{2.3}y^2 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2\ldots5}y^4 - \frac{(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{2\ldots7}y^6 + \text{etc.}\right]$$

quae a noſtris ſeriebus, iisdem coëfficientibus affectis, in eo differunt, ut ſecundum poteſtates ſinus progrediantur. Quomodo has ſeries immediate ex noſtris formulis derivare liceat, haud abs re erit heic coronidis loco oſtendiſſe.

§. 25. Loco z igitur introducatur y, ſcribendo $\sqrt{(1-yy)}$ loco z, eritque $\sqrt{(zz-1)}=y\sqrt{-1}$ et $z=\sqrt{-1}.\sqrt{(yy-1)}$, unde ex §. 7. fit

$$\frac{2s}{(\sqrt{-1})^n}=[y+\sqrt{(yy-1)}]^n+[y-\sqrt{(yy-1)}]^n.$$

(Quoniam enim in priore ſerie n tantum par eſſe poteſt, perinde eſt, ſive ſcribatur $[y-\sqrt{(yy-1)}]^n$, ſive $[\sqrt{(yy-1)}-y]^n$). Tum vero, quia haec expreſſio ab ea quam §. 7. pro $2s$ invenimus, tantum in eo differt, ut hic ſit y quod ibi erat z, etiam per ſeries erit:

$$\frac{2s}{(\sqrt{-1})^n}=\begin{cases}A[1-\frac{nn}{2}y^2+\frac{nn(nn-4)}{2.3.4}y^4-\frac{nn(nn-4)(nn-16)}{2\ldots 6}y^6+\text{etc.}]\\ \mathfrak{A}y[1-\frac{(nn-1)}{2.3}y^2+\frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4.5}y^4-\text{etc.}]\end{cases}$$

Iam ſumto y infinite parvo duplici modo habebimus:

$$\frac{2s}{(\sqrt{-1})^n}=2(\sqrt{-1})^n,$$

$$\frac{2s}{(\sqrt{-1})^n}=A+\mathfrak{A}y,$$

hinc ſtatim ſequitur $A=2(\sqrt{-1})^n$ et $\mathfrak{A}=0$, conſequenter

$$s=\text{coſ.}\,n\Phi=1-\frac{nn}{2}y^2+\frac{nn(nn-4)}{2.3.4}y^4-\frac{nn(nn-4)(nn-16)}{2\ldots 6}y^6+\text{etc.}$$

§. 26. Eodem modo poſito $\sqrt{(1-yy)}$ loco z ex §. 7. habebimus:

$$\frac{2vy}{(\sqrt{-1})^{n-1}}=[y+\sqrt{(yy-1)}]^n+[y-\sqrt{(yy-1)}]^n.$$

(Ob n enim impar ſcripſimus $[y-\sqrt{(yy-1)}]^n$ loco $-[\sqrt{(yy-1)}-y]^n$. Erit igitur per ſeries:

$2vy$

$$\frac{2vy}{(\sqrt{-1})^{n-1}} = \begin{cases} A\,[1 - \frac{nn}{2}y^2 + \frac{nn(nn-4)}{2.3.4}y^4 - \text{etc.}] \\ \mathfrak{A}\,y\,[1 - \frac{(nn-1)}{2.3}y^2 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4.5}y^4 - \text{etc.}] \end{cases}$$

ſumto iam y infinite parvo, erit

$$\frac{2vy}{(\sqrt{-1})^{n-1}} = 2ny(\sqrt{-1})^{n-1},$$

$$\frac{2vy}{(\sqrt{-1})^{n-1}} = A + \mathfrak{A}y,$$

unde ſequitur $A = 0$ et $\mathfrak{A} = 2n(\sqrt{-1})^{n-1}$ hincque

$$vy = \text{ſin.}\, n\Phi = ny\,[1 - \frac{(nn-1)}{2.3}y^2 + \frac{(nn-1)(nn-9)}{2.3.4.5}y^4 - \text{etc.}]$$

Hae igitur ambae ſeries cum ſupra §. 24. allatis perfecte conveniunt.

DE
INVENTIONE DIVISORVM.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Conventui exhib. die 19 Iunii 1794.

§. 1.

Factores cuiuscunque functionis integrae tum ſimplices tum duplices inveniendi methodus, quam ſine ulla demonſtratione expoſuit magnus *Neutonus* (*), licet ob calculum prolixum, cui in praxi obnoxia videtur, parum ſit uſitata, tantam tamen in aequationibus reſolvendis, naturaque earum explicanda, utilitatem afferre videtur, ut breviter eam demonſtrare ampliusque extendere non ſuperfluum fore arbitrer. Per ſe namque patet, methodi huius ope aequationes ad inferiorem gradum deprimi, ideoque ad earum ſolutionem viam ſterni aut ſaltem reddi expeditiorem.

§. 2. Regula *Neutoniana* pro eruendis factoribus *ſimplicibus* functionis cuiusvis datae

$$A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \ldots = X$$

ſequens eſt: *Poſito ſucceſſive* $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, etc. *valores functionis X inde reſultantes, puta* $X = M$, $X =$

(*) Vniverſal Arithmetick. Of the Invention of Diviſors.

$X = N$, $X = O$, etc. reſolvantur in ſuos factores numericos ab 1 usque ad M, ſive N, etc. tumque quaeratur inter factores numeri M unus factor $\mathfrak{m}$, numeri N unus factor $\mathfrak{n}$, numeri O unus factor $\mathfrak{o}$, etc. huius indolis, ut factores $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, etc. componant progreſſionem Arithmeticam decreſcentem, cuius differentia $= \delta$ ſit vel unitas vel alius quilibet factor Coëfficientis A. Quibus praemiſſis erit $x + \frac{\mathfrak{o}}{\delta}$ ſive $\delta x + \mathfrak{o}$ factor quaeſitus, aut functio X nullum omnino habebit factorem ſimplicem.

Poſteriore caſus factores *quadrati*, ſiquidem functio X tales habeat, ſequente regula *Neutoniana* reperiuntur:

Iisdem praemiſſis ut ſupra, ſinguli factores $\mathfrak{m}$ numeri M ſubtrahantur a quadrato numeri binarii in quempiam factorem α Coëfficientis A (ubi quoque $\alpha = 1$ eſſe poteſt) ducto, factores $\mathfrak{n}$ a quadrato unitatis, etc. ita ut in genere $2^2 - \mathfrak{m}$ ſive $4\alpha - \mathfrak{m}$ appelletur $\mathfrak{M}$, $\alpha - \mathfrak{n} = \mathfrak{N}$, $o - \mathfrak{o} = \mathfrak{O}$, $\alpha - \mathfrak{p} = \mathfrak{P}$, etc. In ſerie horum reſiduorum quaerantur numeri $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, etc. ita comparati, ut conſtituant progreſſionem Arithmeticam, cuius differentia hic etiam evaneſcere poteſt. Sicque erit factor quaeſitus $= \alpha x x + (\mathfrak{O} - \mathfrak{N}) x - \mathfrak{O}$, aut functio X factoribus quadratis prorſus caret.

Cum regulae huius *Neutonianae* demonſtrationem quaererem, magis conducere mihi videbatur, negotium modo generaliore aggredi, ſive methodum generalem quaerere, factorem $y = a x^{\nu} + b x^{\nu - 1} + \ldots . + f x x + g x + h$ functionis $X = A x^{n} + B x^{n - 1} +$ etc. inveniendi. In quo dum eram occupatus, mox animadverti, totum negotium ſequente Lemmate niti.

§. 3.

Lemma.

§. 3. *Si* $X = x^n$, *et* x *ſucceſſive augeatur incrementis* 1, 2, 3, *etc. erit* $\Delta^n X = 1 . 2 . 3 . 4 . \ldots (n-1) n$, *ſeu nta differentia poteſtatis* n *variabilis* x *eſt conſtans.*

Poteſtatum ac differentiarum altiorum relationem hanc ſatis quidem cognitam, ſequente modo ſuccincte demonſtrare non inutile erit. Cum differentia *prima* quantitatis x^n, h. e. $(x+1)^n - x^n$ ſigno Δx^n denotari ſoleat, illa abeat in $'\Delta x^n$, poſito $x+1$ loco x, in $''\Delta x^n$, poſito $x+2$ loco x, etc. ita ut ſit

$$'\Delta x^n = (x+2)^n - (x+1)^n,$$
$$''\Delta x^n = (x+3)^n - (x+2)^n,$$

et ſic porro: tumque erit $'\Delta x^n - \Delta x^n = \Delta^2 x^n$, *ſecunda* differentia quantitatis x^n, quae ſubſtituto iterum $x+1$ loco x abit in $'\Delta^2 x^n$, unde porro ſit *tertia* differentia quantitatis x^n ſeu $\Delta^3 x^n = '\Delta^2 x^n - \Delta^2 x^n$, et ſic porro: ut igitur in genere ſit $\Delta^r x^n = '\Delta^{r-1} x^n - \Delta^{r-1} x^n$.

Iam vero caſu $n = 1$ eſt $\Delta^n X = \Delta x = (x+1) - x = 1$, et caſu $n = 2$, $\Delta^n X = \Delta^2 x^2 = '\Delta x^2 - \Delta x^2$: unde ob $\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$, ideoque in hac expreſſione ſubſtituto $x+1$ loco x, $'\Delta x^2 = 2x+3$, ſit $\Delta^n X = 2 = 1 . 2$. Caſu denique $n = 3$ eſt $\Delta^n X = \Delta^3 x^3$. Eſt autem $\Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3xx + 3x + 1$, proinde

$$'\Delta x^3 = 3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 = 3xx + 9x + 7,$$

et $\Delta^2 x^3 = '\Delta x^3 - \Delta x^3 = 6(x+1)$, ideoque $'\Delta^2 x^3 = 6(x+2)$, unde ſit $\Delta^3 x^3 = '\Delta^2 x^3 - \Delta^2 x^3 = 6 = 1 . 2 . 3$. Vnde veritas Lemmatis caſu $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, patet.

Simul-

Simulac autem Lemma conceditur pro potentia n, valebit quoque pro potentia $n+1$, quod ſequente modo demonſtrabimus. Cum in genere ſit

$$\Delta x^{n+1} = (x+1)^{n+1} - x^{n+1} = (n+1)\, x^n + \tfrac{(n+1)n}{1.2}\, x^{n-1} + \text{cet.}$$

et poſito $x+1$ loco x,

$$'\Delta x^{n+1} = (n+1)\,(x+1)^n + \tfrac{(n+1)n}{1.2}\,(x+1)^{n-1} + \text{cet.}$$

ubi Coëfficientes ex Theoremate Binomiali cognitae ſunt, ſequitur

$$\Delta^2 x^{n+1} = {}'\Delta x^{n+1} - \Delta x^{n+1} = (n+1)\,[(x+1)^n - x^n] + \tfrac{(n+1)n}{1.2}\,[(x+1)^{n-1} - x^{n-1}] + \text{cet.}$$
$$= (n+1)\,\Delta x^n + \tfrac{(n+1)n}{1.2}\,\Delta x^{n-1} + \tfrac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\,\Delta x^{n-2} + \text{cet.}$$

unde ſcripto $x+1$ loco x fit

$$'\Delta^2 x^{n+1} = (n+1)\,[(x+2)^n - (x+1)^n] + \tfrac{(n+1)n}{1.2}\,[(x+2)^{n-1} - (x+1)^{n-1}] + \text{cet.}$$
$$= (n+1)\,'\Delta x^n + \tfrac{(n+1)n}{1.2}\,'\Delta x^{n-1} + \tfrac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\,'\Delta x^{n-2} + \text{cet.}$$

ideoque

$$\Delta^3 x^{n+1} = {}'\Delta^2 x^{n+1} - \Delta^2 x^{n+1} = (n+1)\,('\Delta x^n - \Delta x^n) + \text{cet.}$$
$$= (n+1)\,\Delta^2 x^n + \tfrac{(n+1)n}{1.2}\,\Delta^2 x^{n-1} + \tfrac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\,\Delta^2 x^{n-2} + \text{cet.}$$

Cum haec expreſſio ſubdita ſit legi

$$\Delta^r x^{n+1} = (n+1)\,\Delta^{r-1} x^n + \tfrac{(n+1)n}{1.2}\,\Delta^{r-1} x^{n-1} + \text{cet.}$$

quae quidem lex modo demonſtrata fuit caſu $r=1$, $r=2$, $r=3$, facile oſtenditur, ſi lex valeat pro r, eandem quoque valere pro $r+1$. Subſtituto ſcilicet in hac expreſſione $x+1$ loco x, obtinetur

$$'\Delta^r x^{n+1} = (n+1)\,'\Delta^{r-1} x^n + \tfrac{(n+1)n}{1.2}\,'\Delta^{r-1} x^{n-1} + \text{cet.}$$

ideo-

ideoque

$$\Delta^{r+1}x^{n+1} = {}'\Delta^r x^{n+1} - \Delta^r x^{n+1} = (n+1)({}'\Delta^{r-1}x^n - \Delta^{r-1}x^n) + \frac{(n+1)n}{1.2}({}'\Delta^{r-1}x^{n-1} - \Delta^{r-1}x^{n-1}) + \text{cet.}$$

ſive

$$\Delta^{r+1}x^{n+1} = (n+1)\Delta^r x^n + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^r x^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^r x^{n-2} + \text{cet.}$$

quae formula e praecedente immediate elicitur, ſi $r+1$ loco r ſubſtituatur, unde ſequitur, hanc legem non minus pro $r+1$ quam pro r valere. Quare cum ea caſu $r=1$, $r=2$, $r=3$, peculiariter demonſtrata ſit patet, eandem quoque valere caſu $r=3+1=4$, ideoque ſimili modo caſu $r=5$, $r=6$, et pro quovis literae r valore integro. Eſt igitur univerſaliter vera haec formula:

$$\Delta^r x^{n+1} = (n+1)\Delta^{r-1}x^n + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^{r-1}x^{n-1} + \text{cet.}$$

Si iam ibi ponamus $r=n+1$, oritur

$$\Delta^{n+1}x^{n+1} = (n+1)\Delta^n x^n + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^n x^{n-1} + \text{cet.}$$

Quare cum ex hypotheſi ſit $\Delta^n x^n = 1.2.3\ldots n$, $\Delta^{n-1}x^{n-1} = 1.2.3\ldots\ldots(n-1)$, et in genere $\Delta^{n-r}x^{n-r} = 1.2.3\ldots(n-r)$ quantitas conſtans, ideoque $\Delta^{n-r+1}x^{n-r}$, et omnes differentiae altiores evaneſcant: ſequitur

$$0 = \Delta^n x^{n-1} = \Delta^n x^{n-2}, \text{ etc.}$$

Habemus itaque

$$\Delta^{n+1}x^{n+1} = (n+1)\Delta^n x^n = 1.2.3\ldots n(n+1).$$

Vnde cum huius formae veritas demonſtrata ſit caſu $n=1$, $n=2$, $n=3$, obtinebit quoque caſu $n=4$, et vi demonſtrationis caſu $n=5$, $n=6$, etc. Eſt itaque pro quavis potentia

tentia integra n, $\Delta^n x^n = 1.\ 2.\ 3.\ ..\ n$ quantitas conſtans. Q. E. D.

§. 4. Hinc ſimul patet, $\Delta^{n-1} x^n$ pro quavis potentia integra n eſſe progreſſionem Arithmeticam, cuius differentia $\Delta^n x^n = 1.\ 2.\ 3.\ ..\ n$.

Si $X = . a x^n$, facile perſpicitur, eſſe

$$\Delta^n X = a.\ 1.\ 2.\ 3.\ ..\ n.$$

Eſt nempe

$$\Delta X = a\ (x + 1)^n - a x^n = a . \Delta x^n,$$

$$'\Delta X = a\ (x + 2)^n - a\ (x + 1)^n = a . '\Delta x^n,$$

ideoque

$$\Delta^2 X = '\Delta X - \Delta X = a\ ('\Delta x^n - \Delta x^n) = a . \Delta^2 x^n.$$

Quare cum quaelibet differentia ſuperior Δ^{n+1} per inferiores Δ^n, Δ^{n-1}, etc. aequationibus ſimplicibus detur (§. 3.), ſequitur $\Delta^n . a x^n = a . \Delta^n x^n = a.\ 1\ 2.\ 3.\ ..\ n$.

§. 5. Propoſita iam functione integra

$$A x^m + B x^{m-1} + \ldots\ldots = X,$$

cuius factor ſit

$$a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots\ldots + f x x + g x + h = y,$$

ita ut ſit $X = y Y$, exiſtente Y producto factorum $k x^\kappa + l x^{\kappa - 1} + \ldots$ et $p x^\pi + q x^{\pi - 1} + \ldots$, erit functionis X terminus ſupremus aequalis producto terminorum ſummorum omnium factorum, h. e. $A x^m = a x^n k x^\kappa p x^\pi$, ſive $m = n + \kappa + \pi$, et $A = a k p$, proinde eſt a factor Coëfficientis A. Si iam variabili x ſucceſſive valores tribuantur progredientes ſerie Arithmetica, cuius differentia $= 1$, valorque re-

ſpondens factoris y a valore reſpondente potentiae x^n in a ductae, h. e. a termino ſuo ſupremo ſubtrahatur, reſidua $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, etc. hac forma generali continebuntur

$$-b\,x^{n-1} - c\,x^{n-2} \ldots\ldots - f\,x\,x - g\,x - h,$$

ideoque ſequente modo ſeſe habebunt:

x	Factor y	$a\,x^n$	Reſidua
$+2$	$2^n a + 2^{n-1} b \ldots + 4f + 2g + h$	$+2^n a$	$-2^{n-1} b - 2^{n-2} c \ldots - 4f - 2g - h = \mathfrak{M}$
$+1$	$a + b + c \ldots\ldots + f + g + h$	$+ a$	$- b - c \ldots\ldots - f - g - h = \mathfrak{N}$
0	$+ h$	0	$-h = \mathfrak{O}$
-1	$\pm a \pm b \pm c \ldots + f - g + h$	$\pm a$	$\mp b + c \ldots\ldots - f + g - h = \mathfrak{P}$
-2	$\pm 2^n a \pm 2^{n-1} b \ldots + 4f - 2g + h$	$\pm 2^n a$	$\mp 2^{n-1} b \pm 2^{n-2} c \ldots - 4f + 2g - h = \mathfrak{Q}$

Tabula haec oſtendit, primos terminos omnium reſiduorum Coëfficiente b affectos procedere iuxta poteſtatem $(n-1)$am numerorum naturalium $+3$, $+2$, $+1$, 0, -1, etc. terminos ſecundos, quorum Coëfficiens eſt c, ſecundum potentiam $(n-2)$am, et ſic porro: unde vi Lemmatis noſtri (§. 4.) ſequitur, differentiam $(n-2)$am ſeu Δ^{n-2} primorum terminorum eſſe progreſſionem Arithmeticam, cuius differentia $= b.\,1.\,2.\,3\,..\,(n-1)$; ſecundorum autem terminorum differentiam $(n-2)$am eſſe conſtantem, omnium denique ſequentium $= 0$. Vnde patet, integrorum reſiduorum $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, etc. differentiam Δ^{n-2} eſſe progreſſionem Arithmeticam, eiusque differentiam $= b.\,1.\,2.\,3.\,.\,.\,(n-1)$, quoniam eiusmodi progreſſio non turbatur, ſi ſingulis terminis eadem addatur quantitas conſtans $\Delta^{n-2}.\,c\,x^{n-2}$.

§. 6.

§. 6. Si iam caſu $x = 3$, $x = 2$, etc. functio X in *omnes* ſuos factores fuerit diſperſa, atque poteſtas x^n in omnes factores Coëfficientis A multiplicata, fieri nequit, quin inter illos factores quoque reperiatur factor y, inter hos vero factor a, Coëfficiens termini ſupremi x^1 factoris y. Quare in tabulae noſtrae columna reſiduorum 𝔐, 𝔑, etc. continebuntur quoque valores $a x^1 - y$, eorumque differentiae Δ^{n-2} neceſſario formabunt ſeriem Arithmeticam (§. 5.). Si itaque, reſidua 𝔐, 𝔑, etc. continuo ab invicem ſubtrahendo, donec perveniatur ad differentias Δ^{n-2}, illae reperiantur eſſe arithmetice proportionales, ſingula reſidua 𝔐, 𝔑, etc. hanc differentiarum ſeriem conſtituentia determinabunt valorem factoris quaeſiti y, demto termino primo $a x^1$, h. e. factor y in hac ſerie Arithmetica latere debet, aut nullus omnino adeſt. Omnis enim factor generalis y functionis X neceſſario eſt factor ſpecialis pro quovis valore functionis X determinato; neque vero omnes factores ſpeciales certi cuiusdam valoris X, e. gr. caſu $x = 2$, $x = 1$, ſimul ſunt factores generales, h. e. pro quovis functionis X valore determinato. Finis itaque Problematis noſtri eſt, ut e factoribus ſpecialibus caſu $x = 2$, $x = 1$, etc. ii eligantur, qui *cuivis* valori determinato ſatisfaciunt, h. e. qui ſemper ſunt factores ſpeciales, quotiescunque x unitate augeatur minuaturve. Tales autem factores $y = a x^n + b x^{n-1} + \ldots$ per hactenus demonſtrata ita comparatos eſſe oportet, ut $\Delta^{n-2} (a x^n - y)$ fiat progreſſio Arithmetica. Criterium hoc ideo tantummodo negativum eſt neque invertere licet, quia ſeries $x = 1$, $x = 2$, etc. non in infinitum eſt continuata. Hocce etenim caſu propoſitio inverſa non minus locum haberet: ſiquidem facile patet, factorem y, cuius differentia Δ^{n-1} in infinitum continuata, h. e. pro quovis

Z. 2 valo-

valore variabilis x, eſt conſtans, ideoque $\Delta^n y = 0$, ſub forma generali $y = a x^n + b x^{n-1} + \ldots$ contineri debere, ideoque functionis X factorem eſſe generalem.

Regula itaque noſtra duabus partibus conſtat, quarum una omnes factores *ſpeciales* reperiuntur, altera vero diiudicatur, quinam horum factorum ſint *generales*.

§. 7. Si nempe factor triplex, quadruplex, vel n tuplex formae $y = a x^n +$ cet. quaeratur, ex hactenus dictis ſequens fluit regula:

Poſito ſucceſſive $x = 2$, $x = 1$, *etc. valorum reſpondentium functionis propoſitae, puta* $X = M$, $X = N$, *etc. factores omnes ſpeciales* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, *etc. eruantur, et a poteſtate factoris quaeſiti ſuprema* x^n *in quempiam factorem* α *Coëfficientis A ducta ſubtrahantur, ut reſultent reſidua* $\alpha x^n - \mathfrak{m} = \mathfrak{M}$, $\alpha x^n - \mathfrak{n} = \mathfrak{N}$, *etc. tumque reſiduis* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, *etc. ſeu generatim* $\mathfrak{R}$ *continuo ab invicem ſubtractis, donec perveniatur ad eorum differentiam* Δ^{n-2}, *eiusmodi ſeries eligantur, ut ſit* $\Delta^{n-2}\mathfrak{R}$ *progreſſio Arithmetica.* Tum huius ſeriei ope factor quaeſitus generalis $y = a x^n + b x^{n-1} +$ etc. facile determinatur.

§. 8. Nihil etenim iam ſupereſt, niſi ut, ſerie Arithmetica differentiarum Δ^{n-2} reſiduorum $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, etc. valoribus $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ reſpondentium inventa, inde Coëfficientes a, b, c, ... f, g, h factoris

$$y = a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots f x x + g x + h$$

determinentur.

Pri-

Primus quidem Coëfficiens a ipſe factor α Coëfficientis A eſt, per quem poteſtas x^1 multiplicata fuit in formanda ſerie $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, etc. (§. 5. 6.); ultimus autem Coëfficiens h eſt $= - \mathfrak{O}$, h. e. aequalis et oppoſitus illi ſeriei reſiduorum termino, qui valori $x = 0$ reſpondet (V. Tab. §. 5.).

Si porro ſeriei Arithmeticae Δ^{n-2} differentia fuerit reperta $= \delta$, eſt $\delta = b. 1. 2. 3. \ldots (n-1)$ (§. 5.), proinde Coëfficiens ſecundus $b = \frac{\delta}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}$. Ceteri denique Coëfficientes g, f, etc. ut in tabula (§. 5.) videre eſt, ope aequationum, $h + g + f + \ldots + c + b = - \mathfrak{N}$,

$$h - g + f - \ldots \mp c \pm b = - \mathfrak{P},$$
$$h + 2g + 4f + \ldots + 2^{n-2} c + 2^{n-1} b = - \mathfrak{M},$$
$$h - 2g + 4f - \ldots \mp 2^{n-2} c \pm 2^{n-1} b = - \mathfrak{Q}, \text{ etc.}$$

determinantur, in quibus ſignum *ſuperius* valet, ſi n ſit numerus *impar*, *inferius* autem, quando n eſt numerus *par*. Ad Coëfficientes g, f, etc. determinandos totidem itaque termini $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, etc. requiruntur, h. e. $n-2$ termini, qui ſinguli Coëfficientes quaeſitos aequationibus ſimplicibus exprimunt.

Ceterum patet ex ipſa tabula, in iis quae hactenus demonſtrata ſunt, ſemper ſupponi, pro determinandis Coëfficientibus b, c, etc. terminos ſuperiores ab inferioribus eſſe ſubtractos: ſic e. gr. pro eruendo factore duplice $axx + gx + h$ eſt $\mathfrak{N} = -g - h$, $\mathfrak{O} = -h$, ideoque $g = \mathfrak{O} - \mathfrak{N}$. Idem obſervare oportet in formandis differentiis altioribus: quare ſi ſemper termini inferiores a ſuperioribus fuerint ſubtracti,

tracti, differentiae negative ſunt accipiendae, unde hocce caſu fit $b = \frac{\text{[illegible]} - \delta}{1.\,2.\,3.\,.\,.\,(n-1)}$.

§. 9. Facile denique perſpicitur, methodo hac factores multiplices reperiri non poſſe, quando functio X factoribus ſimplicibus gaudet: unde tentamen ab his ſemper eſt inchoandum. Iſto enim caſu in ſerie valorum $x = 1$, $x = 2$, etc. occurrent quoque radices integrae aequationis $X = 0$, unde functio X evaneſcit, ideoque nonniſi unicum factorem $= 0$ habere videtur, ita ut factor quaeſitus multiplex in tabulae ſchemate non occurrat: eſt nempe hocce caſu $X = 0\,.\,y$, unde tabula tantummodo factorem 0 exhibere poteſt, non autem factorem y. Quamobrem ſi ſeries valorum x e. gr. ad ± 3 usque fuerit continuata, factores multiplices tunc modo reperiuntur, ſi functio X non habeat radices numeris integris inter -3 et $+3$ contentis aequales.

§. 10. Cum ſit $y = a\,x^n + b\,x^{n-1} + \ldots\ldots$, differentiae Δ^{n-1} omnium terminorum praeter primum conſtantes fiunt aut evaneſcunt (§. 3.), primi vero termini differentia Δ^{n-1} erit progreſſio Arithmetica, cuius differentia $= a.\,1.\,2.\,3.\,.\,.\,n$ (§. 4.): unde ſequitur, $\Delta^{n-1} y$ pariter eiusmodi progreſſionem eſſe. Hinc regula pro eruendis factoribus ſimplicior deducitur, ut nempe factores cuiuscunque valoris functionis X ab invicem ſubtrahantur, donec perveniatur ad differentias $\Delta^{n-1} y$, ita quidem comparatas, ut ſeriem conſtituant Arithmeticam. Haec autem regula requirit, ut in formandis differentiis, quae pars huius operationis eſt maxime taedioſa, ulterius adhuc uno gradu procedatur.

§. 11.

§. 11. Quo regulae noſtrae generali plus lucis afferatur, ad caſus quosdam ſpeciales eam applicare iuvabit.

Pro factoribus *ſimplicibus* $y = ax + b$ eſt $n = 1$ et $\Delta^{n-1} y = \Delta^0 y = y$, ideoque ipſa factorum ſpecialium ſeries erit progreſſio Arithmetica, cuius differentia $\delta = a$ (§. 10.), fietque $b = h = 0$, ſeu factor y valori $x = 0$ reſpondens (V. tab. §. 5.), conſequenter $y = \delta x + 0$.

Pro eruendis factoribus *duplicibus* $y = axx + bx + c$, eſt $n = 2$, ideoque $\Delta^{n-2}(\alpha xx - y) = \alpha xx - y$, h. e. ſeries reſiduorum progreſſio Arithmetica et $a = \alpha$, $b = \pm \delta$, $c = -\mathfrak{O}$, ubi ſignum ſuperius (+) aut inferius (—) adhibetur, prout in ſerie reſiduorum termini ſuperiores ab inferioribus, aut hi ab illis fuerint ſubtracti. Eſt itaque $+\delta = \mathfrak{O} - \mathfrak{N} = \mathfrak{N} - \mathfrak{M}$, etc. et $-\delta = \mathfrak{N} - \mathfrak{O} = \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$, etc. unde reperitur factor duplex

$$y = \alpha xx + (\mathfrak{O} - \mathfrak{N})x - \mathfrak{O}.$$

Binis hisce caſibus regula *Neutoniana* continetur (§. 2.).

Si factores *triplices* $y = ax^3 + bxx + cx + d$ quaerantur, eſt $n = 3$, et $\Delta^{n-2}(\alpha x^3 - y) = \Delta(\alpha x^3 - y)$ progreſſio Arithmetica differentiae δ, ideoque $a = \alpha$, $b = \pm \frac{1}{2}\delta$, $d = -\mathfrak{O}$, et $d + c + b = -\mathfrak{N}$ (§. 8.), h. e. $c = \mathfrak{O} - \mathfrak{N} \mp \frac{1}{2}\delta$, et $y = \alpha x^3 \pm \frac{1}{2}\delta xx + (\mathfrak{O} - \mathfrak{N} \mp \frac{1}{2}\delta)x - \mathfrak{O}$.

Pro inveniendis factoribus *biquadratis* $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, eſt $\Delta^2(\alpha x^4 - y)$ progreſſio Arithmetica, cuius differentia ſit $= \delta$; proinde $a = \alpha$, $b = \pm \frac{1}{6}\delta$,

$e =$

$e = -\mathfrak{O}$, $e + d + c + b = -\mathfrak{N}$, $e - d + c - b = -\mathfrak{P}$ (§. 8.); unde fit $-\frac{1}{2}\mathfrak{N} - \frac{1}{2}\mathfrak{P} = e + c = c - \mathfrak{O}$, et $\frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{N} = d + b = d \pm \frac{1}{6}\delta$, ideoque $c = \mathfrak{O} - \frac{1}{2}(\mathfrak{N} + \mathfrak{P})$,

$$d = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P} - \mathfrak{N} \mp \tfrac{\delta}{3}), \text{ et}$$

$$y = \alpha x^4 \pm \tfrac{\delta}{6} x^3 + (\mathfrak{O} - \tfrac{\mathfrak{N} + \mathfrak{P}}{2})\, x x + (\tfrac{\mathfrak{P} - \mathfrak{N}}{2} \mp \tfrac{\delta}{6})\, x - \mathfrak{O}.$$

§. 12. Regulam noſtram uno exemplo illuſtraſſe ſufficiet. Propoſita itaque ſit functio

$$X = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1,$$

eiusque quaeratur factor biquadratus

$$y = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e,$$

unde ob Coëfficientem termini ſupremi x^6, puta $A = 1$, erit $\alpha = 1 = a$, atque ſequens conſtruenda eſt tabula:

x	X	Factores ſpeciales y
+ 3	+ 427	1. 7. (61). 427.
+ 2	+ 33	1. 3. (11). 33.
+ 1	+ 1	(1).
0	+ 1	(1).
− 1	+ 15	1. 3. (5). 15.
− 2	+ 217	1. 7. (31). 217.

x^4	Reſidua: $x^4 - y$	$\Delta\,(x^4 - y)$	$\Delta^2\,(x^4 - y)$
+ 81	+ 80. + 74. (+ 20). etc.	+ 65. + 61. (+ 15).	
+ 16	+ 15. + 13. (+ 5). − 17	+ 15. + 13. (+ 5).	+ 50. + 48. (+ 10).
+ 1	(0).	+ 1. + 1. (+ 1).	+ 14. + 12. (+ 4).
0	(− 1).	− 1. + 1. (+ 3).	+ 2. 0. (− 2).
+ 1	0. − 2. (− 4). − 14.	− 15. − 11. (+ 11).	+ 14. + 12. (− 8).
+ 16	+ 15. + 9. (− 15). − 201.		

Ta-

Tabula haec docet, ſolos numeros parentheſi incluſos ſic eſſe comparatos, ut eorum differentiae ſecundae progreſſionem conficiant Arithmeticam. Aſſumtis nempe valoribus $y = +61$, $y = +11$, $y = +1$, $y = +1$, $y = +5$, $y = +31$, inde oriuntur reſidua $81 - 61 = +20 = \mathfrak{L}$, $16 - 11 = +5 = \mathfrak{M}$, $1 - 1 = 0 = \mathfrak{N}$, $0 - 1 = -1 = \mathfrak{O}$, $1 - 5 = -4 = \mathfrak{P}$, $16 - 31 = -15 = \mathfrak{Q}$, unde formantur differentiae primae $\mathfrak{L} - \mathfrak{M} = +15$, $\mathfrak{M} - \mathfrak{N} = +5$, $\mathfrak{N} - \mathfrak{O} = +1$, $\mathfrak{O} - \mathfrak{P} = +3$, $\mathfrak{P} - \mathfrak{Q} = +11$, et differentiae ſecundae $15 - 5 = +10$, $5 - 1 = +4$, $1 - 3 = -2$, $3 - 11 = -8$, formant progreſſionem Arithmeticam, cuius differentia $\delta = 6$, quae hic negative eſt accipienda, quia termini inferiores a ſuperioribus ſunt ſubtracti (§. 8.). Habemus itaque $a = \alpha = 1$, $b = -\frac{\delta}{6} = -1$, $c = \mathfrak{O} - \frac{\mathfrak{N} + \mathfrak{P}}{2} = +1$, $d = \frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{N}}{2} + \frac{\delta}{6} = -1$, et $e = -\mathfrak{O} = +1$, unde reperitur factor $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, et $\frac{X}{y} = xx - x + 1$.

§. 13. Seriem $x = 1$, $x = 2$, etc. haud ita longe continuare opus eſt, ſed pauci termini ſufficiunt ad reperiendam ſeriem Arithmeticam $\Delta^{n-2}(\alpha x^n - y)$, unde determinata differentia δ, tentando facile diſcernitur, utrum ea differentia ceteris quoque ſatisfaciat valoribus variabilis x. Si e. gr. eiusdem functionis X quaeratur factor duplex $y = axx + bx + c$, conſtruatur ſequens tabella:

x	y	x^2	$x^2 - y$
$+1$	1.	$+1$	0.
0	1.	0	-1.
-1	1. 3. 5. 15.	$+1$	0. -2. -4. -14.

Hinc unica reſultat ſeries Arithmetica reſiduorum, 0, — 1, — 2, cuius differentia $\delta = -1 = \mathfrak{O} - \mathfrak{N} = b$, et $c = -\mathfrak{O} = +1$, unde fit $y = xx - x + 1$, quemadmodum iam ſupra (§. 12.) diviſione reperimus. Sin autem absque diviſione disquirere velimus, factorne iſte revera locum habeat, ſeries Arithmetica tantum eſt continuanda. Cum ſcilicet ſit $\delta = -1$, aſcendendo obtinemus $x^2 - y = +1$ caſu $x = 2$, $x^2 - y = +2$ caſu $x = 3$, $x^2 - y = +3$ caſu $x = 4$, et deſcendendo $x^2 - y = -3$ caſu $x = -2$, $x^2 - y = -4$ caſu $x = -3$, $x^2 - y = -5$ caſu $x = -4$, etc. unde neceſſe eſt ut ſit $y = 4 - 1 = 3$ factor numeri $X = 33$, $y = 9 - 2 = 7$ factor numeri $X = 427$, $y = 16 - 3 = 13$ factor numeri $X = 2665$, $y = 4 + 3 = 7$ factor numeri $X = 217$, $y = 9 + 4 = 13$ factor numeri $X = 1573$, et $y = 16 + 5 = 21$ factor numeri $X = 7161$, quae omnia ſic ſe habere facile perſpicitur.

§. 14. Negari quidem non poteſt, methodum hanc, ſi factores inveniendi ſint quinti altiorumve graduum, ad calculum perducere non parum prolixum; neque vero meliorem methodum Analyſis ſuppeditat. Quinimmo, ſi factores modo ſimplices quaerantur (quod problema ſaepiſſime occurrit), diviſio per omnes termini ultimi conſtantis functionis X factores iuxta methodum vulgarem inſtituenda calculum requirit multo ſane longiorem, quam iſta *Neutoni* methodus, quae pro factoribus ſimplicibus et duplicibus ſatis eſt ſimplex. Quamobrem haec methodus minus videtur fuiſſe cognita aut uſitata, quam meretur.

DILV-

DILVCIDATIONES
SVPER PROBLEMATE GEOMETRICO
DE ELLIPSI MINIMA
PER DATA QVATVOR PVNCTA DVCENDA.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conventui exhibitae die 31 Aug. 1795.

§. 1.

Hoc problema difficillimum ab Eulero ſolutum reperitur in Tomo IX. Novor. Actor. nuper divulgato. „Caſum huius problematis“ inquit auctor „ubi quatuor puncta in angulis parallelogrammi rectanguli conſtituta aſſumuntur, „iam olim ſolutum dedi; verum problema generale tum „temporis aggredi non ſum auſus, propter ingentem quantitatum numerum, quae in calculum introduci deberent“. In memorata diſſertatione Eulerus ſolutionem problematis generalis ad aequationem cubicam perduxit. Quid autem ſignificent ternae radices huius aequationis, ſi forte ſint omnes reales, et quomodo problemati propoſito ſatisfaciant, in dubio reliquit. Cupiens ſcire quid ſibi velint tres ſolutiones problematis, quod unicam tantum admittere videtur, radices illas accuratiori examini ſubieci. Ne autem lectori aliunde petendae ſint explicationes, quibus opus erit ad

 in-

intelligendas ſequentes dilucidationes, ſolutionem Euleri in compendium redactam, hic praemittere conveniet.

§. 2. Sint igitur A, B, C, D quatuor puncta data, Tab. I. quae, quia Ellipſis per ea tranſire debet, ita diſpoſita con- Fig. 1. cipiuntur, ut quartum extra triangulum cadat a tribus reliquis formatum. Quadrilateri, ab his punctis formati producantur bina latera oppoſita AB et CD, ad concurſum usque in O, ponaturque angulus $BOD = \zeta$, intervalla vero vocentur $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, quae igitur ſemper erunt poſitiva. Sit porro O initium et OB axis abſciſſarum, voceturque abſciſſa $OX = x$, applicata vero obliquangula, rectae OD parallela, ſit $XY = y$. His poſitis cum aequatio generalis curvarum ſecundi ordinis ſit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

haec aequatio erit pro Ellipſi, quoties coëfficientes A et C eodem ſigno ſunt affecti et $BB < AC$.

§. 3. Ponatur nunc $y = 0$, eritque aequatio $Ax^2 + 2Dx + F = 0$; at quoniam $y = 0$ ubi $x = a$ et $x = b$, hi valores erunt radices illius aequationis. Statuatur igitur

$$Ax^2 + 2Dx + F = M(x - a)(x - b),$$

eritque

$$A = M;\ D = -\frac{M(a+b)}{2};\ F = Mab.$$

§. 4. Ponatur $x = 0$, ita ut aequatio ſit $Cy^2 + 2Ey + F = 0$; et cum x evaneſcat quando $y = c$ et $y = d$, hi valores erunt radices illius aequationis. Sit igitur

$$Cy^2 + 2Ey + F = N(y - c)(y - d),\ \text{fiet}$$

$$C = N;\ E = -\frac{N(c+d)}{2};\ F = Ncd.$$

§. 5.

§. 5. Cum igitur eſſe debeat $F = M a b$ et $F = N c d$, ponamus $M = c d$ et $N = a b$, eritque

$$A = c d;\ D = -\tfrac{1}{2} c d (a + b);\ F = a b c d;$$
$$C = a b;\ E = -\tfrac{1}{2} a b (c + d).$$

Hoc modo omnes coëfficientes aequationis, praeter B, ſunt determinati.

§. 6. Quaeratur nunc applicata y ex aequatione generali §. 2. exhibita, prodibitque:

$$y = -\frac{(E + B x) \pm \surd [(E + B x)^2 - A C x^2 - 2 C D x - C F]}{C},$$

Tab. I. Fig. 2.

unde patet ſingulis abſciſſis duas reſpondere applicatas

$$X Y' = -\frac{(E + B x) + \surd [(E + B x)^2 - A C x^2 - 2 C D x - C F]}{C},$$
$$X Y = -\frac{(E + B x) - \surd [(E + B x)^2 - A C x^2 - 2 C D x - C F]}{C},$$

ita ut ſit chorda

$$Y Y' = \frac{2 \surd [(E + B x)^2 - A C x^2 - 2 C D x - C F]}{C},$$

quae ſi ducatur in diſtantiam eius a chorda parallela proxima $y y'$, puta in perpendiculum $x v = \partial x \sin. \zeta$, prodibit elementum areae:

$$Y Y' y' y = \frac{2 \partial x \sin. \zeta}{C} \surd [(E + B x)^2 - A C x^2 - 2 C D x - C F],$$

hincque area ipſa erit

$$\frac{2 \sin. \zeta}{C} \int \partial x \surd [(E + B x)^2 - A C x^2 - 2 C D x - C F].$$

§. 7. Iam in circulo, cuius radius $= r$ et abſciſſa a centro ſumta $= t$, elementum areae eſt $2 \partial t \surd (r r - t t)$, ideoque area per totam figuram extenſa

$$\pi r r = 2 \int \partial t \surd (r r - t t),$$

quam aequationem ſi ducamus in $\mu \nu \sin. \zeta$, tum vero loco t ſcri-

ſcribamus $x + k$, habebimus pro Ellipſi

$$\pi\mu\nu rr\,\text{ſin.}\,\zeta = 2\mu\,\text{ſin.}\,\zeta\int\partial x\sqrt{[\nu\nu rr - \nu\nu(x+k)^2]},$$

quae expreſſio ſi cum ante inventa comparetur, deprehenditur fore $\mu = \frac{1}{C}$, $\nu\nu = AC - BB$, $k = \frac{CD - BE}{AC - BB}$, atque

$$rr = \frac{CCDD + ACEE - 2BCDE}{(AC - BB)^2} - \frac{CF}{AC - BB}.$$

His valoribus ſubſtitutis in formula $\pi\mu\nu rr\,\text{ſin.}\,\zeta$, tota area Ellipſis erit:

$$\pi\,\text{ſin.}\,\zeta\left[\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC-BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC-BB)}}\right].\,(^*)$$

§. 8.

(*) Hanc areae expreſſionem etiam directe ex ipſa coordinatarum permutatione, et, praeter ſpem, ſatis concinne demonſtrare licet ſequenti modo. Sumantur Tab. I. Fig. 1. abſciſſae a centro Ellipſis, vocenturque coördinatae $ET = t$, $TY = u$, eritque $\frac{tt}{ff} + \frac{uu}{gg} = \mathfrak{A}$, et area Ellipſis $S = \pi fg\mathfrak{A}$, exiſtentibus ſemiaxibus $p = f\sqrt{\mathfrak{A}}$ et $q = g\sqrt{\mathfrak{A}}$. Per O agatur recta OH # FG, ad eamque producantur Y T et Y X ad S et R usque, ductaque O K # S Y et X Q # F G et X P # Y S vocentur $EK = \mathfrak{m}$, $OK = \mathfrak{n}$, angulus vero $BOH = \gamma$, eritque

$$OP = x\,\text{coſ.}\,\gamma;\quad YQ = +y\,\text{ſin.}\,(\gamma+\zeta);$$
$$XP = x\,\text{ſin.}\,\gamma;\quad XQ = -y\,\text{coſ.}\,(\gamma+\zeta);$$

hinc autem manifeſtum eſt fore

$$t = x\,\text{coſ.}\,\gamma + y\,\text{coſ.}\,(\gamma+\zeta) - \mathfrak{m},$$
$$u = x\,\text{ſin.}\,\gamma + y\,\text{ſin.}\,(\gamma+\zeta) - \mathfrak{n}.$$

His

§. 8. In hac iam expreſſione omnes quantitates, praeter B, ſunt determinatae; iſte autem coëfficiens B ex conditione *Minimi* definietur, dum ſcilicet differentiale areae minimam efficiendae, ſpectando B ut variabile, nihilo aequatur. Hinc enim reſultat iſta aequatio:

0 =

His valoribus in aequatione $\frac{tt}{ff} + \frac{uu}{gg} - \mathfrak{A} = 0$ ſubſtitutis, prodit aequatio (§. 2.)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

exiſtente

$$A = \frac{cof.\,\gamma^2}{ff} + \frac{fin.\,\gamma^2}{gg};$$

$$B = \frac{cof.\,\gamma\,cof.\,(\gamma + \zeta)}{ff} + \frac{fin.\,\gamma\,fin.\,(\gamma + \zeta)}{gg};$$

$$C = \frac{cof.\,(\gamma + \zeta)^2}{ff} + \frac{fin.\,(\gamma + \zeta)^2}{gg};$$

$$D = -\frac{m\,cof.\,\gamma}{ff} - \frac{n\,fin.\,\gamma}{gg};$$

$$E = -\frac{m\,cof.\,(\gamma + \zeta)}{ff} - \frac{n\,fin.\,(\gamma + \zeta)}{gg};$$

$$F = \frac{mm}{ff} + \frac{nn}{gg} - \mathfrak{A}.$$

Hic ſtatim quaſi ſponte ſe offerunt ſequentes combinationes:

I. $AC - BB = \frac{fin.\,\zeta^2}{ffgg};$

II. $A\,fin.\,(\gamma+\zeta)\,cof.\,(\gamma+\zeta) + C\,fin.\,\gamma\,cof.\,\gamma = B\,fin.\,(2\gamma+\zeta);$

III. $A\,fin.\,(\gamma + \zeta)^2 - C\,fin.\,\gamma^2 = \frac{fin.\,\zeta\,fin.\,(2\gamma + \zeta)}{ff};$

IV. $A\,cof.\,(\gamma + \zeta)^2 - C\,cof.\,\gamma^2 = -\frac{fin.\,\zeta\,fin.\,(2\gamma + \zeta)}{gg};$

V. $D\,fin.\,(\gamma + \zeta) - E\,fin.\,\gamma = -\frac{m\,fin.\,\zeta}{ff};$

VI. $D\,cof.\,(\gamma + \zeta) - E\,cof.\,\gamma = +\frac{n\,fin.\,\zeta}{gg}.$

Ex

$$0 = \frac{3B(CDD + AEE - 2BDE)}{(AC - BB)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2DE - BF}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}},$$

quae ducta in $(AC - BB)^{\frac{5}{2}}$ et ordinata ſecundum poteſtates ipſius B, hanc induit formam:

$$0 = F.B^3 - 4DE.B^2 + (3CDD + 3AEE - ACF)B - 2ACDE.$$

In-

Ex III. et IV. ſequitur fore:

$$ff = \frac{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,(2\gamma + \zeta)}{A\,\text{ſin.}\,(\gamma + \zeta)^2 - C\,\text{ſin.}\,\gamma^2};$$

$$gg = \frac{-\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,(2\gamma + \zeta)}{A\,\text{coſ.}\,(\gamma + \zeta)^2 - C\,\text{coſ.}\,\gamma^2}.$$

Ex V. et VI. vero colligitur:

$$\left(\frac{m}{ff}\right)^2 = \frac{[D\,\text{ſin.}\,(\gamma + \zeta) - E\,\text{ſin.}\,\gamma]^2}{\text{ſin.}\,\zeta^2};$$

$$\left(\frac{n}{gg}\right)^2 = \frac{[D\,\text{coſ.}\,(\gamma + \zeta) - E\,\text{coſ.}\,\gamma]^2}{\text{ſin.}\,\zeta^2}.$$

Vltima aequatio dat

$$\mathfrak{A} + F = ff\left(\frac{m}{ff}\right)^2 + gg\left(\frac{n}{gg}\right)^2,$$

et facta ſubſtitutione erit:

$$\mathfrak{A} + F = \frac{\text{ſin.}\,(2\gamma + \zeta)}{\text{ſin.}\,\zeta}\left[\frac{[D\,\text{ſin.}\,(\gamma + \zeta) - E\,\text{ſin.}\,\gamma]^2}{A\,\text{ſin.}\,(\gamma + \zeta)^2 - C\,\text{ſin.}\,\gamma^2} - \frac{[D\,\text{coſ.}\,(\gamma + \zeta) - E\,\text{coſ.}\,\gamma]^2}{A\,\text{coſ.}\,(\gamma + \zeta)^2 - C\,\text{coſ.}\,\gamma^2}\right],$$

ſive ob denominatorem communem

$$\text{III.} \times \text{IV.} = -\frac{\text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,(2\gamma + \zeta)^2}{ffgg} = -\text{ſin.}\,(2\gamma + \zeta)^2(AC - BB),$$

habebimus

$$\mathfrak{A} + F = \left\{\frac{\begin{array}{l} + [D\,\text{coſ.}\,(\gamma + \zeta) - E\,\text{coſ.}\,\gamma]^2\,[A\,\text{ſin.}\,(\gamma + \zeta)^2 - C\,\text{ſin.}\,\gamma^2] \\ - [D\,\text{ſin.}\,(\gamma + \zeta) - E\,\text{ſin.}\,\gamma]^2\,[A\,\text{coſ.}\,(\gamma + \zeta)^2 - C\,\text{coſ.}\,\gamma^2] \end{array}}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,(2\gamma + \zeta)(AC - BB)}\right\},$$

quod ita contrahere licet:

$$\mathfrak{A} + F = \frac{CDD + AEE}{AC - BB} - \frac{2DE\,[A\,\text{ſin.}\,(\gamma + \zeta)\,\text{coſ.}\,(\gamma + \zeta) + C\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma]}{\text{ſin.}\,(2\gamma + \zeta)(AC - BB)},$$

quae

Inventa hac aequatione Eulerus diſſertationi ſuae finem facit his verbis: „Quodſi forte eveniat, ut aequatio illa cu„bica tres admittat radices reales, totidem quoque ſolutio„nes locum habebunt, quarum autem indolem aliis per„ſcrutandam relinquo.“

§. 9. Cum igitur inter omnes Ellipſes, quae per data quatuor puncta traduci poſſunt, certe unica tantum minimam aream habere queat, non inutile profecto erit explorare, quid ſignificent ternae illae radices reales, ſi tot inſint aequationi propoſitae, et quomodo problemati ſatisfaciant. Quaeramus hunc in finem radices aequationis cubicae

$$B^3 - \alpha B^2 + \beta B - \gamma = 0$$

per triſectionem, reducendo eam ad formam conſuetam $z^3 = f z + g$, ope poſitionis $B = z + \frac{1}{3}\alpha$, atque habebimus

$$f = \frac{1}{3}\alpha\alpha - \beta;$$

$$g = \frac{2}{27}\alpha^3 + \gamma - \frac{1}{3}\alpha\beta;$$

exiſtente

$$\alpha = \frac{4DE}{F};$$

$$\beta = \frac{3CDD + 3AEE - 4CF}{F};$$

$$\gamma = 2DE;$$

unde

---

quae expreſſio ob II. reducitur ad hanc:

$$\mathfrak{A} + F = \frac{CDD + AEE - 2BDE}{AC - BB},$$

hincque area quaeſita $\pi \mathfrak{f} \mathfrak{g} \mathfrak{A}$, ob $\mathfrak{f}\mathfrak{g} = \frac{\text{ſin.}\,\zeta}{\sqrt{(AC - BB)}}$, erit ut ſupra

$$S = \pi\,\text{ſin.}\,\zeta \left[\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}}\right].$$

unde, ob $AC = F$, ſit

$$f = \frac{16}{3}\frac{DDEE}{FF} + F - \frac{3(CDD + AEE)}{F},$$

$$g = \frac{DE}{F}\left[\frac{128}{27}\frac{DDEE}{FF} + \frac{10}{3}F - \frac{4(CDD + AEE)}{F}\right].$$

Inventis his valoribus quaeratur angulus ω, cuius coſinus $= \frac{3g\sqrt{3}}{2f\sqrt{f}}$; tum enim aequationis $z^3 = fz + g$ radices erunt:

$$z = 2\sqrt{\tfrac{f}{3}}.\operatorname{coſ}.\tfrac{\omega}{3};$$

$$z' = 2\sqrt{\tfrac{f}{3}}.\operatorname{coſ}.(120^\circ - \tfrac{\omega}{3});$$

$$z'' = 2\sqrt{\tfrac{f}{3}}.\operatorname{coſ}.(120^\circ + \tfrac{\omega}{3});$$

radices autem aequationis propoſitae ita ſe habebunt:

$$B = \frac{4}{3}\frac{DE}{F} + z;$$

$$B' = \frac{4}{3}\frac{DE}{F} + z';$$

$$B'' = \frac{4}{3}\frac{DE}{F} + z''.$$

Quodſi autem eveniat ut $2f\sqrt{f} < 3g\sqrt{3}$, quaerendus eſt ſin. $\Phi = \frac{2f\sqrt{f}}{3g\sqrt{g}}$, tum vero tang. $\omega = \sqrt[3]{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\Phi}$, et unica radix realis, quae hoc caſu locum habet, eſt $z = \frac{2\sqrt{\frac{f}{3}}}{\text{ſin. } 2\omega}$.

§. 10. Quo autem indolem harum radicum penitius perſcrutari valeamus valoribus f et g formam huic negotio magis accommodatam tribuamus neceſſe eſt. Ponatur hunc in finem:

$$b = a + ma = (m+1)a;$$

$$d = c + nc = (n+1)c;$$

eruntque litterae maiuſculae

$$A = (n+1)cc;$$

$$C = (m+1)aa;$$

F =

$$F = (m+1)(n+1)\,aacc;$$
$$D = -\tfrac{1}{2}(n+1)(m+2)\,acc;$$
$$E = -\tfrac{1}{2}(m+1)(n+2)\,aac;$$

unde porro deducitur

$$\frac{DE}{F} = \frac{(m+2)(n+2)}{4}\cdot ac;$$

conſequenter ſumtis quadratis erit

$$\frac{DDEE}{FF} = \left(\frac{mm}{4}+m+1\right)\left(\frac{nn}{4}+n+1\right)a^2c^2,$$

quod ita repraeſentaſſe iuvabit

$$\frac{DDEE}{FF} = \left[(m+1)(n+1)+\tfrac{1}{4}[mm(n+1)+nn(m+1)]+\frac{mmnn}{16}\right]a^2c^2;$$

tum vero erit

$$\frac{CDD}{F} = \frac{(n+1)(m+2)^2}{4}a^2c^2 = \left[(m+1)(n+1)+\frac{mm}{4}(n+1)\right]a^2c^2;$$
$$\frac{AEE}{F} = \frac{(m+1)(n+2)^2}{4}a^2c^2 = \left[(m+1)(n+1)+\frac{nn}{4}(m+1)\right]a^2c^2;$$

quibus ſubſtitutis nanciſcimur

$$f = \left[\frac{(m+1)(n+1)}{3}+\tfrac{7}{12}[mm(n+1)+nn(m+1)]+\frac{mmnn}{3}\right]a^2c^2;$$
$$g = \frac{DE}{F}\left[\tfrac{2}{27}(m+1)(n+1)+\tfrac{5}{27}[mm(n+1)+nn(m+1)]+\tfrac{8}{27}mmnn\right]a^2c^2.$$

§. 11. Hanc formam litteris f et g ideo tribuimus, quod perquam idonea eſt concluſionibus inde deducendis maxime neceſſariis. Primo enim, quoniam litterae m et n denotant numeros vel integros vel fractos. at ſemper poſitivos. evidens eſt neutrum horum valorum f et g unquam negativum fieri poſſe; unde ſequitur coſinum anguli ω ſemper fore poſitivum, ergo $\frac{\omega}{3} < 30^\circ$. Porro hinc quoque ſequitur, nunquam fore $2f\sqrt{f} < 3g\sqrt{3}$. Nam ſi hoc evenie poſſet, unica radix realis $z = \frac{2\sqrt{\frac{f}{3}}}{\text{ſin. } 2\omega}$, quae hoc caſu lo-

cum habet, foret poſitiva, ideoque $B > \frac{4}{3}\frac{DE}{F}$, et a fortiori $B > \frac{4}{3}\sqrt{AC}$, unde Hyperbola naſceretur, nullaque alia ſolutio locum inveniret, quoniam reliquae binae radices forent imaginariae. Cum autem puncta data ita diſpoſita concipiantur, ut innumerae Ellipſes traduci queant, inter quas certe una erit minima, aequatio noſtra unicam radicem realem, problemati adeo alienam, habere nequit. Semper igitur erit $2f\sqrt{f} > 3g\sqrt{3}$.

§. 12. Quodſi forte haec ratio non ſatis valida videretur, eam analytica demonſtratione corroborare poterimus, et oſtendere ſemper fore $2f\sqrt{f} > 3g\sqrt{3}$, quicunque numeri pro litteris m et n accipiantur. Hunc in finem compendii calculorum gratia ponamus:

$$(m+1)(n+1)aacc = L;$$
$$\frac{mm}{m+1} + \frac{nn}{n+1} = M;$$
$$\frac{mmnn}{(m+1)(n+1)} = N;$$

atque habebimus

$$\frac{DDEE}{FF} = L\left(1 + \frac{1}{4}M + \frac{1}{16}N\right);$$
$$f = L\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{12}M + \frac{1}{3}N\right);$$
$$g = L\frac{DE}{F}\left(\frac{2}{27} + \frac{5}{27}M + \frac{8}{27}N\right);$$

unde porro fit

$$4f^3 = 4\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{12}M + \frac{1}{3}N\right)^3 . L^3;$$
$$27gg = \frac{(2+5M+8N)^2}{27}\left(1 + \frac{1}{4}M + \frac{1}{16}N\right)L^3.$$

Cum igitur demonſtrandum ſit eſſe $4f^3 > 27gg$, omiſſis factoribus communibus oſtendendum eſt fore

$$4\left(1 + \frac{7}{4}M + N\right)^3 > \left(1 + \frac{1}{4}M + \frac{1}{16}N\right)(2 + 5M + 8N)^2,$$

et

et facta evolutione

$$12\,N + \tfrac{147}{4}M^2 + 42\,MN + 12\,N^2 + \tfrac{343}{16}M^3 + \tfrac{147}{4}M^2N >$$
$$\tfrac{129}{4}N + 30\,M^2 + \tfrac{357}{4}MN + 66\,N^2 + \tfrac{25}{4}M^3 + \tfrac{345}{16}M^2N,$$

ſive contractis contrahendis factaque diviſione per $\frac{27}{16}$:

$$4\,M^2 + 9\,M^3 + 9\,M^2N > 12\,N + 28\,MN + 32\,N^2.$$

Eſt vero $(P+Q)^2 > 4\,PQ$, certe quidem non minus, conſequenter etiam erit:

$$\left(\frac{mm}{m+1} + \frac{nn}{n+1}\right)^2 \geqq \frac{4\,mmnn}{(m+1)(n+1)};$$

hoc eſt $M^2 \geqq 4\,N$, unde ſequitur fore

$$4\,M^2 > 12\,N;$$
$$9\,M^3 > 28\,MN;$$
$$9\,M^2N > 32\,N^2.$$

Revera igitur ſemper erit

$$4\,M^2 + 9\,M^3 + 9\,M^2N > 12\,N + 28\,MN + 32\,N^2,$$

conſequenter $4f^3 > 27\,gg$. Aequatio igitur illa ſemper tres habebit radices reales, quicunque valores litteris a, b, c, d tribuantur.

§. 13. Cum porro, uti ex modo tradita demonſtratione perſpicitur, ne quidem fieri poſſit $2f\sqrt{f} = 3g\sqrt{3}$, quaecunque ſint intervalla a, b, c, d, nunquam fieri poterit $\omega = 0$, ita ut angulus $\frac{\omega}{3} > 0$. At $\frac{\omega}{3} < 30°$, ut ſupra §. 11. oſtendimus, quod obſervaſſe in ſequentibus iuvabit.

§. 14. Nunc igitur in indolem ternarum radicum realium noſtrae aequationis accuratius inquiramus; ac ſtatim videbimus primam radicem $B = \frac{4}{3}\frac{DE}{F} + z$ eſſe pro Hyperbola,

bola, quoniam, ob $\omega > 0$ et $\omega < 30°$, quantitas z poſitivum ſortitur valorem, ita ut $B > \frac{4}{3}\frac{DE}{F} > \frac{4}{3}\sqrt{AC}$.

§. 15. In ſecunda radice $B' = \frac{4}{3}\frac{DE}{F} + z'$ pars $z' = 2\sqrt{\frac{f}{3}}.\text{coſ.}(120° - \frac{\omega}{3})$, ob $\omega > 0$ et $\omega < 30°$, ſemper eſt negativa, unde radix B' eo minor erit, quo maiorem z' obtinuerit valorem. Maximus autem valor ipſius z' prodiret ſumto $\frac{\omega}{3} = 0$, quo caſu igitur etiam radix $B' = \frac{4}{3}\frac{DE}{F} - \sqrt{\frac{f}{3}}$ minimum valorem obtineret. Angulus autem ω evaneſcit quando m et n ſunt numeri valde parvi: fit enim $f = \frac{1}{3}L$ et $g = \frac{2}{27}L\sqrt{L}$, ideoque $4f^3 = 27gg$. Hoc autem caſu, quo m et n ſunt fractiones minimae, erit quoque

$$\frac{DE}{F} = \sqrt{[(m+1)(n+1)]}.ac = \sqrt{AC},$$

$$\sqrt{\frac{f}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{[(m+1)(n+1)]}.ac = \frac{1}{3}\sqrt{AC},$$

ideoque minimus valor ipſius B foret $B = \frac{4}{3}\frac{DE}{F} - \sqrt{\frac{f}{3}} = \sqrt{AC}$. Quoniam autem, hoc caſu excepto, quo puncta A et B, itemque C et D quaſi in unum coaleſcunt; ſemper fit $\omega > 0$, ſemper quoque erit $B' > \sqrt{AC}$, ideoque et haec ſecunda radix pro Hyperbola.

§. 16. Tertiae denique radicis $B'' = \frac{4}{3}\frac{DE}{F} + z''$ pars $z'' = 2\sqrt{\frac{f}{3}}.\text{coſ.}(120° + \frac{\omega}{3})$ quoque fit negativa, unde radix B'' eo maior erit, quo minor fuerit quantitas z''. Minimus autem valor, quem z'' recipere poteſt, oriretur ſumto $\omega = 0$, quo caſu maximus valor radicis foret $B'' = \frac{4}{3}\frac{DE}{F} - \sqrt{\frac{f}{3}} = \sqrt{AC}$. Quoniam vero nunquam fieri poteſt $\omega = 0$, certi ſumus ſemper fore $B'' < \sqrt{AC}$, quicunque valores litteris a, b, c, d, tribuantur. Haec igitur radix erit pro Ellipſi.

§. 17.

§. 17. Hinc intelligitur ſolam poſtremam radicem problemati, ut ab Eulero fuit propoſitum, ſatisfacere, binas priores vero, utpote huic problemati non convenientes, excludi. Quin etiam, etſi problema non ad ſolam Ellipſin reſtringatur, haud facile perſpicitur, quomodo binae illae Hyperbolae conditioni minimae areae ſatisfaciant. Verum enim vero tam Ellipſis quam binae Hyperbolae inventae communi quodam Minimo praeditae eſſe debent, cuius in ſolutione ratio ſit habita, etiamſi problema id non enunciaverit. Diſpiciendum igitur quodnam commune Minimum hic locum habeat, tum vero problema ita proponendum eſt, ut ternarum quas ſolutio praebuit, radicum nulla excludatur. At ſi perpendamus quid requiratur ad aream totius Ellipſis minimam reddendam, mox intelligimus, univerſam ſolutionem ſupra traditam omnimode quoque convenire ſequenti problemati multo latius patenti:

Inter omnes lineas curvas ſecundi ordinis per data quatuor puncta tranſeuntes, eas invenire, in quibus rectangulum ex ſemiaxibus factum ſit omnium minimum.

§. 18. Problema ſic enunciatum ſemper tres habiturum eſſe ſolutiones haud difficulter perſpicitur. Parabola quidem, ut quae axem transverſum habet infinitum, coniugato vero penitus caret, nullam ſolutionem parit. Verum duo dantur modi Hyperbolam per data quatuor puncta ducendi. Primo enim una Hyperbolae pars tranſire poteſt per puncta A et B, oppoſita vero per puncta C et D, ita ut axis transverſus, ſi ductus concipiatur, ſecet binas rectas OB et OD. Secundo una Hyperbola tranſire poterit per puncta A et C, eiusque oppoſita per puncta B et D, ita ut axis

Tab. I. Fig. 3.

Fig. 4.

con-

coniugatus tranſeat per binas rectas A B et C D. Hinc igitur manifeſto duae ſolutiones problematis enaſcuntur; tertiam autem offert Ellipſis, cuius area minima.

§. 19. Quod autem binae priores ſolutiones, ex modo dicta axium Hyperbolarum poſitione diverſa oriundae, revera in binis prioribus radicibus B et B noſtrae aequationis cubicae contineantur ipſa radicum indoles et conſideratio applicatarum ſatius declarant. Si enim partem irrationalem expreſſionis ſupra §. 6. pro applicata Y ſectionis conicae inventae ita repraeſentemus:

$$\sqrt{[(BB - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + EE - CF]},$$

eamque accuratius examinemus, ſtatim animadvertimus primum eius membrum, ob $BB > AC$, ſemper fore poſitivum, aeque ac tertium, quod ob $EE - CF = \frac{1}{4}nn(m-1)a^4cc$ nunquam negativum fieri poteſt. Quod ſecundum membrum attinet, duo caſus ſunt diſtinguendi, utrum ſcilicet $B > \frac{4}{3}\frac{DE}{F}$, an vero $B < \frac{4}{3}\frac{DE}{F}$. Priore caſu, qui pro prima radice locum habet, erit $BE > \frac{4}{3}\frac{DEE}{F}$; at vero eſt $EE > CF$, ut modo vidimus, conſequenter certe erit $BE > \frac{4}{3}CD$. Hinc manifeſtum eſt pro prima radice coëfficientem ſecundi membri $2(BE - CD)$, quoniam D et E ſunt quantitates negativae, ſemper fore negativum, et quidem, ob $(BE - CD) > \frac{1}{3}CD$, ſatis notabilem. Dabuntur ergo hoc caſu abſciſſae x, quibus reſpondent applicatae imaginariae, quod nempe eveniet intra ſpatium:

Tab. I. Fig. 3.

$$PQ = 2\sqrt{\left[\left(\frac{BE - CD}{BB - AC}\right)^2 - \left(\frac{EE - CF}{BB - AC}\right)\right]}.$$

Pro prima igitur radice una Hyperbola tranſibit per puncta A et B, eiusque oppoſita per puncta C et D, et axis transverſus

verſus F G utramque rectam O B et O D interſecabit. Hoc enim modo omnes applicatae, intra applicatas P R et Q S, binas Hyperbolas ſocias contingentes, ſitae, erunt imaginariae.

§. 20. Pro ſecunda autem radice $B < \frac{4}{3}\frac{DE}{F}$, intervallum illud P Q fit imaginarium, ita ut omnes applicatae hoc caſu ſint reales. Hoc ſcilicet evenit, quando fuerit

$$(BE - CD)^2 < (BB - AC)(EE - CF),$$

hoc eſt, quando, exiſtente $B > \sqrt{AC}$, fit

$$B < \frac{DE}{F} + \sqrt{\left[\frac{DDEE}{FF} - \frac{AEE}{F} - \frac{CDD}{F} + AC\right]},$$

ſive $B < \frac{DE}{F} + \frac{mn}{4}.ac$, quod quia parum diſcrepat a $\frac{4}{3}\frac{DE}{F}$, pro ſecunda radice, ſemper notabiliter minore quam $\frac{4}{3}\frac{DE}{F}$, erit $B < \frac{DE}{F} + \frac{mn}{4}.ac$, ideoque intervallum P Q imaginarium. Quoniam igitur hoc caſu omnes applicatae ſunt reales, iſta ſecunda radix erit pro Hyperbola, cuius una porio tranſit per puncta A et C, eiusque oppoſita per puncta B et D, ita ut axis coniugatus F G ſecet rectas A B et C D.

§. 21. Liquet igitur, quod ſupra §. 17. innuimus, ſolutionem ab Eulero pro Ellipſi minima inventam prorſus convenire cum ſolutione problematis quo quaeritur ſectio conica per data quatuor puncta tranſiens, in qua rectangulum ex ſemiaxibus factum ſit minimum. Quo hoc clarius pateſcat deſcripta concipiatur ſectio, in eaque ducta ſit applicata N H per centrum E tranſiens, quae quidem, quoniam N cadit intra ſpatium P Q pro prima Hyperbola, (Fig. 2.) ex radice B nata, erit imaginaria (§. 19.), realis vero reſpectu Hyperbolarum ad eas coniugatarum quae problemati ſatisfaciunt. Tum vero quoque ductae ſint applicatae curvam Tab. I. Fig. 2. 3. 4.

tangentes P R et Q S, rectaque R S per puncta contactus R et S, quae pro ſecunda Hyperbola, (Fig. 4.) ex radice B′ nata, erunt in binis Hyperbolis coniugatis illarum quae problemati ſatisfaciunt. Hoc modo rectae E R et E H erunt ſemidiametri coniugati. Rectae R S interſectio cum linea abſciſſarum ſit in V, vocenturque anguli P V R $= \eta$ et P R V $= \theta$, intervalla vero P N $= h$, O N $= k$, ita ut, quoniam applicatae curvam tangunt, quando

$$x = -\left(\frac{BE-CD}{BB-AC}\right) \pm \sqrt{\left[\left(\frac{BE-CD}{BB-AC}\right)^2 - \left(\frac{EE-CF}{BB-AC}\right)\right]}, \text{ ob}$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{BE-CD}{BB-AC}\right)^2 - \left(\frac{EE-CF}{BB-AC}\right)\right]} = \tfrac{1}{2} PQ \ (\text{§. } 19.)$$

habeamus

$$PN = h = \sqrt{\left[\left(\frac{BE-CD}{BB-AC}\right)^2 - \left(\frac{EE-CF}{BB-AC}\right)\right]},$$

conſequenter

$$ON = k = -\left(\frac{BE-CD}{BB-AC}\right),$$

unde ex §. 6. ſequitur fore

$$EH = \frac{1}{C}\sqrt{[(BB-AC)k^2 + 2(BE-CD)k + EE-CF]}$$

ſive, ſubſtituto valore ipſius k,

$$EH = \frac{1}{C}\sqrt{\left[EE - CF - \frac{(BE-CD)^2}{BB-AC}\right]}.$$

Semidiameter E R ex triangulo E M R, ſimili triangulo V P R, eruitur. Fit enim

$$ER = \frac{EM\, ſin.\, \zeta}{ſin.\, \theta} = \frac{h\, ſin.\, \zeta}{ſin.\, \theta},$$

hoc eſt

$$ER = \frac{ſin.\, \zeta}{ſin.\, \theta}\sqrt{\left[\left(\frac{BE-CD}{BB-AC}\right)^2 - \left(\frac{EE-CF}{BB-AC}\right)\right]},$$

unde cum ſit

$$\frac{EH}{\sqrt{(AC-BB)}} = \frac{1}{C}\sqrt{\left[\left(\frac{BE-CD}{BB-AC}\right)^2 - \left(\frac{EE-CF}{BB-AC}\right)\right]},$$

habe-

habebimus

$$\frac{ER.EH\,ſin.\,\theta}{\sqrt{(AC-BB)}} = \frac{ſin.\,\zeta}{C}\left[\left(\frac{BE-CD}{BB-AC}\right)^2 - \left(\frac{EE-CF}{BB-AC}\right)\right],$$

ac proinde

$$ER.EH\,ſin.\,\theta = \frac{ſin.\,\zeta}{C}\left[\frac{(CD-BE)^2}{(AC-BB)^{\frac{3}{2}}} + \frac{EE-CF}{\sqrt{(AC-BB)}}\right].$$

Eſt vero E R . E H ſin. θ rectangulo ex ſemiaxibus facto aequale, quod minimum eſſe debet. Minima igitur efficienda eſt haec formula:

$$ſin.\,\zeta\left[\frac{CDD+AEE-2BDE}{(AC-BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC-BB)}}\right],$$

quae eſt ipſiſſima expreſſio Euleri, ad quam in ſolvendo problemate de Ellipſi minima pervenit, id quod utique evenire debuerat, quoniam area Ellipſis, in qua rectangulum ex ſemiaxibus factum eſt minimum, quoque ſit minima. Hoc igitur modo indolem ternarum illarum radicum, quas Eulerus aliis perſcrutandam reliquit, perfecte cognoſcimus.

§. 22. Nunc quoque longitudinem et poſitionem axium curvarum problemati noſtro generaliori ſatisfacientium inveſtigemus. Hunc in finem ante omnia angulos η et θ noſſe oportet, qui ſequenti modo facillime determinantur. Cum ſit O P $= + k - h$ et O Q $= + k + h$ (§. 21.), ex §. 6. ſequitur fore:

$$PR = -\frac{E-B.OP}{C} = -\frac{E-B(k-h)}{C},$$

$$QS = -\frac{E-B.OQ}{C} = -\frac{E-B(k+h)}{C},$$

unde fit P R $-$ Q S $= \frac{2Bh}{C}$. Eſt vero

$$PR:PV = PR - QS : PV - QV = \frac{2Bh}{C} : 2h,$$

 con-

conſequenter

$$PR : PV = B : C = \text{ſin.}\, \eta : \text{ſin.}\, \theta.$$

Hinc autem ſequitur

$$B + C : B - C = \text{tang.}\, \frac{\eta + \theta}{2} : \text{tang.}\, \frac{\eta - \theta}{2},$$

unde ambo anguli η et θ innoteſcunt.

§. 23. Inventis autem ſemidiametris coniugatis E R et E H, per meras quantitates cognitas iam expreſſis, ipſi ſemiaxes facile determinari poterunt. Vocentur enim ſemiaxes $EF = p$, $Ef = q$ et quoniam pro Ellipſi eſt

$$pp + qq = ER^2 + EH^2,$$

$$2pq = 2\, ER \,.\, EH\, \text{ſin.}\, \theta,$$

habebimus pro hac curva

$$p + q = \sqrt{[ER^2 + EH^2 + 2\, ER \,.\, EH\, \text{ſin.}\, \theta]},$$

$$p - q = \sqrt{[ER^2 + EH^2 - 2\, ER \,.\, EH\, \text{ſin.}\, \theta]},$$

quorum ſumma dat axem F G, differentia vero axem fg. Pro Hyperbolis autem cum ſit

$$pp - qq = ER^2 - EH^2,$$

ſumtis quadratis erit

$$p^4 - 2ppqq + q^4 = ER^4 - 2\, ER^2 \,.\, EH^2 + EH^4,$$

cui ſi addatur

$$4ppqq = 4\, ER^2 \,.\, EH^2\, \text{ſin.}\, \theta^2,$$

extracta utrinque radice prodit

$$pp + qq = \sqrt{(ER^4 - 2\, ER^2 \,.\, EH^2 \text{coſ.}\, 2\theta + EH^4)}, \text{ at}$$

$$pp - qq = ER^2 - EH^2,$$

unde ſequitur fore

$$2pp = ER^2 - EH^2 + \sqrt{(ER^4 - 2\, ER^2 \,.\, EH^2 \text{coſ.}\, 2\theta + EH^4)}$$

$$2qq = EH^2 - ER^2 + \sqrt{(ER^4 - 2\, ER^2 \,.\, EH^2 \text{coſ.}\, 2\theta + EH^4)}.$$

§. 24.

§. 24. Pro determinanda poſitione axium, vocemus angulum, quem axis FG cum recta OB conſtituit, EKV $= \Phi$, eritque angulus KEV vel $180^\circ - (\eta + \Phi)$, vel $\eta - \Phi$, prout punctum K vel intra vel extra intervallum PV cadat. Hinc ſi ex R in axem FG demittatur perpendiculum RL, erit

$$RL^2 = ER^2 \text{ſin.} (\eta \pm \Phi)^2,$$

$$EL^2 = ER^2 \text{coſ.} (\eta \pm \Phi)^2,$$

conſequenter

$$ER^2 \text{ſin.} (\eta \pm \Phi)^2 = qq - \frac{qq}{pp} ER^2 [1 - \text{ſin.} (\eta \pm \Phi)^2],$$

unde colligitur

$$\text{ſin.} (\eta \pm \Phi) = \frac{q}{R} \sqrt{\frac{pp - ER^2}{pp - qq}},$$

ubi meminiſſe oportet, pro Hyperbolis, loco q ſcribendum eſſe $q\sqrt{-1}$, ita ut

$$\text{ſin.} (\eta \pm \Phi) = \frac{q}{ER} \sqrt{\frac{ER^2 - pp}{pp + qq}},$$

quo invento inclinatio Φ innoteſcit.

Evolutio caſus particularis.

§. 25. Non ſuperfluum videtur disquiſitiones noſtras generales aliquo exemplo numerico illuſtrare. Ponamus igitur angulum BOD $= \zeta = 60^\circ$, intervalla vero OA $= a = 1$, OB $= b = 3$, OC $= c = 2$, OD $= d = 4$; ita ut $m = 2$ et $n = 1$, eritque A $= 8$, C $= 3$, D $= -16$, E $= -9$, F $= 24$. Hinc autem fit $f = 39$ et $g = 88$; unde colligitur angulus $\omega = 20^\circ, 9', 42''$, ita ut ſit:

$$\tfrac{1}{3}\omega = 6^\circ, 43', 14''$$
$$120^\circ - \tfrac{1}{3}\omega = 113, 16, 46$$
$$120^\circ + \tfrac{1}{3}\omega = 126, 43, 14.$$

Aequa-

Aequationis igitur cubicae

$$B^3 - 24\,B^2 + 153\,B - 288 = 0,$$

ternae radices erunt

$$B = 15{,}16155$$
$$B' = 5{,}15006$$
$$B'' = 3{,}68839$$

quarum binae priores, utpote maiores quam $\sqrt{AC} = 4{,}89898$, erunt pro Hyperbolis, poſtrema vero, quoniam minor quam $\sqrt{AC}$, pro Ellipſi.

§. 26. Inventis iam his valoribus coëfficientis B, applicatae y abſciſſae x reſpondentes pro ternis curvis problemati ſatisfacientibus erunt:

Pro prima Hyperbola:

$$y = 3 - 5{,}0538\,.\,x \pm \sqrt{(1 - 19{,}6564\,.\,x + 22{,}8747\,.\,x^2)}.$$

Pro ſecunda Hyperbola:

$$y = 3 - 1{,}7167\,.\,x \pm \sqrt{(1 + 0{,}3665\,.\,x + 0{,}2803\,.\,x^2)}.$$

Pro Ellipſi:

$$y = 3 - 1{,}2292\,.\,x \pm \sqrt{(1 + 1{,}6452\,.\,x - 1{,}1552\,.\,x^2)}.$$

Quodſi priorum binarum formularum ope aliquot applicatas determinemus, tractus curvarum per punctorum ſeriem deſcriptarum egregie confirmabit omnia, quae ſupra §§. 1 – 10. de duplici modo Hyperbolam per data quatuor puncta ducendi innuimus. Computavi hunc in finem aliquot applicatas utriusque Hyperbolae, quas in ſequentibus tabellis ob oculos ponam.

Pro

Pro prima Hyperbola.

x	y	y'
− 3	+ 1, 857	+ 34, 466
− 2	+ 1, 626	+ 24, 588
− 1	+ 1, 456	+ 14, 652
0	+ 2, 000	+ 4, 000
+ $\frac{1}{3}$	Imagin.	Imagin.
+ $\frac{2}{3}$	Imagin.	Imagin.
+ 1	− 4, 107	+ 0, 000
+ 2	− 14, 400	+ 0, 185
+ 3	− 24, 323	+ 0, 000
+ 4	− 34, 197	− 0, 234

Pro ſecunda Hyperbola.

x	y	y'
− 4	+ 7, 862	+ 11, 875
− 3	+ 6, 593	+ 9, 707
− 2	+ 5, 255	+ 7, 612
− 1	+ 3, 761	+ 5, 673
0	+ 2, 000	+ 4, 000
+ 1	+ 0, 000	+ 2, 567
+ 2	− 2, 123	+ 1, 256
+ 3	− 4, 300	+ 0, 000
+ 4	− 6, 500	− 0, 833

§. 27. Binae Hyperbolae in figura tertia et quarta, harum tabellarum ſubſidio ſatis accurate delineatae, non ſolum declarant curvas revera per data quatuor puncta A, B,

C, D

C, D ita tranſire, quemadmodum ſupra §. 19. a priori oſtendimus, ſed etiam cum reliquis elementis ex formulis §. §. 22 — 24. determinatis bene conſentiunt, quae ſcilicet elementa pro omnibus tribus curvis problemati ſatisfacientibus ſequenti modo ſe habent:

Pro prima Hyperbola;
ubi B = 15, 16155.

§. 28. Hinc igitur erit BE = — 136, 45395, CD = — 48; B^2 = 229, 87250 et AC = 24; unde fit BE — CD = — 88, 45395 et BB — AC = + 205, 87250; tum vero eſt EE — CF = 9. Hinc autem colligitur:

$$k = -\left(\frac{BE - CD}{BB - AC}\right) = +\, 0,429654;$$

$$h = \sqrt{\left[kk - \left(\frac{EE - CF}{BB - AC}\right)\right]} = 0,37535.$$

Porro, ob $\eta + \theta = 180 - \zeta$, erit $\frac{\eta + \theta}{2} = 60°$, et tang. $\frac{\eta - \theta}{2} = \frac{B - C}{B + C}$ tang. $\frac{\eta + \theta}{2}$, unde prodit l tang. $\frac{\eta - \theta}{2} = 0,0643968$, hinc $\frac{\eta - \theta}{2} = 49°, 14'$; ita ut ſit $\eta = 109°, 14'$ et $\theta = 10°, 46'$. His inventis habebuntur ſemidiametri

$$ER = \frac{h\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\theta} = 1,74006,$$

$$EH = \frac{1}{C}\sqrt{\left[\frac{(BE - CD)^2}{BB - AC} - (EE - CF)\right]} = 1,79520,$$

conſequenter ſemiaxes erunt:

$$p = 0,70299$$

$$q = 0,83008.$$

Denique pro hac Hyperbola erit

$$l\,\text{ſin.}\,(\eta - \Phi) = l\,\frac{q}{ER}\sqrt{\frac{ER^2 - pp}{pp - qq}} = 9,8438902,$$

unde fit $\eta - \Phi = 44°, 16'$, ita ut, ob $\eta = 109°, 14'$, fit inclinatio axis FG cum recta OB, hoc eſt angulus OKF = 64°, 58'.

Pro

Pro ſecunda Hyperbola;
ubi $B = 5,15006$.

§. 29. Hoc igitur caſu habebimus $BE = -46,35054$; $CD = -4$; $AC = 24$ et $B^2 = 26,52311$; unde colligitur $BE - CD = +1,64946$; $B^2 - AC = +2,52311$. Hinc autem fit $k = -\left(\frac{BE - CD}{B^2 - AC}\right) = -0,65374$ et $h = \sqrt{\left(\frac{[illegible]}{B^2 - AC} - kk\right)} = 1,77191$. Deinde invenimus $l \tang. \frac{\eta - \theta}{2} = [illegible],6598504$, unde fit $\frac{\eta - \theta}{2} = 24°, 33', 30''$, ita ut habeamus $\eta = 84°, 33', 30''$ et $\theta = 35°, 26', 30''$. Tum vero ſemidiametri coniugati erunt: Tab. I. Fig. 4.

$$ER = \frac{h \sin. \zeta}{\sin. \theta} = 2,64629;$$

$$EH = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[EE - CF - \frac{(BE - CD)^2}{B^2 - AC}\right]} = 0,93818,$$

ſemiaxes autem huius ſecundae Hyperbolae

$$p = 2,53856$$
$$q = [illegible],[illegible]6711.$$

His inventis determinari poterit angulus $KEV = \eta - \Phi$. Fit enim $l \sin. (\eta - \Phi) = l \frac{q}{ER} + l \frac{ER^2 - pp}{pp - qq} = [illegible],7097055$, unde colligitur $\eta - \Phi = [illegible]°, [illegible]6', [illegible]0''$, conſequenter inclinatio axis FG, ſcilicet angulus $OKF = \Phi = [illegible]°, 37', 10''$.

Pro Ellipſi;
ubi $B = [illegible], 8839$.

§. 30. Pro hac curva invenimus $BE - CD = + 14,80449$; $B^2 - AC = -10,39579$, ergo $k = +1,42408$ et $h = +1,[illegible]11[illegible]$; tum vero fit $\eta = [illegible]°, [illegible]', [illegible]''$; $\theta = 49°, 53', 30''$. Semidiametri autem coniugati erunt $ER = 1,92618$ et $EH = 1,82826$, et ſemiaxes Fig. 2.

$$p = [illegible],40884$$
$$q = [illegible],[illegible].$$

Denique angulus $KEV = 180° - (\eta + \Phi)$, ob

$$l\,\text{ſin.}\,(\eta + \Phi) = l\,\frac{q}{EK}\sqrt{\frac{pp - rr}{pp - qq}} = 9,5949950, \text{ erit}$$

$$\angle KEV = 180° - (\eta + \Phi) = 23°, 10', 30'',$$

ideoque $\eta + \Phi = 156°, 49', 30''$, conſequenter inclinatio axis FG cum recta OB, ſive angulus $BKF = \Phi = 80°, 43'$.

Applicatio ſolutionis generalis ad caſum ubi Sectio conica per tria puncta data tranſit.

§. 31. Statuatur $n = c$, eritque $d = c$, hoc eſt $OD = OC$, ita ut puncta D et C in unum coaleſcant, curvaque tranſeat per tria puncta data A, B, C. Hoc igitur caſu valores coëfficientium A, C, D, E, F, §. 10. exhibitorum ita ſe habebunt:

$$A = cc;$$
$$C = (m + 1)aa;$$
$$D = -\tfrac{1}{2}(m + 2)acc;$$
$$E = -(m + 1)aac;$$
$$F = +(m + 1)aacc.$$

Hinc ſtatim patet eſſe $EE = CF$, unde ſequitur fore

$$h = \frac{BE - CD}{BB - AC} = k \text{ (§. 21.)},$$

conſequenter $OP = k - h = 0$ et $PR = -\frac{E}{C} = c$; unde manifeſtum eſt rectam OC curvam in C tangere. Valores f et g (§. 9.) non curamus, quoniam valores coëfficientis B hoc caſu facilius ſequenti modo determinare licet. Cum ſit, ut vidimus, $EE - CF = 0$, rectangulum minimum efficiendum erit:

$$pq = \frac{\text{ſin.}\,\zeta}{C} \cdot \frac{(CD - BE)^2}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} \text{ (§. 21.)}$$

unde

unde differentiali nihilo aequato prodit

$$(CD-BE)(3B[CD-BE]-2E[AC-BB])=0.$$

Ex primo factore concluditur fore

$$\text{I. } B=\frac{CD}{E}=\tfrac{1}{2}(m+2)ac,$$

ex ſecundo autem factore deducitur

$$B=\frac{3CD}{2E}\pm\sqrt{\left(\frac{9CCDD}{4EE}-2AC\right)},$$

ita ut ſit

$$\text{II. } B=\tfrac{1}{4}ac[3(m+2)+\sqrt{9m^2+4(m+1)}],$$

$$\text{III. } B=\tfrac{1}{4}ac[3(m+2)-\sqrt{9m^2+4(m+1)}].$$

§. 30. Primus valor ipſius B, ex factore CD − BE deductus, excluditur, quoniam ſolutio inde nata non eſt pro linea ſecundi ordinis, ſed pro linea recta, et quidem pro perimetro trianguli ABC. Cum enim ſit EE = CF; CD = BE et BB − AC = $\tfrac{1}{4}mmaacc$, ex §. 6. ſequitur fore Tab. I. Fig. 5.

$$y=c-\frac{(m+2\mp m)cx}{2(m+1)a},$$

ita ut binae applicatae abſciſſae OX = x reſpondentes ſint:

$$XY'=c-\frac{cx}{(m+1)a}=\frac{c(b-x)}{b};$$

$$XY=c-\frac{cx}{a}=\frac{c(a-x)}{a}.$$

Eſt vero in figura quinta

$$XY'=\frac{BX.OC}{OB}=\frac{c(b-x)}{b},$$

$$XY=\frac{AX.OC}{OA}=\frac{c(a-x)}{a},$$

ideoque puncta Y et Y ſunt in perimetro trianguli ABC.

§. 31. Quod binos reliquos valores ipſius B attinet, prior erit pro Hyperbola, cuius una pars HDK per puncta

 A et

A et B tranſit, oppoſita vero F C G rectam O C in C tangit; poſterior valor B erit pro Ellipſi per puncta A et B tranſeunte rectamque O C in C contingente. Habemus igitur hic ſolutionem huius Problematis:

Inter omnes ſectiones conicas, per data tria puncta A, B, C deſcriptas, eas invenire, quae rectam ex puncto C ad initium abſciſſarum O ductam in C contingant, quorumque rectangulum ex ſemiaxibus factum ſit minimum.

Hoc problema non confundendum eſt cum eo quod Eulerus in Tomo IX. novorum Actorum, pag. 146 — 153 ſolutum dedit (*), quippe in quo, praeterquam quod ad ſolam Ellipſin reſtringitur, conditio illa, quod curva rectam O C in C tangat, non continetur.

(*) Solutio problematis maxime curioſi, quo inter omnes Ellipſes, quae circa datum triangulum circumſcribi poſſunt, ea quaeritur, cuius area ſit minima.

INTE-

INTEGRATIO FORMVLARVM

$$\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[3]{(1-x^3)}} \text{ et } \frac{\partial x \sqrt[3]{(1-x^3)}}{1+x}.$$

Auctore

STEPH. RVMOVSKY.

Conventui exhib. die 3 Decemb. 1795.

§. 1.

Antequam integrationem harum formularum aggrediar, notari conveniet, ſi conſtet modus integrandi formulas propoſitas, eodem modo integralia elici poſſe formularum

$$\frac{\partial x}{(1-x)\sqrt[3]{(1+x^3)}} \text{ et } \frac{\partial x \sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x},$$

nam hae ex illis reſultant, ſi in locum $+x$ ſubſtituatur $-x$.

§. 2. Pro evolvendo integrali formulae $\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ ponatur $x = \frac{y-1}{y+1}$, habebitur

$$1+x = \frac{2y}{y+1} \text{ et } \sqrt[3]{(1-x^3)} = \frac{\sqrt[3]{2(1+3yy)}}{y+1}.$$

Cum

Cum vero differentiando ſit $\partial x = \frac{2\partial y}{(y+1)^2}$, facta ſubſtitutione reſultabit

$$\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{\partial y}{y\sqrt[3]{2}(1+3yy)},$$

id quod manifeſto eſt integrabile, nam ponendo ulterius $\sqrt[3]{(1+3yy)} = z$ evadit formula rationalis

$$\frac{\partial y}{y\sqrt[3]{2}(1+3yy)} = \frac{\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}z\partial z}{z^3-1},$$

cuius adeo integratio eſt in poteſtate.

§. 3. Formula $\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ ſi multiplicetur ſupra et infra per $1-x+xx$ prodibit

$$\frac{\partial x}{(1+x)\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \frac{x\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}}$$

$$+ \frac{xx\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}}.$$

Hinc ſequitur integrabilem quoque eſſe formulam

$$\frac{x\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}}.$$

Si fiat uſus ſubſtitutionis ſupra adhibitae, deducimur ad binas formulas, quarum quaelibet peculiarem requirit evolutionem, una vero operatione integrale illius obtinebitur ponendo

nendo $\frac{1+x^3}{1-x^3}=y$; prodit enim $x^3=\frac{y-1}{y+1}$. Hinc $1-x^3=\frac{2}{y+1}$ et $1+x^3=\frac{2y}{y+1}$. Differentiando autem oritur $3xx\partial x=\frac{2\partial y}{(y+1)^2}$ adeoque

$$x\partial x=\frac{\frac{2}{3}\partial y\sqrt[3]{(y+1)}}{(y+1)^2\sqrt[3]{(y-1)}} \text{ et}$$

$$\frac{x\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}}=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\partial y}{y\sqrt[3]{(yy-1)}}.$$

Poſito vero $\sqrt[3]{(yy-1)}=z$ reſultabit

$$\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\partial y}{y\sqrt[3]{(yy-1)}}=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}z\partial z}{1+z^3}.$$

Vnde patet formulam $\frac{x\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ reddi rationalem ſubſtitutione $x^3=\frac{\sqrt{(1+z^3)}-1}{\sqrt{(1+z^3)}+1}$, atque integrabilem eſſe formulam $\frac{y\partial y}{(2+y^3)\sqrt[3]{(1-y^3)}}$, nam poſito $\sqrt[3]{(1-x^3)}=y$ formula $\frac{x\partial x}{(1+x^3)\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ abit in $\frac{y\partial y}{(2-y^3)\sqrt[3]{(1-y^3)}}$.

§. 4. Formula $\frac{\partial x\sqrt[3]{(1-x^3)}}{1+x}$ adhibita ſubſtitutione $x=\frac{y-1}{y+1}$ abit in $-\frac{\partial y\sqrt[3]{2(1+3yy)}}{y(1+y)^2}$. Iam ponatur ulterius

terius $\sqrt[3]{2(1+3yy)} = z\sqrt[3]{4}$ ut ſit $\sqrt[3]{2(1+3yy)} = 2z$, hinc ſit

$$y = \frac{\sqrt{(4z^3-1)}}{\sqrt{3}}, \text{ et}$$

$$1+y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{(4z^3-1)}}{\sqrt{3}}.$$

Sumendis vero logarithmis et differentiando prodit

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{6zz\partial z}{4z^3-1},$$

ſubſtitutis his valoribus habebitur

$$\frac{\partial y\sqrt[3]{2(1+3yy)}}{y(1+y)^2} = \frac{36z^3\partial z}{(4z^3-1)[\sqrt{3}+\sqrt{(4z^3-1)}]^2}.$$

Multiplicetur iam formula modo inventa in

$$[\sqrt{3}-\sqrt{(4z^3-1)}]^2 = 2+4z^3-2\sqrt{3}(4z^3-1),$$

obtinebitur

$$\frac{36z^3\partial z}{(4z^3-1)[\sqrt{3}+\sqrt{(4z^3-1)}]^2} = \frac{9z^3\partial z(1+2z^3)}{2(4z^3-1)(1-z^3)^2}$$

$$-\frac{9z^3\partial z\sqrt{3}}{2(1-z^3)^2\sqrt{(4z^3-1)}}.$$

Vbi cum primum membrum ſit rationale, integrale illius eſt in poteſtate; pro altero vero membro integrando ponatur $z^3 = 1-3v+3vv$, unde ſit:

$$1-z^3 = 3v(1-v)$$

$$\sqrt{(4z^3-1)} = (1-2v)\sqrt{3}$$

nec non

$$zz\partial z = -\partial v(1-2v),$$

facta

facta ſubſtitutione oritur

$$-\frac{9z^3\partial z\sqrt{3}}{2(1-z^3)^2\sqrt{(4z^3-1)}}=-\frac{\frac{1}{2}\partial v\sqrt[3]{(1-3v+3vv)}}{vv(1-v)^2}.$$

Fiat iam $v=\frac{1}{1+u}$, et habebitur $1-v=\frac{u}{1+u}$ et $1-3v+3vv=\frac{1-u+uu}{(1+u)^2}$, nec non $\partial v=-\frac{\partial u}{(1+u)^2}$. Quam ob rem obtinebitur:

$$-\frac{\frac{1}{2}\partial v\sqrt[3]{(1-3v+3vv)}}{vv(1-v)^2}=\frac{\frac{1}{2}\partial u(1+u)\sqrt[3]{(1+u^3)}}{uu}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\partial u\sqrt[3]{(1+u^3)}}{uu}+\frac{\frac{1}{2}\partial u\sqrt[3]{(1+u^3)}}{u}.$$

Horum membrorum poſterius manifeſto eſt integrabile, prius vero evadit integrabile ponendo $u=\frac{1}{r}$.

§. 5. Formula $\frac{\partial x\sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x}$, ſi multiplicetur ſupra et infra per $1+x+xx$, prodibit

$$\frac{\partial x\sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x}=\frac{\partial x\sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x^3}+\frac{x\partial x\sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x^3}$$

$$+\frac{xx\partial x\sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x^3}.$$

Vbi cum poſtremum membrum ſit integrabile, reſtant integranda bina reliqua membra, integrale prioris perficitur ſubſtitutione $x=\frac{1-y}{1+y}$, prodit enim

$$\frac{\partial x \sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x^3} = -\frac{\partial y \sqrt[3]{2(1+3yy)}}{y(3+yy)}.$$

Dein ponendo $\sqrt[3]{2(1+3yy)} = z\sqrt[3]{4}$ habebitur

$$-\frac{\partial y \sqrt[3]{2(1+3yy)}}{y(3+yy)} = -\frac{9z^3 \partial z \sqrt[3]{4}}{2(2z^3-1)(4+z^3)}.$$

Sequitur hinc formulam $\frac{\partial x \sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x^3}$ reddi rationalem ſubſtitutione $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{(2z^3-1)}}{\sqrt{3}+\sqrt{(2z^3-1)}}$.

§. 6. Integrale membri $\frac{x\partial x \sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x^3}$ variis modis erui poterit, et quidem ope ſubſtitutionis $x^3 = \frac{1-y}{1+y}$ reperitur

$$\frac{x\partial x \sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x^3} = -\frac{\frac{2}{3}\partial y \sqrt[3]{2}}{y(1+y)\sqrt[3]{(1-y)}}.$$

Quam ob rem poſito $\sqrt[3]{(1-y)} = z$ obtinebitur

$$-\frac{\frac{2}{3}\partial y \sqrt[3]{2}}{y(1+y)\sqrt[3]{(1-y)}} = \frac{zz\partial z\sqrt[3]{2}}{(1-z^3)(2-z^3)}.$$

Ponendo autem $\sqrt[3]{(1+x^3)} = \frac{1}{z}$ oritur

$$\frac{x\partial x\sqrt[3]{1+x^3}}{1-x^3} = -\frac{\partial z}{z(2z^3-1)\sqrt[3]{(1-z^3)}},$$

id

id quod diſcerptum in partes dat

$$-\frac{\partial z}{z(2z^3-1)\sqrt[3]{(1-z^3)}}=\frac{\partial z}{z\sqrt[3]{(1-z^3)}}-\frac{2zz\partial z}{(2z^3-1)\sqrt[3]{(1-z^3)}},$$

quarum quaelibet manifeſto eſt integrabilis.

§. 7. Quanquam hoc modo procedendi trium formularum integralia evolvi debeant, facilius tamen ad integrale formulae $\frac{\partial x\sqrt[3]{(1+x^3)}}{1-x}$ pertingere licebit, ac modo in §. 4. expoſito.

 DE

DE MINIMIS QVIBVSDAM GEOMETRICIS OPE PRINCIPII STATICI INVENTIS.

Auctore
NICOLAO FUSS.

Conventui exhibuit die 25 Febr. 1796.

§. 1.

Inter problemata circa duas pluresve lineas, e punctis datis ad commune quoddam punctum incognitum ita ducendas, ut vel linearum ipſarum, vel earum multiplorum quorumvis ſumma evadat minima, eiusmodi occurrunt, in quibus ſolvendis fruſtra deſudaret, qui methodum vulgarem Maximorum et Minimorum, calculo differentiali innixam, adhibere conaretur; praecipue ſi, ut haud raro evenit, ipſa ſumma Minimum reddenda altioris fuerit indaginis, formulave intricatiore expreſſa. Huiusmodi autem problemata plerumque, absque determinatione ſummae Minimum efficiendae, eiusque differentiatione, beneficio idonei principii, ex ipſa Geometria in ſcientias phyſico-mathematicas translati, facile reſolvi poſſunt. Huc, verbi gratia, referenda ſunt bina problemata olim a Hoſpitalio, in eius Analyſi

nalyſi Infinite-parvorum tractata; de ſumma nimirum minima rectarum e datis duobus punctis ad punctum in peripheria circuli, tam magnitudine quam poſitione dati, ducendarum; nec non de via breviſſima qua viator ex puncto in planitie ad aliud punctum in campo ſcabroſo ſitum, pervenire queat, quorum illud ope principii catoptrici notiſſimi, hoc vero ope principii dioptrici ſatis commode reſolvi poteſt. His adnumeranda quoque ſunt problemata de lineis ex angulis trianguli, aliusve polygoni ad punctum quoddam in eius ſuperficie ita ducendis, ut vel ipſae, vel earum Multipla, utcunque diverſa, ſummam minimam efficiant, quibus ſolvendis principium notiſſimum ex Statica deſumtum inſervire poteſt. Haec poſtrema problemata, una cum prioribus generaliori modo propoſitis, hic coniunctim tractare omniaque ope unius eiusdemque principii reſolvere conſtitui. Principium nempe, cuius ſubſidio hoc praeſtare licebit, eſt ſequens: Quotcunque vires α, β, γ, δ, etc., in directionibus AO, BO, CO, DO, etc. agentes, puncto O fuerint applicatae, hae vires erunt in aequilibrio, quando minima fuerit haec quantitas:

$$\alpha . AO + \beta . BO + \gamma . CO + \delta . DO + \text{etc.}$$

Problema primum.

§. 2. *In data recta MN invenire punctum O, ad quod, ſi e datis punctis A et B agantur rectae AO BO, ſit* $\alpha . AO + \beta . BO$ *Minimum, denotantibus* α *et* β *numeros datos.* Tab. II. Fig. 1.

Solutio.

Spectentur α et β ut vires puncto O ſecundum directiones AO et BO applicatae, linea MN vero ut ſectio

plani

plani ad planum tabulae normalis, cui punctum O ut firmo obſtaculo adiaceat, atque ex Staticis conſtat, corpuſculum O in eo rectae M N puncto a potentiis α et β in quiete teneri, ubi fuerit coſ. A O M : coſ. B O N $= \beta : \alpha$; tum autem ex natura aequilibrii fore $\alpha.$ A O $+ \beta.$ B O Minimum.

His poſitis, ſi e punctis A et B in rectam M N demittantur perpendicula A P et B Q, voceturque A P $= a$, B Q $= b$, P Q $= c$ et P O $= x$, erit Q O $= c - x$, A O $= \surd (a a + x x)$, B O $= \surd (b b + (c - x)^2$, ideoque

$$\text{coſ. A O M} = \frac{x}{\surd (a a + x x)} \text{ et}$$

$$\text{coſ. B O N} = \frac{c - x}{\surd [b b + (c - x)]^2}.$$

Cum igitur eſſe debeat

$$\frac{\alpha x}{\surd (a a + x x)} = \frac{\beta (c - x)}{\surd [b b + (c - x)^2]},$$

haec aequatio ad rationalitatem perducta et ordinata ſequentem induet formam:

$$\left.\begin{array}{l} + \beta\beta x^4 - 2\beta\beta c x^3 + \beta\beta a a x x - 2\beta\beta a a c x + \beta\beta a a c c \\ - \alpha\alpha x^4 + 2\alpha\alpha c x^3 + \beta\beta c c x x \\ \qquad\qquad\qquad - \alpha\alpha b b x x \\ \qquad\qquad\qquad - \alpha\alpha c c x x \end{array}\right\} = 0.$$

Aequationem igitur nacti ſumus quarti gradus, cuius una radix dabit punctum quaeſitum O. Quid reliquae eius radices ſignificent infra videbimus.

Corollarium 1.

§. 3. Ponatur $\beta = \alpha$, et aequatio noſtra ad ſequentem formam reducitur:

$$(a a - b b) x x - 2 a a c x + a a c c = 0,$$

unde

unde duplex ſolutio naſcitur. Huic enim aequationi ſatisfacit tam valor $x = \frac{ac}{a+b}$, quam valor $x = \frac{ac}{a-b}$, quorum ille dat punctum O, in quo ſumma rectarum AO et BO eſt minima; alter vero illud punctum O indicat, ubi differentia rectarum AO et BO eſt maxima.

Corollarium 2.

§. 4. Quodſi igitur $AO + BO$ debeat eſſe Minimum, ſequenti modo punctum O geometrice conſtruitur: Ex punctis datis A et B in rectam MN demittantur perpendicula AP et BQ. In priore producto capiatur $AD = BQ$, ductaque recta DQ, ei per A parallela agatur recta AO, eritque O punctum quaeſitum. In omni enim alio puncto, veluti O, erit $AO' + BO' > AO + BO$. Namque productis rectis AO et BQ ad concurſum usque in G, ob $GQ = BQ$ erit $BO' = GO$, ergo $AO' + BO' = AO' + GO' > AG$. At vero eſt $AG = AO + BO$, conſequenter Tab. II. Fig. 2.

$$AO' + BO' > AO + BO.$$

Corollarium 3.

§. 5. Sin autem $AO - BO$ debeat eſſe Maximum, puncto A infra rectam MN accepto; (ſi enim ambo puncta A & B ad eandem partem rectae MN capiantur, punctum O manifeſto eſt in interſectione rectae MN, cum recta AB producta) conſtructio geometrica puncti O ita ſe habet: Demiſſis ex A et B in rectam MN perpendiculis AP et BQ, ſuper AP capiatur $AD = BQ$, ductaque recta DQ ei parallela agatur recta AO, erit O punctum quaeſitum. In quolibet enim alio puncto, puta O', certe erit $AO' - BO' < AO - BO$. Nam producta BQ usque ad AO in Fig. 3.

E,

E, erit $BQ = EQ$, ideoque $BO = EO$ et $BO' = EO'$, hincque $AO - BO = AE$. Eſt vero $AE + EO' > AO'$ ergo $AO' - BO' < AO - BO$.

Corollarium 4.

§. 6. Sint ambo puncta A et B in eadem recta ad MN normali, ita vt $c = 0$, et aequatio generalis §^i 2. hoc hoc caſu fiet

$$(\beta\beta - \alpha\alpha)x^4 + (\beta\beta aa - \alpha\alpha bb)x^2 = 0,$$

cuius quatuor radices ſunt

1. $x = 0$
2. $x = 0$
3. $x = +\sqrt{\frac{\alpha\alpha bb - \beta\beta aa}{\beta\beta - \alpha\alpha}}$
4. $x = -\sqrt{\frac{\alpha\alpha bb - \beta\beta aa}{\beta\beta - \alpha\alpha}}$.

Harum radicum prima eſt pro ſumma multiplorum $\alpha . AO$ et $\beta . BO$ minima; ſecunda vero pro eorum differentia aut minima aut maxima. Minima ſcilicet erit, quando a terminis $x = \pm\infty$, ubi haec differentia eſt infinita, ea continuo decreſcit, usque ad $x = 0$, quod evenit, dum tertia et quarta radix fiunt imaginariae, hoc eſt, quoties caſu $\beta > \alpha$ fuerit $b < \frac{\beta a}{\alpha}$, et quoties caſu $\beta < \alpha$ fuerit $b > \frac{\beta a}{\alpha}$. Maxima autem erit haec differentia inter $\alpha . AO$ et $\beta . BO$, in puncto $x = 0$: 1°) quoties tertia et quarta radix fuerint reales; tum enim utrinque ad diſtantiam $x = \sqrt{\frac{\alpha\alpha bb - \beta\beta aa}{\beta\beta - \alpha\alpha}}$ dabitur punctum, ubi differentia, decreſcens ab $x = \pm\infty$, denuo creſcere incipit usque ad $x = 0$, ita ut in his punctis, ubi $x = \pm\sqrt{\frac{\alpha\alpha bb - \beta\beta aa}{\beta\beta - \alpha\alpha}}$, fit minima; 2°) differentia quoque erit maxima in puncto $x = 0$, etiamſi tertia et quarta radix fuerint imaginariae, quando intra terminos

$x = 0$

$x = 0$ et $x = +\infty$, dantur puncta, ubi ſit $\alpha . AO = \beta . BO$, quod evenit quando $x = +\sqrt{\frac{\alpha\alpha aa - \beta\beta bb}{\beta\beta - \alpha\alpha}}$ fuerit quantitas realis; id autem eſſe nequit, niſi tertia et quarta radix fuerint imaginariae.

Scholion 1.

§. 7. Ex caſu ſpeciali, quem modo tractavimus, facile perſpicitur, quid ſignificent quatuor radices noſtrae aequationis generalis §. 1. exhibitae. Si enim omnes fuerint reales, una dabit punctum rectae MN, in quo ſumma Multiplorum $\alpha . AO$ et $\beta . BO$ eſt minima; ſecunda id punctum indicabit, ubi differentia eorundem eſt maxima; duae reliquae vero dabunt differentiam minimam. Sin autem hae poſtremae radices fuerint imaginariae, inquirendum eſt, utrum dentur puncta in recta MN, ubi $\alpha . AO = \beta . BO$, hoc eſt

$$\alpha \sqrt{(aa + xx)} = \beta \sqrt{[bb + (c - x)^2]}.$$

Talia autem puncta reperientur, quoties

$$x = \frac{\beta\beta c \pm \sqrt{[\alpha\alpha\beta\beta(aa + bb + cc) - \alpha^4 aa - \beta^4 bb]}}{\beta\beta - \alpha\alpha},$$

fuerit quantitas realis; tum autem binarum radicum realium noſtrae aequationis generalis altera erit pro ſumma minima, altera vero pro differentia maxima. Quod ſi vero talia puncta non dentur, ubi $\alpha . AO = \beta . BO$, uti evenit, quoties

$$cc < \left(\frac{\alpha\alpha}{\beta\beta} - 1\right) aa + \left(\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} - 1\right) bb,$$

tum una ex binis radicibus erit pro ſumma minima, altera vero pro differentia minima. Singulos hos caſus diverſos exemplo numerico illuſtrabimus:

 Ex-

Exemplum 1.

§. 8. Sit $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $a = 5$, $b = 15$ et $c = 1$, eritque aequatio reſolvenda

$$x^4 - 2x^3 - 134x^2 - 90x + 45 = 0,$$

quae habet omnes quatuor radices reales; erit ſcilicet

$1^a.\ x = +0,334$, pro ſumma minima;

$2^a.\ x = -1,024$, pro differentia maxima;

$\left.\begin{array}{l} 3^a.\ x = +12,904 \\ 4^a.\ x = -10,214 \end{array}\right\}$ pro differentia minima.

Exemplum 2.

§. 9. Sit $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$; et aequatio reſolvenda eſt haec:

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 32x + 48 = 0,$$

quae duas tantum habet radices reales, ſcilicet $x = 2,570$ et $x = 3,480$ proxime, quarum prima dat punctum in recta MN, ubi ſumma AO + 2 BO eſt minima, ſecunda vero punctum indicat, ubi differentia AO − 2 BO eſt maxima. Ad diſtantiam enim $x = 2$ et $x = 6$ reperiuntur puncta, ubi differentia haec evaneſcit.

Exemplum 3.

§. 10. Sit $\alpha = 2$, $\beta = 1$, manentibus $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, prodibitque haec aequatio:

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 8x - 12 = 0,$$

quae etiam duas tantum habet radices reales $x = +1$ et $x = -1,11169$, quarum illa dat ſummam 2. AO + BO minimam, haec vero differentiam 2 AO − BO minimam.

Quia

Quia enim hoc caſu

$$cc < \left(\frac{\alpha\alpha}{\beta\beta} - 1\right) aa + \left(\frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} - 1\right) bb,$$

nulla dantur puncta, ubi haec differentia evaneſcit.

Scholion 2.

§. 11. Differentiae Maximum Minimumque ideo in ſolutione noſtra continetur, quia pro ea, aeque ac pro ſumma minima, fit Tab. II. Fig. 4.

$$\text{coſ. } AOM^2 : \text{coſ } BON^2 = \beta^2 : \alpha^2.$$

Sit enim O hoc punctum, ubi $\alpha . AO - \beta . BO$ ſit Maximum aut Minimum, et punctum o ei ſit proximum, atque ex natura Maximorum et Minimorum conſtat fore

$$\alpha . AO - \beta . BO = \alpha . Ao - \beta . Bo.$$

Demiſſis iam ex o in AO et BO perpendiculis op et oq, ob $Ao = AO - pO$ et $Bo = BO - qO$, habebimus

$$\alpha AO - \beta . BO = \alpha . AO - \alpha . pO - \beta . BO + \beta . qO,$$

unde ſequitur fore $\alpha . pO = \beta . qO$, hinc $\alpha . \frac{pO}{oO} = \beta . \frac{qO}{oO}$, ſive

$$\alpha \text{ coſ } AOM = \beta \text{ coſ. } BOM \text{ et}$$

$$\alpha\alpha \text{ coſ. } AOM^2 = \beta\beta \text{ coſ. } BON^2,$$

ex qua ipſa aequalitate ſolutionem noſtri problematis deduximus.

Problema ſecundum.

§. 12. *In peripheria circuli, tam magnitudine quam poſitione dati, invenire punctum O, ad quod ſi e punctis datis A et B ducantur rectae AO et BO, minimum ſit* $\alpha . AO + \beta . BO$, *denotantibus* α *et* β *numeros datos.* Fig. 5.

Solu-

Solutio.

Spectetur punctum O ut corpuſculum obſtaculo circulari adjacens, α et β vero ut potentiae huic puncto applicatae in directionibus AO et BO, ductaque ſi concipiatur recta MN circulum tangens in O, ex eodem principio ſtatico ſupra §. 2. adhibito ſequitur, corpuſculum in eo circuli puncto O in quiete teneri, ubi coſ. AOM : coſ BON $= \beta : \alpha$; tum autem futurum eſſe $\alpha . AO + \beta . BO$ Minimum.

Quod ſi igitur ex centro circuli C agantur rectae CA, CB, CO, in poſtremam vero productam ex A et B demittantur perpendicula AP et BQ, fieri debebit $\beta : \alpha = \frac{AP}{AO} : \frac{BQ}{BO}$, unde ſequitur

$$\beta . BQ . AO = \alpha . AP . BO.$$

Vocetur $CA = a$, $CB = b$, $CO = r$, tum vero angulus $ACO = \lambda - \omega$ et $BCO = \lambda + \omega$, ita ut angulus $ACB = 2\lambda$ datus; eritque

$$BQ = b \text{ ſin.} (\lambda + \omega);$$
$$AP = a \text{ ſin.} (\lambda - \omega);$$
$$AO = \sqrt{[aa - 2ar \text{ coſ.} (\lambda - \omega) + rr]};$$
$$BO = \sqrt{[bb - 2br \text{ coſ.} (\lambda + \omega) + rr]};$$

unde haec prodit aequatio unicam incognitam ω complectens:

$$\left\{ \begin{array}{l} + \beta\beta bb \text{ ſin.} (\lambda + \omega)^2 [aa - 2ar \text{ coſ.} (\lambda - \omega) + rr] \\ - \alpha\alpha aa \text{ ſin.} (\lambda - \omega)^2 [bb - 2br \text{ coſ.} (\lambda + \omega) + rr] \end{array} \right\} = 0,$$

qua ſolutio noſtri problematis continetur.

Corol-

Corollarium 1.

§. 13. Sint puncta data A et B in eodem radio circuli ultra peripheriam producto, ita ut $\lambda = 0$, eritque aequatio noſtra, per ſin. ω^2 diviſa:

$$\beta\beta bb\,(aa - ar\,\text{coſ.}\,\omega + rr) = \alpha\alpha\,aa\,(bb - 2br\,\text{coſ.}\,\omega + rr),$$

ex qua ſequitur fore:

$$\text{coſ.}\,\omega = \frac{\beta\beta bb\,(aa + rr) - \alpha\alpha\,aa\,(bb + rr)}{2abr\,(\beta\beta b - \alpha\alpha a)},$$

quae expreſſio, niſi fuerit unitate maior, ideoque coſinus imaginarius, duos praebebit valores anguli ω, puta $\omega = +\delta$ et $\omega = -\delta$, quorum uterque dat differentiam ipſorum α. A O et β. B O minimam. Quoniam autem aequationem per ſin. ω^2 diviſimus, fit quoque $\omega = 0$ et $\omega = 180^\circ$ pro ſumma minima et maxima, itemque $\omega = 0$ et $\omega = 180^\circ$ pro binis Maximis differentiae. Quodſi autem coſ. ω prodierit imaginarius, dari poterunt in circuli dati peripheria duo puncta, ubi α. A O $= \beta$. B O, quod ſcilicet evenit, quoties fuerit

$$\text{coſ.}\,\omega = \frac{\beta\beta\,(bb + rr) - \alpha\alpha\,(aa + rr)}{2r\,(\beta\beta b - \alpha\alpha a)} < 1.$$

Quando autem etiam huiusmodi puncta non dantur, tum valores $\omega = 0$ et $\omega = 180^\circ$, qui praebent duo Maxima differentiae, vel quoties adeſt angulus $\omega = \pm\delta$, vel quoties α. A O $= \beta$. B O, nunc dabunt alter differentiam minimam, alter vero maximam.

Corollarium 2.

§. 14. Sint puncta data A et B in eodem circuli diametro ex utraque parte producta, ita ut $\lambda = 90^\circ$, eritque aequatio noſtra, per coſ. ω^2 diviſa,

$\beta\,\beta$

$$\beta\beta bb(aa - 2ar\,\text{ſin.}\,\omega + rr) = \alpha\alpha aa\,(bb + 2br\,\text{coſ.}\,\omega + rr)$$

unde nanciſcimur

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{\beta\beta bb(aa+rr) - \alpha\alpha aa(bb+rr)}{2abr(\beta\beta b + \alpha\alpha a)},$$

qui valor nisi fuerit unitate maior, ſemper dabit duos angulos, ſcilicet $\omega = \delta$ et $\omega = 180^\circ - \delta$, ambos pro ſumma maxima. Quoniam vero aequationem per coſ. ω dividimus, erit quoque $\omega = 90^\circ$ et $\omega = 270^\circ$, pro Minimo ſummae inter illa Maxima, itemque $\omega = 90^\circ$ et $\omega = 270^\circ$, pro Maximo differentiae inter bina puncta, in noſtra ſolutione non contenta, ubi differentia eſt nulla, ideoque

$$\text{ſin.}\,\omega = \frac{\alpha\alpha(aa+rr) - \beta\beta(bb+rr)}{2r(\beta\beta b + \alpha\alpha a)},$$

ſi talia dentur, ſin minus, angulorum 90° et 270° unus dabit differentiam minimam, alter maximam. Quod ſi etiam angulus δ prodierit imaginarius, angulorum 90° et 270° unus dabit ſummam minimam, alter vero ſummam maximam.

Problema ſpeciale

Tab. II. Fig. 5. §. 15. *In peripheria circuli tam magnitudine quam poſitione dati invenire punctum O, ad quod ſi e punctis datis A et B ducantur rectae AO et BO, earum ſumma ſit omnium minima.*

Solutio.

Quoniam hic eſt $\beta = \alpha = 1$, ex problemate generali §. 10. tractato ſequitur fore $\frac{AP}{AO} = \frac{BQ}{BO}$, ideoque etiam $\frac{AP}{PO} = \frac{BQ}{QO}$. Hinc, ſervatis denominationibus ſupra adhibitis, reſultat iſta aequatio:

$$\frac{a\,\text{ſin.}\,(\lambda - \omega)}{a\,\text{coſ.}\,(\lambda - \omega) - r} = \frac{b\,\text{ſin.}\,(\lambda + \omega)}{b\,\text{coſ.}\,(\lambda + \omega) - r}$$

quae,

quae, ſublatis fractionibus, reductisque reducendis, ſequentem formam induit:

$$a\, b \text{ ſin. } 2\, \omega = b\, r \text{ ſin. } (\lambda + \omega) - a\, r \text{ ſin. } (\lambda - \omega).$$

Hinc, ſi brevitatis gratia ponatur

$$\text{A} = \frac{r\,(b - a)\text{ ſin. }\lambda}{2\,a\,b};$$

$$\text{B} = \frac{r\,(b - a)\text{ coſ. }\lambda}{2\,a\,b};$$

aequatio ad ſequentem formam reducitur:

$$\text{ſin. } \omega \text{ coſ. } \omega = \text{A coſ. } \omega + \text{B ſin. } \omega$$

ita ut, ſi per coſ. ω dividamus, prodeat

$$\text{ſin. } \omega = \text{A} + \text{B tang. } \omega$$

ex qua aequatione, perquam ſimplici, quovis caſu angulum ω problemati ſatisfacientem commodiſſime definire licebit.

Scholion.

§. 16. Quod ſi autem deſideretur aequatio ſolum ſinum eiusque poteſtates complectens, poſito ſin. $\omega = x$ orietur ſequens aequatio quarti gradus:

$$x^4 - 2\,\text{A}\,x^3 + (\text{A A} + \text{B B} - 1)\,x^2 + 2\,\text{A}\,x - \text{A A} = 0,$$

cuius quatuor radices, ſi omnes fuerint reales, quatuor in peripheria circuli puncta indicabunt, ad quorum quodlibet ſi ducantur rectae e punctis datis A et B, eae aequaliter ad tangentem inclinabuntur. Horum autem quatuor punctorum id ſummam rectarum ex A et B ductarum minimam efficit, cuius radius intra angulum A C B cadit; illud vero, cuius radius, ultra centrum productus, intra angulum A C B cadit, dabit ſummam rectarum A O et B O maximam. De binis reliquis, quorum nec radius ipſe, nec radius productus, intra angulum A C B cadit, manifeſtum eſt

fieri

ſieri differentiam aut pro utroque maximam, aut pro uno maximam et pro altero minimam. Illud ſcilicet evenit, quando perpendiculum per medium rectae A B ductum circulum ſecat; tum enim in utroque puncto interſectionis differentia rectarum ex A et B ductarum evaneſcit. Hoc vero locum habet, quando illud perpendiculum circulum non ſecat.

Corollarium 1.

§. 17. Sint puncta data A et B in eodem circuli radio, ultra peripheriam producto, ita ut $\lambda = 0$, eritque $A = 0$ et $B = \frac{r(b+a)}{2ab}$, tum vero aequatio reſolvenda fiet

$$x^4 + (BB - 1)x^2 = 0,$$

cui ſatisfaciunt valores ſequentes

1°.) $\omega = 0$;

2°.) $\omega = 180°$;

3°.) $\omega = +\text{Arc. coſ.} \frac{r(b+a)}{2ab}$;

4°.) $\omega = -\text{Arc. coſ.} \frac{r(b+a)}{2ab}$;

qui poſtremi erunt imaginarii, quoties fuerit $r > \frac{2ab}{b+a}$.

Corollarium 2.

§. 18. Reperiantur puncta data A & B in eodem diametro circuli utrinque producto, ita ut ſit $\lambda = 90°$, ideoque $A = \frac{r(b-a)}{2ab}$ et $B = 0$, eritque aequatio

$$x^4 - 2Ax^3 + (AA - 1)x^2 + 2Ax - AA = 0,$$

quam ita per factores repraeſentare licet:

$$(x+1)(x-1)(x-A)^2 = 0,$$

cui ergo ſatisfaciunt valores ſequentes:

1°.)

1°.) $\omega = 90°$;
2°.) $\omega = 270°$;
3°.) $\omega = \text{Arc. ſin.} \frac{r(b-a)}{2ab}$;
4°.) $\omega = 180° - \text{Arc. ſin.} \frac{r(b-a)}{2ab}$;

quorum bini poſtremi erunt imaginarii, quoties fuerit $r > \frac{2ab}{b-a}$.

Corollarium 1.

§. 19. Sint puncta data A et B ad eandem a centro diſtantiam, ita ut $b = a$, ac proinde $A = 0$ et $B = \frac{r \operatorname{coſ.} \lambda}{a}$, eritque

$$x^4 + (BB - 1)x^2 = 0,$$

cui aequationi ſatisfaciunt valores

1°.) $\omega = 0$;
2°.) $\omega = 180°$;
3°.) $\omega = + \text{Arc. coſ.} \frac{r \operatorname{coſ.} \lambda}{a}$;
4°.) $\omega = - \text{Arc. coſ.} \frac{r \operatorname{coſ.} \lambda}{a}$,

quorum primus eſt pro ſumma minima; ſecundus pro ſumma maxima; bini reliqui vero pro differentia maxima.

Exemplum.

§. 20. Ponatur $r = 10$, $a = 15$, $b = 25$ et $\lambda = 42°, 30'$, eritque

$$A = \tfrac{2}{15} \text{ ſin. } 42°, 30' = 0,0900787$$
$$B = \tfrac{8}{15} \text{ coſ. } 42°, 30' = 0,3932146$$

Habebimus ergo hanc aequationem:

$$\text{ſin.}\,\omega = 0{,}0900787 + 0{,}3932146.\,\text{tang.}\,\omega,$$

vel etiam ſequentem quarti gradus:

$$x^4 - 0{,}1801574.\,x^3 - 0{,}8372681.\,x^2 + 0{,}1801574.\,x - 0{,}0081142 = 0,$$

exiſtente $x = \text{ſin.}\,\omega$.

His autem aequationibus ſatisfaciunt ſequentes quatuor valores:

1°.) $\text{ſin.}\,\omega = + 0{,}1495545;$
2°.) $\text{ſin.}\,\omega = + 0{,}8994732;$
3°.) $\text{ſin.}\,\omega = + 0{,}0646146;$
4°.) $\text{ſin.}\,\omega = - 0{,}9334884;$

Tab. II. Fig. 6. Biſecto igitur angulo dato A C B recta C D, ſi ducantur rectae C O, C O′, C O″, C O‴, ita ut ſint anguli

D C O = 8°, 36′, 4″;
D C O′ = 64, 5, 20;
D C O″ = 176, 17, 43;
D C O‴ = 68, 59, 7;

tum rectae ex punctis datis A et B ad ſingula haec quatuor puncta O, O′, O″, O‴, ductae aequaliter ad tangentem inclinabuntur, eritque ſumma binarum rectarum ex A et B ductarum minima in O, maxima in O″, differentia vero maxima in O′ et O‴, minima exiſtente in punctis Ω et Ω′, ubi circulus ſecatur a recta ex medio E rectae A B demiſſa.

Pro

Problema tertium.

§. 21. *In triangulo dato ABC invenire punctum O, ita ut ductis ad angulos rectis OA, OB, OC, Minimum ſit $\alpha . OA + \beta . OB + \gamma . OC$, denotantibus α, β, γ, numeros datos.* Tab. III. Fig. 1.

Solutio.

Ex datis α, β, γ conſtruatur triangulum boq, cuius ſcilicet latera ſint $oq = \alpha$, $ob = \beta$, $bq = \gamma$. Producatur latus qo verſus a, et lateri bq parallela agatur recta oc. Super latere A C trianguli dati conſtruatur triangulum iſoſceles A F C, cuius anguli ad baſin ſint Tab. III. Fig. 2. Fig. 1.

$$FAC = FCA = aoc - 90°;$$

et ſuper latere A B eiusdem trianguli conſtruatur triangulum iſoſceles A G B, cuius anguli ad baſin ſint

$$GAB = GBA = aob - 90°.$$

Centris F et G, radiis F A et G A deſcribantur arcus circulares A O C et A O B. Ex eorum communi interſectione O agantur rectae O A, O B, O C, eritque $\alpha . OA + \beta . OB + \gamma . OC$ Minimum, uti requiritur.

Demonſtratio.

Cum fecerimus angulos

$$FAC = FCA = aoc - 90°,$$
$$GAB = GBA = aob - 90°,$$

hinc ſequitur fore

$$aoc = AOC;$$
$$aob = AOB;$$
$$boc = BOC.$$

 In

In triangulo $b\,o\,q$ autem eſt

$\alpha : \beta =$ ſin. $o\,b\,q$: ſin. $o\,q\,b$;

$\beta : \gamma =$ ſin. $o\,q\,b$: ſin. $b\,o\,q$;

$\gamma : \alpha =$ ſin. $b\,o\,q$: ſin. $o\,b\,q$.

Producto autem latere $b\,o$ verſus r, manifeſtum eſt fore

ſin. $o\,b\,q =$ ſin. $r\,o\,c =$ ſin. $b\,o\,c$;

ſin. $o\,q\,b =$ ſin. $c\,o\,q =$ ſin. $a\,o\,c$;

ſin. $b\,o\,q =$ ſin. $a\,o\,r =$ ſin. $a\,o\,b$;

conſequenter habebimus:

$\alpha : \beta =$ ſin. B O C : ſin. A O C;

$\beta : \gamma =$ ſin. A O C : ſin. A O B;

$\gamma : \alpha =$ ſin. A O B : ſin. B O C.

Ex Staticis autem conſtat, ſi α, β, γ, denotent potentias, puncto O applicatas, ſecundum directiones O A, O B, O C; ternas illas vires fore in aequilibrio, quoties proportiones illae locum habent; tum autem, uti ex natura momentorum conſtat, α. O A + β. O B + γ. O C erit Minimum.

Problema ſpeciale.

§. 22. *In triangulo dato A B C invenire punctum O, ad quod ſi ex angulis ducantur rectae A O, B O, C O, earum ſumma ſit omnium minima.*

Solutio.

Ex problemate generali perſpicitur, ob $\alpha = \beta = \gamma = 1$ hoc caſu fore triangulum $b\,o\,q$ aequilaterum, ideoque angulos $a\,o\,c$, $b\,o\,c$ et $a\,o\,b$ aequales; unde ſequitur, punctum quaeſitum O ita eſſe collocandum, ut anguli A O C, A O B,

A O B, B O C ſiant aequales. Super lateribus igitur A B et A C trianguli dati conſtruantur triangula aequilatera A D B, A E C, iisque circumſcribantur circuli, et punctum interſectionis O horum circulorum erit punctum quaeſitum. Nam anguli Tab. III. Fig. 3.

$$A O C = 180^\circ - E = 120^\circ,$$
$$A O B = 180^\circ - D = 120^\circ,$$

conſequenter anguli A O C, A O B, B O C inter ſe erunt aequales.

Scholion.

§. 23. Iſta puncti O poſitio memorabilis commodam nobis aperit viam ad determinandas ipſas rectas O A, O B, O C, per ſola latera data trianguli. Sit enim $B C = a$, $A C = b$, $A B = c$; tum vero $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, et quoniam anguli ab his rectis in O formati ſunt quisque 120 graduum, ideoque eorum coſinus $= -\frac{1}{2}$, habebimus

$$x x + y y + x y = c c,$$
$$x x + z z + x z = b b,$$
$$y y + z z + y z = a a.$$

Ponatur brevitatis gratia $x + y + z = s$, atque manifeſtum eſt fore:

$$a a - b b = s (y - x),$$
$$b b - c c = s (z - y),$$
$$c c - a a = s (x - z).$$

At vero ex harum aequationum prima et tertia adipiſcimur

$$y = x + \frac{a a - b b}{s},$$
$$z = x + \frac{a a - c c}{s},$$

qui-

quibus valoribus ſubſtitutis prodibit

$$s = x + y + z = 3x + \frac{2aa - bb - cc}{s},$$

unde porro colligitur:

$$x = \tfrac{1}{3}s + \frac{bb + cc - 2aa}{3s},$$

$$y = \tfrac{1}{3}s + \frac{cc + aa - 2bb}{3s},$$

$$z = \tfrac{1}{3}s + \frac{aa + bb - 2cc}{3s}.$$

Pro determinanda incognita s vocetur area trianguli dati A, eritque haec area

$$A = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin. } 60^\circ\,(xy + xz + yz).$$

Colligantur iam in unam ſummam ternae aequationes primariae, atque habebimus

$$aa + bb + cc = 2(xx + yy + zz) + xy + xz + yz.$$

Eſt vero

$$xy + xz + yz = \frac{2A}{\text{ſin. } 60^\circ} = \frac{4A}{\sqrt{3}},$$

conſequenter

$$aa + bb + cc = 2(xx + yy + zz) + \frac{4A}{\sqrt{3}},$$

unde colligitur:

$$xx + yy + zz = \frac{aa + bb + cc}{2} - \frac{2A}{\sqrt{3}}.$$

Huic aequationi addatur ſequens:

$$2(xy + xz + yz) = \frac{8A}{\sqrt{3}},$$

atque prodibit

$$(x + y + z)^2 = ss = \frac{aa + bb + cc}{2} + \frac{6A}{\sqrt{3}},$$

ita ut ſit

$$s = \sqrt{\left(\frac{aa + bb + cc}{2} + 2A\sqrt{3}\right)}.$$

Pro-

Problema quartum.

§. 24. *In dato polygono quocunque A B C D etc. invenire punctum O, ad quod ſi ex angulis ducantur rectae A O, B O, C O, D O, etc. ſit* $\alpha . AO + \beta . BO + \gamma . CO + \delta . DO +$ *etc. minimum, denotantibus* α, β, γ, δ, *etc. numeros rectis A O, B O, C O, D O, etc. reſpective proportionales.* Tab. III. Fig. 4.

Solutio.

Sit A B C D E F G pars perimetri polygoni *n* laterum. Latus quodlibet A B bifariam ſecetur in *c*. Ducatur ex *c* ad angulum ſequentem C recta *c* C, in eaque capiatur intervallum $Cd = \frac{2}{3} Cc$. Ex puncto *d* ad angulum ſequentem D ducatur recta *d* D, in eaque ſumatur $De = \frac{3}{4} Dd$. Ex *e* ad angulum ſequentem E ducatur recta *e* E, in eaque abſcindatur $Ef = \frac{4}{5} Ee$. Ex *f* ad ſequentem angulum F ducatur recta *f* F, ſuper qua capiatur $Fg = \frac{5}{6} Ff$. Ex *g* ad ſequentem angulum G agatur recta *g* G, in eaque ſumatur $Gh = \frac{6}{7} Gg$. Hoc modo continuetur operatio, usque dum perveniatur ad ultimum angulum P, angulum A praecedentem, ductaque ad punctum diviſionis penultimum *p* recta P *p*, ſi in ea capiatur $PO = \frac{n-1}{n} . Pp$, erit O punctum quaeſitum.

Demonſtratio.

Spectentur numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ut potentiae puncto O applicatae, et quoniam hi numeri proportionales ſunt reſpective rectis A O, B O, C O, D O, etc. iſtae rectae ipſas potentias repraeſentabunt. Ex Staticis autem conſtat, rectam P O, ita determinatam, ut conſtructio modo tradita docet, repraeſentare vim cum omnibus reliquis AO, BO, CO, DO, etc. aequilibrium conſtituentem. Pro ſtatu autem aequilibrii

brii ex natura momentorum ſequitur fore

$$\alpha.AO+\beta.BO+\gamma.CO+\delta.DO+\text{etc.}$$

Minimum.

Corollarium 1.

§. 25. In omni triangulo et parallelogrammo punctum O hoc modo determinatum erit ipſum centrum gravitatis figurae, ut per ſe eſt manifeſtum.

Corollarium 2.

Tab. III. Fig. 5. §. 26. Sit polygonum quadrilaterum ABCD. E medio E lateris AB ducatur recta EC, in eaque capiatur $CF = \frac{2}{3}CE$, ductaque recta FD in ea capiatur $DO = \frac{3}{4}DF$, eritque O punctum quaeſitum.

Corollarium 3.

Fig. 6. §. 27. Sit polygonum pentagonum ABCDE. Ex puncto medio F lateris AB agatur recta FC, in eaque capiatur $CG = \frac{2}{3}CF$. Ex G ducatur recta GD, in eaque capiatur $DH = \frac{3}{4}DG$. Ex H ducatur recta HE, in eaque ſumatur $EO = \frac{4}{5}EH$, eritque O punctum quaeſitum.

Problema quintum.

§. 28. *In polygono quocunque ABCD etc. invenire punctum, ad quod ſi ex angulis ducantur rectae AO, BO,* Fig. 4. *CO, DO, etc. ſumma quadratorum harum rectarum ſit omnium minima.*

Solutio.

Quaeratur, ut ſupra §. 24, punctum O, ita ut $\alpha.AO + \beta.BO + \gamma.CO + \delta.DO +$ etc. ſit Minimum; et cum

α, β,

α, β, γ, δ, etc. ſint numeri rectis A O, B O, C O, D O, etc. proportionales, hoc eſt, quisque ad unitatem ut recta ei reſpondens ad datam rectam M N, ponatur $\alpha = \frac{AO}{MN}$, $\beta = \frac{BO}{MN}$, $\gamma = \frac{CO}{MN}$, etc. Minimumque etiam evadet haec expreſſio:

$$\frac{AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 \text{ etc.}}{MN}$$

hoc eſt ſumma quadratorum rectarum ex puncto O ad angulos polygoni ductarum minima.

Corollarium 1.

§. 29. Pro triangulo igitur A B C, biſecto latere A B in D, ductaque recta D C, ſi in ea capiatur $CO = \frac{2}{3} CD$, erit O punctum quaeſitum et $AO^2 + BO^2 + CO^2$ Minimum, quod etiam methodus vulgaris declarat. Demiſſo enim ex vertice C in baſin A B perpendiculo C E, e puncto vero quaeſito O demiſſis perpendiculis O P in A B et O Q in C E, vocentur $AB = a$, $AE = f$, $CE = g$, $AP = x$, $PO = y$, eritque $BP = a - x$, $QO = x - f$ et $CQ = g - y$, conſequenter: Tab. IV. Fig. 1.

$$AO^2 = xx + yy;$$
$$BO^2 = (a - x)^2 + yy;$$
$$CO^2 = (x - f)^2 + (g - y)^2.$$

Summa autem horum quadratorum erit

$$3xx + 3yy - 2(a + f)x - 2gy + aa + ff + gg$$

cuius, cum debeat eſſe minima, ſumatur differentiale, prodibitque haec aequatio:

$$\partial x[6x - 2(a + f) + \partial y(6y - 2g)] = 0,$$

cui ſatisfaciunt valores $x = \frac{1}{3}(a + f)$ et $y = \frac{1}{3} g$, ita ut ſit $PO = \frac{1}{3} CE$, ideoque $DO = \frac{1}{3} CD$, ſive $CO = \frac{2}{3} CD$. Tum

 vero

vero erit $EP = x - f = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}f$, hinc $PD = \frac{1}{2}EP = \frac{1}{6}a - \frac{1}{3}f$, ergo $AD = AP + PD = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AB$.

Corollarium 2.

Tab. IV. Fig. 2. §. 30. Pro parallelogrammo ABCD, biſecto latere AB in E, ductaque recta EC, ſi in ea capiatur $CF = \frac{2}{3}CE$, tum vero ducatur FD, in eaque ſumatur $DO = \frac{3}{4}DF$, erit O centrum gravitatis, ſeu interſectio diagonalium. In omni enim parallelogrammo, ſi ducatur diagonalis BD, e medio vero lateris AB recta EO lateri BC parallela, et ad angulum C recta EC, quarum illa diagonalem BD in O, haec vero in F ſecet, manifeſtum eſt fore $\triangle EFB \sim \triangle CFD$, hinc $EF : CF = EB : CD = 1 : 2$. At $\triangle EFO \sim \triangle CFB$, ac proinde $OF : BF = EF : CF = 1 : 2$, unde ſequitur fore $CF = \frac{2}{3}CE$ et $DO = \frac{3}{4}DF$, perinde ut conſtructio habet. Ductis igitur in parallelogrammo diagonalibus ſe mutuo in O decuſſantibus, non ſolum ſumma rectarum AO, BO, CO, DO, eſt omnium minima, ut cuique conſtat, ſed etiam ſumma quadratorum harum rectarum, id quod etiam methodus conſueta probat. Quaeratur enim in parallelogrammo punctum O, ita ut minima ſit ſumma $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$. Demittantur hunc in finem ex angulis D et C in latus AB perpendicula DG et CH, rectam per punctum quaeſitum O lateri AB parallele ductam ſecantibus in I et K, ductaque normali OP vocentur $AB = a$, $AG = BH = f$, $DG = CH = g$, $AP = x$, $PO = y$, erit $BP = a - x$, $IO = x - f$, $KO = a + f - x$, $DI = CK = g - y$, conſequenter

$$AO^2 = xx + yy;$$

$$BO^2 = (a - x)^2 + yy;$$

CO

$$CO^2 = (a + f - x)^2 + (g - y)^2;$$
$$DO^2 = (x - f)^2 + (g - y)^2.$$

Summa igitur horum quadratorum erit

$$4x^2 + 4y^2 - 4(a+f)x - 4gy + 2(a^2 + f^2 + g^2 + af)$$

quae, quia debet eſſe minima, differentietur, prodibitque haec aequatio:

$$\partial x[8x - 4(a+f)] + \partial y(8y - 4g) = 0,$$

cui ſatisfaciunt valores $x = \frac{1}{2}(a+f)$ et $y = \frac{1}{2}g$. Erit igitur $OP = \frac{1}{2}DG$, ergo $EP = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}f$, hinc $AE = AP - EP = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AB$.

Corollarium 3.

§. 31. Pro trapezio ABCD, biſecto latere AB in E, ductaque recta EC, ſi in ea capiatur $CF = \frac{2}{3}CE$; tum vero, ducta recta FD, ſi in ea capiatur $DO = \frac{3}{4}DF$, punctum O erit interſectio rectarum latera oppoſita biſecantium. Producta enim recta DO usque in L, ob triangula EFL et CFD ſimilia et $EF = \frac{1}{2}CF$, erit $FL = \frac{1}{2}DF$ et $EL = \frac{1}{2}CD$, hinc $FL + OF = \frac{1}{2}DF + OF$, hoc eſt $OL = OD$. Demiſſis igitur ex D et O in AB perpendiculis DG et OP, ductaque per O recta MN ipſi AB parallela, erit $OP = DI$, nec non $OP = IG$, ideoque $DI = IG$. Tum vero producta EO usque in R, erit $DR = EL$; at $EL = \frac{1}{2}CD$, ergo $DR = \frac{1}{2}CD$. Sit O punctum quaeſitum, et $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$ Minimum, ponaturque $AB = a$, $AG = b$, $BH = c$, $DG = CH = g$, $AP = x$, $PO = y$, erit Tab. IV. Fig. 3.

$$AO^2 = xx + yy;$$
$$BO^2 = (a - x)^2 + yy;$$

 CO

$$C\,O^2 = (a - c - x)^2 + (g - y)^2;$$
$$D\,O^2 = (x - b)^2 + (g - y)^2.$$

Horum quadratorum ſumma fit

$$4x^2 + 4y^2 - 2(2a + b - c)x - 4gy + 2a^2 + 2g^2 + b^2 + c^2 - 2ac,$$

eiusque differentiale nihilo aequatum

$$8x\partial x + 8y\partial y - 2(2a + b - c)\partial x - 4g\partial y = 0,$$

cui aequationi ſatisfaciunt valores $y = \frac{1}{2}g$ et $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c$. Hinc autem ſequitur fore $OP = \frac{1}{2}DG = DI$, conſequenter $PL = OI = GP = x - b = \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b - \frac{1}{4}c$. At ſi e medio R lateris DC per O ducatur recta RE, erit $EL = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, ergo $EP = EL - PL = \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c$, hincque $AE = x - EP = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AB$. Eſt igitur, ut ſupra, O interſectio rectarum MN et ER latera oppoſita biſecantium.

Scholion.

§. 32. Quodſi autem punctum O in polygono ita fuerit determinandum, ut $\alpha . AO + \beta . BO + \gamma . CO +$ etc. Minimum fiat, denotantibus α, β, γ, etc. numeros quoscunque; tum problema quidem nec geometrice neque analytice commode reſolvere licet, mechanice autem punctum illud O ſequenti modo inveſtigari poterit. Delineato polygono propoſito vel in charta ſpiſſiore, vel in aſſerculo, ſumantur totidem fila, quot polygonum angulos habet, eaque omnia ex una extremitate nodo colligentur. Ex altera vero extremi-
Tab. IV. tate ſingulis filis appenſa ſint pondera, quae inter ſe ratio-
Fig. 4. nem teneant numerorum α, β, γ, δ, etc. Haec fila ſuſtineantur ab acubus *a*, *b*, *c*, *d*, etc. in angulis polygoni A,

B,

B, C, D, etc. fixis, ita ſcilicet, ut acui a incumbat pondusculum α, acui b pondusculum β, acui c pondusculum γ, et ita porro, ſuspenſoque verticaliter afferculo, pondera α, β, γ, etc. in aequilibrium ſeſe component, quo ſtabilito ipſe nodus fila iungens punctum quaeſitum O indicabit, ubi Minimum fit aggregatum $\alpha . AO + \beta . BO + \gamma . CO +$ etc. Si pondera ſumantur aequalia, eodem modo in quolibet polygono inveniri poterit punctum O, ubi ſumma rectarum AO, BO, CO, etc. ſit omnium minima.

SUR

SUR LES PLUS GRANDES PORTÉES DES PIÈCES D'ARTILLERIE eû égard à la réſiſtance de l'air.

Par
M. *KRAFFT.*

Préſenté à l'Académie le 23 Mars 1797.

§. 1.

Il peut bien y avoir des cas dans la pratique de l'Artillerie, qu'il importe de pointer le Canon ou le Mortier ſous un tel degré d'élévation, que le Boulet, lancé avec la même charge de poudre, ſoit porté à la plus grande diſtance poſſible. Dans l'Artillerie ordinaire on démontre par la théorie du mouvement parabolique, que, ſi la réſiſtance de l'air eſt ſuppoſée nulle ou inſenſible, l'angle de la plus grande Portée eſt de 45°, et que, ſous cette ſuppoſition, il eſt conſtamment le même, quelles que ſoient d'ailleurs les conditions du jet. Mais cette regle, vraie pour le Vuide, ne l'eſt pas à beaucoup près dans l'état réel des choſes, dans le quel, comme on le ſçait, l'air oppoſe une ſi grande réſiſtance aux mouvemens tant ſoit peu rapides des Boulets, que même la nature de la Courbe qu'ils

qu'ils y décrivent, en eſt entièrement changée. On n'a encore que de connoiſſances peu préciſes et peu applicables à la pratique, ſur la vraie grandeur de l'angle de la plus grande Portée dans l'air réſiſtant; & quoiqu'il ſoit très-certain, que l'élévation à 45° ne donne dans l'air, en aucun cas, la plus grande Portée, et que l'angle qui la donne, eſt bien variable en raiſon des differens Calibres & des poids des Boulets, de leurs viteſſes de projection & même de la loi de la réſiſtance de l'air: cependant on ſuit ſouvant encore la fauſſe regle, d'élever les Mortiers à 45°, & même de les fondre ſous cet angle avec leurs ſemelles. Ce n'eſt pas que les Mathématiciens n'aient deja fait des recherches ſur ce ſujet; ceux d'entr'eux qui, à ce que je ſache, ont approfondi le plus cette matière, ſont Mr. le Chevalier de Borda, dans les Mémoires de l'Académie de Paris pour l'année 1769, & Mr. le Général de Tempelhoff, dans ſon Bombardier Pruſſien, publié à Berlin l'an 1781; mais quelques ſavantes & ingénieuſes que ſoient les méthodes de ces deux celébres Mathématiciens, on ne ſauroit cependant disconvenir qu'elles laiſſent encore aſſes de choſes à deſirer; car 1°.) pour en faire uſage dans la pratique, il faudroit, à l'aveu même des auteurs, ou récourir au calcul long & embaraſſant des équations générales, ou bien avoir ſous main autant de Tables deja conſtruites, & bien penibles à conſtruire, qu'il y a des eſpèces de Boulets & des viteſſes différentes de projection. 2°.) Si même on accordoit qu'on pourroit ſe contenter des Tables conſtruites pour les charges qui ſont le plus en uſage dans l'Artillerie; ces méthodes ne ſont pourtant pas encore ſuffiſantes, car parmi les queſtions qui ſe préſentent ſur les plus grandes Portées, il y en a de bien intéreſſantes à l'Artillerie, aux quelles

ces

ces méthodes ne s'appliquent du tout, comme ſi, le Boulet & la diſtance du but étant donnés, on demande qu'on détermine & l'élévation du Mortier & la viteſſe du Boulet, pour que cette viteſſe & partant la charge de poudre ſoit la moindre poſſible qui puiſſe lancer le Boulet donné à la Portée donnée.

Mr. de Vitzthum, Officier d'Artillerie de Sa Majeſté Impériale, avantageuſement connu par ſes connoiſſances mécaniques, m'ayant fait voir, il y a quelque tems, en model, un mécanisme qu'il a projetté & préſenté à la ci-devant Chancellerie de l'Artillerie, pour fixer les Mortiers ſous tel degré d'élévation qu'on ſe propoſe: j'en ai pris l'occaſion de faire des recherches pour la détermination de l'angle de la plus grande Portée dans l'air réſiſtant. Ces recherches m'ayant fourni, pour déterminer cet angle ainſi que la plus grande Portée même, & pour réſoudre d'autres Problêmes du même genre, une methode générale, & qui, pour être accommodée à tous les Calibres & à toutes les viteſſes de projection des Boulets, ne demande qu'une ſeule Table, auſſi facile à conſtruire que bien applicable à la pratique de l'Artillerie; j'ai jugé à propos de la préſenter à l'Académie, & c'eſt le but de ce Mémoire.

Élémens du Calcul & Lemmes.

§. 2. Comme le Mémoire préſent ſe rapporte & eſt lié à deux autres ſur le mouvement des projectiles dans un milieu réſiſtant, que j'ai eû l'honneur de préſenter à l'Académie & qui ſe trouvent imprimés dans ſes Actes (*): éta-

(*) Acta Acad. Scient. Imp. Petrop. pro anno 1780. Pars prior pag. 154. et Pars poſterior. pag. 175.

établiſſons que dans celui-ci, comme dans les deux précédans,

M. exprime la maſſe du projectile ou ſon poids dans le Vuide.

P. ſon poids dans l'air.

δ. ſon diamêtre.

c. ſa viteſſe initiale.

h. la hauteur dûe à cette viteſſe.

I. l'angle de projection ou de la direction initiale avec l'horiſon.

R. la réſiſtance qu'éprouve le projectile, mû dans l'air tranquille & uniformement denſe, avec une viteſſe $= u$ dûe à la hauteur $= v$. Cette réſiſtance étant, toutes choſes égales d'ailleurs, proportionelle au quarré de la viteſſe; ſoit

λ. le coëfficiant qui change cette proportionalité en égalité, de ſorte que $R = \lambda . u^2$.

A. le poids de l'air ſous un volume donné.

Π. le poids de l'air ſous un volume égal à celui du projectile, de façon que $P = M - \Pi$.

g. la chute des graves dans la premiere ſeconde, de ſorte que $c = 2\sqrt{(g.h)}$ & $u = 2\sqrt{(g.v)}$.

e. le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$; &

π. le rapport de la péripherie du Cercle à ſon diamétre.

Soit de plus, pour abreger,

$a = \frac{1}{2}$ ſec. I $+ \frac{1}{2}$ cotang. I. log. hyp. tang. $(45° + \frac{1}{2} I)$.

$D = \frac{M}{4 g \lambda} = \frac{P + \Pi}{4 g \lambda} = \frac{P}{4 g \lambda}$, en négligeant, ſi l'on veut, Π vis à vis de P.

$\alpha = \frac{D}{2 a b (coſ. I)^2}$.

Rémarquons ici d'avance, que les methodes connues de déterminer les quantités qui en certains cas paroiſſent indeterminées, donnent ici, pour $I = 0$, $a = 1$; a ſin. $2 I = 0$; a. coſ. $I = 1$ et $\frac{a^2. coſ. I. ſin. 2 I}{1 - a. coſ. I} = \infty$; pour $I = 90°$, $a = \infty$; a. ſin. $2 I = 1$; a. coſ. $I = \frac{1}{2}$ et $\frac{a^2. coſ. I. ſin. 2 I}{1 - a. coſ. I} = 1$. On aura auſſi

$$\frac{\partial a}{\partial I} = \frac{2 (1 - a. coſ. I)}{coſ. I. ſin. 2 I} \text{ et}$$

$$\frac{\partial. a^2 ſin. 2 I}{\partial a} = 2 a. \text{ſin. } 2 I + \frac{a^2 coſ. I. ſin. 2 I. coſ. 2 I}{1 - a. coſ. I}$$

de ſorte, que, ayant poſé $\frac{\partial. a^2 ſin. 2 I}{\partial a} = \Delta$, on aura $\Delta = \infty$ pour $I = 0$, et $\Delta = 1$ pour $I = 90°$.

Hypotheſe pour la réſiſtance de l'air.

§. 3. Les projectiles dont il s'agit ici, étant des corps ſphériques; ſuppoſons d'après le calcul & les expériences de Neuton, que la réſiſtance de l'air ſur un Boulet en mouvement égale le poids d'une colonne d'air, qui auroit pour baſe un grand cercle du Boulet, & pour hauteur la moitié de celle qui eſt dûe à ſa viteſſe; & nous aurons

$$R = \frac{\pi. A. \delta^2 v}{8} = \frac{\pi. A \delta^2 u^2}{32. g}; \text{ donc } \lambda = \frac{\pi. A. \delta^2}{32. g}.$$

Telle ſeroit la valeur de λ, ſi la théorie de Neuton s'accordoit avec les expériences pour des grandes viteſſes auſſi bien, que pour des petites; mais comme les expériences de *Robins* & du Chevalier d'*Arcy* donnent, pour les grandes viteſſes des Boulets, la réſiſtance de l'air deux à trois fois,

fois plus grande que ne la donne la théorie de Neuton; mettons pour plus de généralité $\lambda = \mu . \frac{\pi A \delta^2}{32 . g}$, deſorte que μ deſigne une modification quelconque, que les expériences pourront indiquer à faire, dans la réſiſtance de l'air calculée ſelon l'hypotheſe de Neuton, & que, pour celle-çy, on a $\mu = 1$. Soit donc $\frac{\pi . A}{32 . g} = k$ & $\lambda = \mu . k . \delta^2$. Si l'on ſe ſert de la meſure de Rhin, & que toutes les longueurs ſoient exprimées en pieds, on aura $g = 15,625$ & A deſignera le poids d'un pied cube d'air. Suppoſant donc la péſanteur ſpecifique de l'air $= \frac{1}{850}$; & le poids d'un pied cube d'eau $= 64$ livres, de ſorte que les poids des Boulets ſeront ſuppoſés être donnés en livres dont 64 égalent le poids d'un pied cube d'eau; on a $A = \frac{64}{850}$ & $k = 0,000473087$. Mr. Euler, dans les Mémoires de Berlin, Tome IX, tenant compte des expériences de Mr. Robins, trouve, que, ſi la viteſſe du Boulet ſurpaſſe 1300 pieds par ſeconde, il faut fair $\mu = 3,0615$.

Équation à la Courbe décrite par les projectiles dans l'air.

§. 4. Soit maintenant dans la ligne horiſontale H R, A le point de projection; A K la direction initiale & A M B N C la trajectoire dans l'air réſiſtant. Que le projectile ſe trouve, apres un tems quelconque $= t$, au point M de la Courbe, du quel abaiſſant la verticale M P, poſons les coordonnées rectangles $AP = x$; $PM = y$; l'élément de la Courbe $Mm = \partial s$ & ſon inclinaiſon à l'horizon ou l'angle $mMN = \Phi$, de ſorte que Tab. IV. Fig. 5.

$$\partial x . \text{tang.} \Phi = \partial y \text{ \& } \partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial x}{\text{coſ.} \Phi}.$$

 Cela

Cela étant ſuppoſé, j'ai fait voir dans mon premier Mémoire (*), que, prenant l'élément du tems ∂t pour conſtant,

(*) Voici l'abregè de ce calcul: Soient X & Y les forces qui agiſſent ſur le projectile ſelon les directions des deux coordonnées x et y; on aura

$$\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \frac{X}{M} \quad \& \quad \frac{\partial\partial y}{2g\partial t^2} = \frac{Y}{M}.$$

Or la réſiſtance de l'air R qui agit ſelon la direction de la tangente m M, étant decompoſée donne ſelon x une force $= -$ R. coſ. Φ & ſelon y une force $=$ $-$ R. ſin. Φ. & comme le projectile eſt auſſi ſollicité dans la direction M P par ſon propre Poids $=$ P on a $X = -$ R. coſ. Φ & $Y = -$ P $-$ R. ſin. Φ. Subſtituant ces valeurs & rémarquant que

$$\partial\partial y = \text{tang.}\,\Phi.\,\partial\partial x + \frac{\partial x.\,\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^2}, \text{ on obtient}$$

$$\frac{\partial\partial x}{2g.\,\partial t^2.\,\text{coſ.}\,\Phi} = -\frac{R}{M} \quad \& \quad \frac{\partial x.\,\partial\Phi}{2g.\,\partial t^2.\,\text{coſ.}\,\Phi^2} = -\frac{P}{M},$$

& partant $\frac{\partial\partial x.\,\text{coſ.}\,\Phi}{\partial x.\,\partial\Phi} = \frac{R}{P}$, or puiſque

$$R = \lambda.\,u^2 = \frac{\lambda.\,\partial s^2}{\partial t^2} = \frac{\lambda.\,\partial x^2}{\text{coſ.}\,\Phi^2.\,\partial t^2},$$

cette équation ſe change en celle-cy:

$$\frac{P.\,\partial t^2}{\lambda}.\,\frac{\partial\partial x}{\partial x^3} = \frac{\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3}, \text{ dont integrale}$$

$$\text{conſt.} - \frac{P}{2\lambda}.\,\frac{\partial t^2}{\partial x^2} = \tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\,\Phi\,\text{ſec.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{log. tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi).$$

Pour le cas $\Phi = I$, $\frac{\partial x}{\partial t}$ denote la viteſſe initiale horizontale du projectile qui eſt $= c.\text{coſ.}\,I$; ce qui donne la valeur de la conſtante

$$\text{conſt.} = \frac{P}{2\lambda.c^2\,\text{coſ.}\,I^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{tg.}\,I.\,\text{ſec.}\,I + \tfrac{1}{2}\,\text{log. tg.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}I) = C.$$

Faiſant donc pour abreger

$\frac{1}{2}$ tang,

ſtant, les principes connûs de la Dynamique donnent les deux équations différentielles

$$\frac{\partial \partial x}{2g.\partial t^2.\,coſ.\,\Phi} = -\frac{R}{M} \quad \& \quad \frac{\partial x.\,\partial \Phi}{2g.\,\partial t^2.\,coſ.\,\Phi^2} = -\frac{P}{M},$$

&, par une approximation propoſée par Mr. Bezout, qui ne laiſſe à craindre que de très-petites erreurs, j'en ai tiré

$\frac{1}{2}$ tang. Φ ſec. Φ + $\frac{1}{2}$ log. tang. $(45° + \frac{1}{2}\Phi) = F.\Phi$;
on a $\partial x^2 = \frac{P.\,\partial t^2}{2\lambda(C - F.\,\Phi)}$. Eliminant ∂t^2 par l'équation $\frac{\partial x.\,\partial \Phi}{2g.\,\partial t^2.\,coſ.\,\Phi^2} = -\frac{P}{M}$ on a

$$\partial x = \frac{M}{4g\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi}{(F.\,\Phi - C).\,coſ.\,\Phi^2}.$$

Pour intégrer, admettons avec Mr. Bezout, que dans l'expreſſion

$F.\Phi = [\frac{1}{2}$ ſec. $\Phi + \frac{1}{2}$ cotang. Φ log. tang. $(45° + \frac{1}{2}\Phi)]$. tang. Φ,

on puiſſe par des raiſons detaillées dans mes Memoires précédans, & ſans avoir à craindre des erreurs ſenſibles ſur la Portée totale, regarder la quantité

$\frac{1}{2}$ ſec. Φ + $\frac{1}{2}$ cotang. Φ log. tang. $(45° + \frac{1}{2}\Phi)$

comme conſtante pour toute la trajectoire, en lui donnant la valeur qu'elle a au commencement de la projection & par conſequant en y ſuppoſant $\Phi = I$. Soit donc

$\frac{1}{2}$ ſec. I + $\frac{1}{2}$ cotang. I. log. tang. $(45° + \frac{1}{2} I) = a$,

& nous aurons

$$\partial x = \frac{M}{4g\lambda} \cdot \frac{\partial \Phi}{(a.\,tang.\,\Phi - C).\,coſ.\,\Phi^2} \text{ \& partant}$$

$$\partial y = \frac{M}{4g\lambda} \cdot \frac{ſin.\,\Phi.\,\partial \Phi}{(a.\,tang.\,\Phi - C).\,coſ.\,\Phi^3};$$

dont les integrales priſes de maniere qu'elles s'evanouiſſent pour $\Phi = I$, ſont celles données cy-deſſus.

tiré les équations finies

$$x = \frac{D}{\alpha} . \text{log. hyp.} \left(1 + \frac{\text{tang. I} - \text{tang. } \Phi}{\alpha}\right) \ \&$$

$$y = \frac{D}{\alpha} \left[(\alpha + \text{tang. I}) \text{ log. hyp. } \left(1 + \frac{\text{tang. I} - \text{tang. } \Phi}{\alpha}\right) - \text{tang. I} + \text{tang. } \Phi\right],$$

ce ſont ces deux équations qui m'ont ſervi à la conſtruction d'une *Table balliſtique univerſelle*, que j'ai donnée dans mon ſecond Mémoire, moyennant la quelle on peut, par la ſimple addition de trois Logarithmes, trouver la Portée horizontale pour toutes les eſpéces de Boulets & pour des viteſſes de projection & des angles d'élévation quelconques.

Pour l'objet dont il s'agit dans le Mémoire préſent, il faut avant toute autre choſe, trouver l'équation à la Courbe même décrite par le projectile, & pour cet effet tirons de la première équation l'expreſſion de la tangente de l'angle Φ, $\text{tang. } \Phi = \alpha + \text{tang. I} - \alpha . e^{\frac{\alpha x}{D}}$ & partant

$$\partial y = (\alpha + \text{tang. I}) \, \partial x - \alpha . e^{\frac{\alpha x}{D}} . \partial x.$$

L'intégrale de cette équation, priſe de façon qu'elle s'évanouiſſe pour $x = 0$, donne l'équation à la Courbe

$$y = (\alpha + \text{tang. I}) . x - \frac{D\alpha}{\alpha} \left(e^{\frac{\alpha x}{D}} - 1\right).$$

Pour l'appliquer à la ſuppoſition que la réſiſtance de l'air eſt nulle ou inſenſible, développons la quantité exponentielle en ſérie, & à cauſe de $\frac{\alpha\alpha}{2D} = \frac{1}{4h. \text{coſ. I}^2}$ nous aurons

$$y = x \text{ tang. I} - \frac{x^2}{4h. \text{coſ. I}^2} \left(1 + \frac{\alpha x}{3D} + \frac{\alpha^2 x^2}{3.4. D^2} + \ldots .\right).$$

Faiſant maintenant $\lambda = 0$ & partant $D = \infty$, on obtient l'équa-

l'équation ordinaire à la Parabole

$$y = x.\ \text{tang. I} - \frac{x^2}{4\,h.\ coſ.\ I^2}.$$

Équation à la Portée horizontale, & expreſſion de la Portée.

§. 5. Faiſant $y = 0$, & la Portée horizontale $= X$, on obtient l'équation à la Portée

$$e^{\frac{a\,X}{D}} - \frac{(\alpha + \text{tang. I}).\ a.\ X}{a\,D} - 1 = 0.$$

ou bien par le développement de la quantité exponentielle en ſerie

$$X + \frac{1}{2}.\frac{a\,X^2}{3.\ D} + \frac{1.\ 1}{2.\ 3}.\frac{a^2\,X^3}{5.\ D^2} + \ldots\ldots\ldots = 2\,h.\ \text{ſin. } 2\,\text{I}.$$

Pour exprimer la Portée même, ſoit $e^{\frac{a\,X}{D}} - 1 = V$ et partant $\frac{a\,X}{D} = \text{log. hyp. } (1 + V)$; ces deux valeurs étant ſubſtituées dans l'équation à la Portée, on a

$$\frac{V}{\text{log.}(1 + V)} = 1 + \frac{a\,h.\ \text{ſin. } 2\,\text{I}}{D}.$$

Or les quantités D, h, I & a, étant données par le Calibre & le Poids du Boulet, ſa viteſſe initiale, l'angle d'élévation & la loi de la réſiſtance de l'air; cette équation qui eſt facile à réſoudre ſi l'on a des Tables des Logarithmes hyperboliques, donne la quantité V, & celle-cy étant trouvée, on a la Portée

$$X = \frac{D}{a}\ \text{log. hyp. } (1 + V) \text{ ou bien}$$

$$X = \frac{1^2.\ V}{a\,(D + a\,h\ \text{ſin. } 2\,\text{I})}.$$

Appliquant cette équation à la ſuppoſition du Vuide, on a $\lambda = 0$ & $D = \infty$, ce qui donne $V = 0$ & D. log. $(1 + V) = \infty.\ 0$. Traitée ſelon les méthodes connues, cette quantité

tité indeterminée ſe trouve $= 2\,a\,h.$ ſin. $2\,I$, de ſorte que l'équation auſſi bien que la ſerie cy-deſſus, donne pour le Vuide $X = 2\,h.$ ſin. $2\,I.$

Équation à l'angle de la plus grande Portée, & expreſſion de la plus grande Portée même.

§. 6. Ayant pour le cas $I = 0$; $a = 1$, a ſin. $2\,I = 0$ & partant $V = 0$; & pour le cas $I = 90°$, $a = \infty$, a ſin. $2\,I = 1$ & partant $\frac{V}{log.\,(1+V)} = \frac{D+b}{D}$; on a pour l'un & l'autre cas la Portée $X = 0$. Pour déterminer l'élévation, qui donne le Maximum, différencions l'équation à la Portée pour les variables X & I, & nous aurons $P\partial X + Q\partial I = 0$, ayant fait pour abreger

$$P = a\left(e^{\frac{aX}{D}} - 1 - \frac{a\,b\,ſin.\,2\,I}{D}\right);$$

$$\Delta = \frac{\partial.\,a^2\,ſin.\,2\,I}{\partial\,a} \;\&\; Q = 2\,X\left(e^{\frac{aX}{D}} - 1 - \frac{b\,\Delta}{D}\right)\left(\frac{1 - a.\,coſ.\,I}{coſ.\,I.\,ſin.\,2\,I}\right).$$

Pour donc que $\frac{\partial X}{\partial I} = -\frac{Q}{P}$ ſoit $= 0$; comme P ne ſauroit être $= \infty$ que dans le cas $a = \infty$, ſuppoſition qui rend auſſi $Q = \infty$; il faut qu'il ſoit $Q = 0$. Or des facteurs de l'équation $Q = 0$, le ſeul $e^{\frac{aX}{D}} - 1 - \frac{b\,\Delta}{D}$ donne un Maximum. Faiſant donc $e^{\frac{aX}{D}} - 1 - \frac{b\,\Delta}{D} = 0$, on a

$$\frac{aX}{D} = \text{log. hyp.}\left(1 + \frac{b\,\Delta}{D}\right),$$

& puiſque par l'équation à la Portée on a généralement

$$\frac{\alpha\left(e^{\frac{aX}{D}} - 1\right)}{\alpha + \text{tang.}\,I} = \frac{aX}{D};$$

on aura auſſi, en ſubſtituant les valeurs trouvées, pour la plus

plus grande Portée

$$\frac{b\,\Delta}{D + a\,b.\,ſin.\,2\,I} = \text{log. hyp.}\left(1 + \frac{b\,\Delta}{D}\right),$$

& l'angle I qui eſt déterminé par cette équation, ſera celui de la plus grande Portée. Ayant trouvé cet angle & partant auſſi les quantités a & Δ qui lui repondent, & deſignant la plus grande Portée par Ω, on aura

$$\Omega = \frac{D}{a}\log\left(1 + \frac{b\,\Delta}{D}\right) \text{ ou bien auſſi}$$

$$\Omega = \frac{D.\,b.\,\Delta}{a\,(D + a\,b\,ſin.\,2\,I)}.$$

L'équation que nous venons de trouver pour déterminer l'angle de la plus grande Portée, eſt, quant à la forme, ſemblable à celle qu'a donnée Mr. le Chevalier de Borda, mais elle en différe eſſentiellement par les quantités qui la compoſent.

Application à la Pratique.

§. 7. Pour appliquer ces équations à la pratique de l'Artillerie, faiſons

$$z = \frac{b\,\Delta}{D} \;\&\; n = \frac{a\,ſin.\,2\,I}{\Delta};$$

& nous aurons

$$\frac{1}{\log.\,(1 + z)} - \frac{1}{z} = n \;\&\; \Omega = \frac{b\,\Delta.\,\log.\,(1 + z)}{a\,z}.$$

Tirons d'abord de ces équations les concluſions ſuivantes:

a) Si la réſiſtance de l'air eſt nulle ou inſenſible, & partant $\lambda = 0$ & $D = \infty$, on aura $z = 0$ & $n = \infty - \infty$. Or par les méthodes connues on trouve, pour le cas $z = 0$, la valeur de la fonction $\frac{1}{\log.\,(1 + z)} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$; on a donc pour le Vuide $n = \frac{1}{2}$, & $2\,a.$ ſin. $2\,I = \Delta$. Or ayant

$\Delta = \frac{\partial . a^2 . \text{ſin.} 2 I}{\partial a} = 2 a$ ſin. $2 I + \frac{a^2 . \text{coſ.} I \text{ſin.} 2 I . \text{coſ} 2 I}{1 - a . \text{coſ.} I}$ (§. 2.); l'angle de la plus grande Portée dans la Vuide eſt tel, que $\frac{a^2 . \text{coſ.} I . \text{ſin.} 2 I . \text{coſ.} 2 I}{1 - a \text{ coſ.} I} = 0$, ce qui ne peut avoir lieu que par la ſeule poſition coſ. $2 I = 0$. (§. 2.) & partant $I = 45°$; ce qui donne $\Delta = 2 a$ & enſuite, à cauſe de $\frac{\log. (1 + z)}{z} = 1$, la plus grande Portée $\Omega = 2 h$, comme on le ſcait par la Balliſtique ordinaire.

b) Ayant $\Delta = \frac{D z}{h}$; il eſt viſible, que l'angle de la plus grande Portée dans l'air depend des quantitéc D & h, & partant du Poids, du Calibre & de la viteſſe initiale du Boulet & de la loi de la réſiſtance de l'air.

c) Ce même angle eſt toujours plus petit que 45°; car pour le cas $I > 45°$, on a $n > \frac{1}{2}$, & pour avoir

$$\frac{1}{\log. (1 + z)} - \frac{1}{z} > \frac{1}{2},$$

z devroit être négatif, ce qui ne ſe peut pas.

d) Plus eſt grande la viteſſe initiale du Boulet, le reſte d'ailleurs égal; plus l'angle de la plus grande Portée eſt petit, & réciproquement; car pour une viteſſe infiniment grande, ou pour $h = \infty$, on auroit $z = \infty$ & partant $n = 0$ & $I = 0$, & la direction qui donneroit la plus grande Portée, ſeroit l'horiſontale. Pour une viteſſe infiniment petite on auroit z infiniment petit, & l'angle I ſe confondroit avec celui de 45°, comme cy-deſſûs.

e) La quantité z étant déterminée par l'équation

$$\frac{1}{\log. (1 + z)} - \frac{1}{z} = n,$$

elle

elle eſt, auſſi bien que Δ, une fonction du ſeul angle de la plus grande Portée. Or ayant $\frac{z}{\Delta} = \frac{b}{D} = \frac{c^2 \delta^2 k \mu}{M}$; il eſt clair, que le Calibre, le Poids & la viteſſe initiale du Boulet & la loi de la réſiſtance de l'air étant donnés, on connoit la fonction $\frac{z}{\Delta}$ de l'angle de la plus grande Portée, qui par conſéquant pourra être déterminé par ce moyen. Mais comme cette détermination feroit infiniment embaraſſante: calculons pour chaque angle d'élévation I la valeur de la fonction $\frac{z}{\Delta}$ & comme cette valeur ſera $= \frac{c^2 \delta^2 k \mu}{M}$; il eſt viſible, que réciproquement, la quantité $\frac{c^2 \delta^2 k \mu}{M}$ & partant $\frac{z}{\Delta}$ étant données, on connoitra tout de ſuite l'angle I qui lui repond & qui ſera celui de la plus grande Portée. Pour conſtruire une pareille Table qui pour chaque angle de degré en degré entre 0 & 45° préſente les valeurs Δ & z, nous avons les équations ſuivantes. (*)

$$a = \tfrac{1}{2} \text{ſec. I} + \tfrac{1}{2} \text{cotang. I. log. hyp. tang.} (45° + \tfrac{1}{2} \text{I}),$$

$$\Delta = 2\, a.\, \text{ſin. } 2\,\text{I} + \frac{a^2. \text{ coſ. I. ſin. } 2\,\text{I. coſ } 2\,\text{I}}{1 - a.\ \text{coſ. I}},$$

$$n = \frac{a.\ \text{ſin. } 2\,\text{I}}{\Delta}, \text{ et}$$

$$\frac{1}{\log. (1 + z)} - \frac{1}{z} = n.$$

Comme je ne me propoſe dans ce Mémoire, que d'expoſer les procedés de la méthode, il ſuffit de joindre ici un échantillon

(*) Les quantités $a = \frac{1}{2}$ ſec. I $+ \frac{1}{2}$ cotang. I. Log. hyp. tang. (45° $+ \frac{1}{2}$ I) ſe trouvent deja calculées pour chaque angle I dans mon ſecond Mémoire cité cy-deſſûs: Acta Acad. Scient. Imper. Petropol. pro anno 1780. Pars poſterior. Pag. 178.

tillon de la Table de 5 à 5 degrés entre 25 et 45 degrés: (**)

I.	a.	n.	Δ.	z.
45°	1, 147790.	0, 500000.	2, 295580.	0, 000000.
40°	1, 107300.	0, 336633.	3, 239362.	7, 167667.
35°	1, 076561.	0, 219626.	4, 606178.	71, 20715.
30°	1, 053059.	0, 139271.	6, 548215.	1259, 920.
25°	1, 035140.	0, 085101.	9, 318009.	126851, 5.

Par le moyen de cette Table on trouve ſans peine les valeurs $\frac{z}{\Delta}$; $\frac{l(1+z)}{a}$ et $\frac{\Delta . \log . (1+z)}{a\,z}$, et partant elle ſervira pour en conſtruire trois autres qui ſont néceſſaires pour les ſolutions des trois Problêmes ſuivans:

Problème I.

§. 8. Le Poids, le Calibre & la viteſſe initiale du Boulet, & la loi de la réſiſtance de l'air étant donnés: trouver l'angle de la plus grande Portée, & la Portée même.

Table

(**) Pour la pratique de l'Artillerie, cette Table devroit aller de degré en degré; mais il feroit ſuperſiu de la conſtruire pour des angles plus petits que 25° ou même 30°, à moins que la Chimie ne decouvre des compoſitions des eſpeces plus fortes de poudre à Canon; car pour que l'angle de la plus grande Portée ſoit de 30°, il faudroit que la Bombe eut une viteſſe initiale bien plus grande que celle, que pourront peut-être lui donner les eſpéces uſitées de poudre dans les Mortiers des dimenſions ordinaires.

Table néceſſaire pour la Solution du Problème.

Argument.	Angle de la pl. gr. Portée.	Multiplicateur pour la pl. gr. P.
0, 000000.	45°	2, 000000.
2, 212679.	40°	0, 857183.
15, 45905.	35°	0, 257143.
192, 4066.	30°	0, 035237.
13613, 59.	25°	0, 000834.

Solution.

Les quantités P, δ, c, k & μ étant données:

1.) Calculés la valeur $\frac{c^2 \delta^2 k \mu}{P}$; elle ſera l'argument.

2.) Avec cet argument vous trouves dans la Table l'angle de la plus grande Portée, & le Multiplicateur de la Portée.

3.) Calculés la valeur $\frac{c^2}{4g}$ & multipliés la par le Multiplicateur trouvé; le produit ſera la plus grande Portée.

Démonſtration.

On a $\frac{z}{\Delta} = \frac{c^2 \delta^2 k \mu}{P}$; or la ſeconde colonne de la Table donne les angles qui répondent aux valeurs de $\frac{z}{\Delta}$ données dans la premiere colonne, (§. 7.). On a

$$\Omega = \frac{h \Delta . \log. (1 + z)}{a . z} = \frac{c^2}{4g} . \frac{\Delta . \log. (1 + z)}{a z};$$

or la troiſiéme colonne donne les valeurs $\frac{\Delta . \log. (1 + z)}{a z}$ qui répondent aux angles de la ſeconde.

Corol-

Corollaire.

§. 9. Si nous deſignons par N le multiplicateur pour la plus grande Portée donné dans la Table précédente; cette Portée dans l'air rèſiſtant ſera $= \frac{c^2}{4g} . N$; or dans le Vuide elle eſt $= \frac{c^2}{2g}$; et par conſéquant la plus grande Portée d'un même jet dans l'air réſiſtant eſt à celle dans le Vuide en raiſon de N : 2; et elle n'eſt que la partie $\frac{N}{2}$ieme de celle qui auroit eu lieu dans le Vuide, ce qui fait voir de la manière la plus préciſe, combien eſt grand l'effet de la réſiſtance de l'air pour diminuer les Portées. Un Boulet de 24 lancé avec une viteſſe initiale de 1884 pieds par ſeconde, a dans le Vuide ſa plus grande Portée de 113583 pieds; dans l'air réſiſtant la plus grande Portée du même Boulet lancé avec la même viteſſe initiale n'eſt que de 14603 pieds, ce qui eſt encore moins qu'un ſeptième de celle dans le Vuide.

Problême II.

§. 10. Le Poids et le Calibre du Boulet, l'angle d'élévation & la loi de la réſiſtance de l'air étant donnés; trouver la viteſſe initiale pour la quelle l'élévation donnée ſoit l'angle de la plus grande Portée, & cette Portée même.

Table néceſſaire pour la Solution du Problême.

Elevation donnée.	Multiplicateur pour la viteſſe.	Multiplicateur pour la pl. gr. P.
45°	0, 000000.	2, 000000.
40°	1, 487508.	0, 857183.
35°	3, 931800.	0, 257143.
30°	13, 87107.	0, 035237.
25°	116, 6772.	0, 000834.

Solu-

Solution.

Les quantités P, δ, I, k et μ étant données:

1.) Cherchés dans la Table avec l'élévation donnée, le multiplicateur pour la viteſſe, & celui pour la plus grande Portée.

2.) Calculés la quantité $\sqrt{\frac{P}{\delta^2 . k \mu}}$, & multipliés la par le multiplicateur pour la viteſſe; le produit ſera la viteſſe initiale cherchée.

3.) Prennés le quarré de cette viteſſe, diviſés le par $4g$, & multipliés le quotient par le multiplicateur pour la plus grande Portée; le produit ſera la plus grande Portée cherchée.

Démonſtration.

Ayant $\frac{c^2 \delta^2 k \mu}{P} = \frac{z}{\Delta}$; on a $c = \sqrt{\frac{z}{\Delta}} . \sqrt{\frac{P}{\delta^2 k \mu}}$. Or la ſeconde colonne de la Table donne les valeurs de $\sqrt{\frac{z}{\Delta}}$ qui répondent aux angles donnés dans la prémiere colonne. Pour la plus grande Portée, voyes la démonſtration du Problême précédant.

Corollaire.

§. 11. Il eſt à rémarquer, que ce Problême offre auſſi une methode de calculer la viteſſe initiale qu'une charge donnée imprime à un Boulet donné, par ſon angle de la plus grande Portée, s'il y a moyen de déterminer cet angle avec aſſes de préciſion par des jets faits ſous des élévations conſécutives du mortier, & dans cette methode, ſi elle pouvoit être adaptée à la pratique, on ne ſeroit pas même obligé de meſurer les Portées, comme on l'eſt dans

la

la pratique ordinaire de determiner les viteſſes initiales par des jets d'épreuve.

Problême III.

§. 12. Le Poids & le Calibre du Boulet, la diſtance de l'objet & la loi de la réſiſtance de l'air étant donnés: trouver l'élévation du Mortier & la viteſſe initiale, telles que cette viteſſe ſoit la moindre poſſible qui puiſſe lancer le Boulet donné à la Portée donnée:

Table néceſſaire pour la Solution du Problême.

Argument.	Elevation requiſe.	Multiplicateur pour la viteſſe.
0, 000000.	45°	0, 000000.
1, 896670.	40°	1, 487508.
3, 975194.	35°	3, 931800.
6, 779862.	30°	13, 87107.
11, 35187.	25°	116, 6772.

Solution.

Les quantités P, δ, k, μ et Ω étant données:

1.) Calculés la valeur $\frac{4g.k\mu.\delta^2.\Omega}{P}$; elle ſera l'argument.

2.) Avec cet argument vous trouves dans la Table l'élévation réquiſe, & le multiplicateur pour la viteſſe.

3.) Calculés la quantité $\sqrt{\frac{P}{\delta^2 k\mu}}$ & multipliés la par le multiplicateur pour la viteſſe; le produit ſera la viteſſe initiale réquiſe.

De-

Démonſtration.

On a $\Omega = \frac{D}{a} l(1+z) = \frac{p\,l(1+z)}{4g.\mu k \delta^2.a}$; & partant $\frac{4g.k\mu.\delta^2.\Omega}{p} = \frac{l(1+z)}{a}$. Or la ſeconde colonne de la Table donne les angles I qui repondent aux valeurs de $\frac{l(1+z)}{a}$ données dans la premiere colonne. Pour la viteſſe, voyés la démonſtration du Problème 2.

Corollaire.

§. 13. La viteſſe initiale trouvée dans ce Problême eſt celle qui eſt accompagnée de la plus grande Oeconomie en poudre de Canon. Le même Boulet chaſſé ſous le même angle d'élévation avec une charge plus forte, capable toute fois, par la dimenſion du Mortier, à imprimer au Boulet une plus grande viteſſe initiale, iroit ſans doute plus loin; mais cette Portée plus grande auroit pu être obtenue par une moindre charge ſous un autre angle d'élévation.

§. 14. Éclairciſſons les Solutions de ces Problêmes par quelques exemples, & comme les Tables, que je n'ai données ici que comme des échantillons de la méthode, ne vont que de 5 à 5 degrés, aulieu que pour l'application à la pratique elles devroient aller de degré en degré, je choiſirai ces exemples tels qu'il n'y ait point d'interpolation à faire.

Exemple 1.

On a des Boulets de 24, & de 5,641 pouces du pied de Rhin en diamètre. Le Mortier eſt tel que la charge due à la plus gr. viteſſe initiale, en donne au Boulet une de 1884 pieds par ſeconde. On ſe propoſe de faire agir la Batterie du plus grand éloignement poſſible à l'ob-

jet. On cherche pour cet effet l'angle de la plus grande Portée & cette Portée même, en adoptant l'hypotheſe Neutonienne pour la réſiſtance de l'air.

On a donc $P = 24$; $\delta = 0,470$; $c = 1884$; $k = 0,00047389$; $\mu = 1$ & $g = 15,625$; & d'aprés les regles du Probl. 1. le calcul eſt le ſuivant:

$l. c^2$	$= 6,5501618.$	$l.$ du multipl.	$= 9,4101747.$
$l \delta^2$	$= 9,3441958.$	$l. c^2$	$= 6,5501618.$
$l k$	$= 6,6749438.$		$5,9603365.$
	$2,5693014.$	$l. 4 g$	$= 1,7958800.$
$l P$	$= 1,3802112.$	$l \Omega$	$= 4,1644565.$
l Argum.	$= 1,1890902.$	Ω	$= 14603.$
Argum.	$= 15,456.$		

Donc $I = 35°$. & le Multipl. pour la plus gr. Portée $= 0,257143$.

Donc il faut pointer le Mortier ſous l'angle de 35° & on peut tirer, étant encore èloigné de l'objet à la diſtance de 14603 pieds.

Si le Mortier étoit ſixé ſous l'angle de 45°; on trouve par la méthode du §. 5., que le Boulet, avec la même charge, auroit eu une Portée de 14186. pieds; d'où il eſt viſible, que le plus grand éloignement, dans le quel on peut commencer à faire agir la Piéce, eſt en ce cas de 417 pieds plus grand pour les Mortiers mobiles que pour ceux qui ſont ſixés ſous 45°.

Exemple 2.

Un Boulet de 24 & de 5, 641 pouces du pied de Rhin en diamêtre, doit être jetté d'un Mortier pointé ſous

ſous 30° d'élévation. On demande, ſous l'hypotheſe de Robins pour la réſiſtance de l'air, la viteſſe initiale qu'on doit donner au Boulet pour que l'élévation donnée du Mortier ſoit l'angle de la plus grande Portée, & la plus grande Portée même.

On a donc $P = 24$; $\delta = 0,470$; $I = 30°$; $k = 0,00047389$; $\mu = 3,0615$ & $g = 15,625$; & d'aprés les regles du Problême 2. le calcul eſt le ſuivant:

L'argument $I = 30°$ donne les multiplicateurs:
pour la viteſſe initiale $= 13,871070$.
pour la plus grande Portée $= 0,035237$.

$$l\,P = 1,3802112.$$
$$l\,\delta^2 = 9,3441958.$$
$$l\,k = 6,6749438.$$
$$l\,\mu = 0,4859343.$$
$$l\,\delta^2 k \mu = 6,5050739.$$
$$l\,\frac{P}{\delta^2 k \mu} = 4,8751373.$$
$$l\,\sqrt{\frac{P}{\delta^2 k \mu}} = 2,4375686.$$
$$l\,13,87107 = 1,1421100.$$
$$l\,c = 3,5796786.$$
$$c = 3799.$$

$$l\,c^2 = 7,1593572.$$
$$l\,4g = 1,7958800.$$
$$l\,\frac{c^2}{4g} = 5,3634772.$$
$$l\,0,035237 = 8,5469989.$$
$$l\,\Omega = 3,9104761.$$
$$\Omega = 8137.$$

Il faut donc donner au Boulet une viteſſe initiale de 3799 pieds par ſeconde, & il ſera lancé à la diſtance de 8137. pieds. La grande viteſſe initiale qu'on vient de trouver, confirme la remarque que j'ai faite dans la note au §. 7.

Exemple 3.

Une Bombe de 138 livres & d'un pied de Rhin en diamêtre doit être lancée à une diſtance de 8852, 12 pieds. On demande, ſous l'hypotheſe Neutonienne pour la réſiſtance de l'air, l'élévation du Mortier & la viteſſe initiale, telles que cette viteſſe initiale ſoit la moindre poſſible qui puiſſe y lancer la Bombe.

On a donc $P = 138$; $\delta = 1$; $k = 0,00047389$; $\mu = 1$; $g = 15,625$ & $\Omega = 8852,12$, & d'aprés les regles du Problême 3. le calcul eſt le ſuivant:

$l\,4g = 1,7958800.$
$l\,k = 6,6749438.$
$l\,\Omega = 3,9470473.$
$\overline{\quad 2,4178711.}$
$l\,P = 2,1398791.$
$\overline{l\ \text{Argum.} = 0,2779920.}$
$\text{Argum.} = 1,896670.$

Donc $I = 40°$ & le multiplicateur pour la viteſſe $= 1,487508.$

$l.\,P = 2,1398791.$
$l.\,k = 6,6749438.$
$\overline{l\,\frac{P}{k} = 5,4649353.}$
$l\,\sqrt{\frac{P}{k}} = 2,7324676.$
$l.$ du multipl. $= 0,1724593.$
$\overline{l\,c = 2,9049269.}$
$c = 803,39.$

Il faut donc pointer le Mortier ſous l'élévation de 40° & lui donner une viteſſe initiale de 803, 39 pieds par ſeconde; & le Boulet ſera porté à la diſtance de 8852, 12 pieds.

PHYSI-

PHYSICA.

EXPOSITIO NOVARVM CIRCA SALIVM CRYSTALLISATIONEM OBSERVATIONVM, NEC NON NOVAE ENCHEIRESIS, QVA SALIA AD MELIOREM CRYSTALLORVM REGVLARIVM FORMATIONEM DISPONVNTVR.

Auctore

TOBIA LOWITZ.

Conventui exhibit die 10 Iulii 1794.

§. 1.

Operatio illa chemica, cuius ope ſalium ſolutiones ad cryſtallorum regularium formationem diſponuntur, magni ſane eſt momenti, idque duplici reſpectu: Primo enim ea ſalium ſummae, ab omnibus partibus heterogeneis ea inquinantibus, depurationi inſervit; deinde etiam ad varias variorum ſalium proprias figuras cognoſcendas viam ea aperit; unde mediorum, ſalium in cryſtallos regulares concreſcentiae opitulantium, uberior cognitio haud parvae utilitatis iure exiſtimanda eſt.

Varia quidem huic fini propria media iam in promtu eſſe, lubens concedo; ſed me quoque hac in re novi non nihil

nihil praeſtitiſſe, ex iis patere confido, quae in hac diſſertatione exponere conſtitui.

§. 2. Ante autem, quam ea, quae hac in re detegere mihi licuit, exponam, neceſſe erit, ut de uſitatioribus huic ſcopo adplicatis hucusque mediis nec non de phoenomenis nonnullis, ſalium ſolutionem et recryſtalliſationem comitantibus, verba faciam.

Cognita hucusque primaria regulari ſalium cryſtalliſationi inſervientia media ſequentia ſunt:

1.) Iuſtus concentrationis gradus ſolutionis ſalinae.

2.) Lenta ſolutionis evaporatio.

3.) Quies ſolutionis toto cryſtalliſationis tempore non interrupta.

4.) Immerſio in ſolutionem, evaporatione ad cryſtalliſationis punctum redactam, tenuium bacillorum ligneorum vel filamentorum, quibus, orientes inter refrigerationem cryſtalli, inſidere poſſint.

5.) Vaſis cryſtalliſationis in interno pariete alcohole vini humectatio.

6.) Solutionis ad ſpontaneam exhalationem expoſitio, nullo adhibito calore.

Media haecce, ſuo loco, id eſt, pro rei natura, iudicioſe adhibita, ſuam utique ſingula utilitatem praeſtant: Sed omnia ſere ſalia cryſtalliſabilia ſingulari quadam ſingula proprietate gaudent, unde, cum tantus ſit diverſorum ſalium numerus, in regularis cryſtalliſationis negotio haud parum impedimenti proficiſcitur; et, quod caput eſt, ipſum hocce

hocce impedimentum quietis ad cryſtalliſationem regularem requiſitae neceſſitate mirum in modum augetur, ita, ut permulta ſint ſalia, quae in determinatas cryſtallos redigere hodienum nulla arte licuerit, ſiquidem impedimentis iſtis medelam afferre chemicis nullo hucusque modo contigit.

§. 3. Eiusmodi autem regularis cryſtalliſationis impedimentum ſequente potiſſimum fundamento nititur.

Notiſſimum eſt, aquam in vaſis probe clauſis quietisque, ſalva fluiditate ſua, frigus, quod debitum congelationi gradum longe ſuperat, ſuſtinere poſſe; Phoenomenon hoc Cell. Fahrenheit primus obſervavit *). Cell. Brugmann Groningae vidit, aquam absque eo, ut in glaciem abeat, interdum frigus 170 graduum de l'Islianorum ferre poſſe **).

Hac autem proprietate permultae ſalium ſolutiones aquae longe antecellunt, id quod egomet propriis tentaminibus compertum habeo. Acetum meum glaciale, licet frigidiore aeſtivo adeo tempore interdum coaguletur, in vitro tamen probe clauſo hiemali tempore nonnunquam frigus 174 graduum, antequam in maſſam ſolidam abeat, perferre poteſt; coagulatum vero, ut liqueſcat, temperiem 127 graduum poſtulat. Acidum igitur aceti concentratiſſimum temperiem ea, quae ipſius congelationi proprie debetur, 47 gradibus Del'Islianis frigidiorem absque eo, ut coaguletur, ſuſtinere poteſt; quam proprietatem ſuperrefrigerationis nomine, ut brevitati conſulatur, in hac diſſertatione appellare mihi fas ſit.

§. 4.

*) Phil. Tranſ. 1724. No. 382.

**) van Swinden obſerv. ſur le froid rigourenx de 1776. Amſt. 1778.

Aqua et acetum glaciale ſuperrefrigerationem hanc iis tantummodo conditionibus admittunt, quando non loco ſolum quieto reponuntur ſed ab omni quoque aëris externi acceſſu probe munita ſunt: permulta vero ſalia eiusdem in vaſis quoque apertis nec quietis capacia ſunt, qua de re unusquisque facile experimentis convinci poteſt.

§. 5. Conſtat inter chemicos, aquam pro vario eiusdem temperiei gradu, variam quoque ſed accuratiſſime determinatam diverſorum ſalium, excepto ſale marino, quantitatem ſolvere, qua ſoluta, modo aquae temperies non mutetur, aqua eiusdem ſalis ſpeciei ne hilum quidem ſolvit amplius; unde quis non concluderet, ſolutionem ſalinam certa quadam temperie perfecte ſaturatam, decreſcente hac temperie, proportionatam ſoluti ſalis portionem ſegregare debere? At, contrarium prorſus hac in re obtinet; omnes enim perfecte ſaturatae ſalium ſolutiones temperiem ea, qua ſolutio perficiebatur, inſigniter frigidiorem absque ulla ſoluti ſalis ſegregatione perferre valent, immo adeo aliqua aquae parte per evaporationem ablata, ſolutio frigidiori temperiei expoſita, cryſtallos oſtendet nullas.

§. 6. Aqua igitur, licet immediate nullo ſale ſuperſaturari queat, mediate tamen ſuperſaturationis eiusmodi capax eſt, quodſi ſcilicet ſaturata ſolutio vel aliqua aquae parte evaporationis adminiculo privetur, vel frigidiori temperiei exponatur.

§. 7. Neque tamen, quae modo dixi, ſenſu, quam par eſt, latiore accipi velim; omnes enim ſalium ſolutiones fri-

frigore magis magisque intenſo in cryſtallos tandem vel in maſſam ſolidam abeunt.

§. 8. Notandum quoque eſt, non omnia ſalia unum eundemque ſuperrefrigerationis gradum absque ſalis iactura ſuſtinere poſſe.

§. 9. In univerſum ſolutiones ſalinae ſuperrefrigerationis eo inſignioris capaces eſſe reperiuntur, quo minor eſt aquae copia, ſalium in iis contentorum ſolutioni debita.

§. 10. Superſaturationem eiusmodi mediatam vel ſuperrefrigerationem ea tantummodo ſalia admittunt, quorum calida aqua maiorem, quam frigida, quantitatem ſolvit.

§. 11. Atque haec ipſa in antecedentibus paragraphis expoſita proprietas, qua fit, ut permultae ſolutiones ſalinae vel evaporatione vel aliqua refrigeratione, ad ſuperſaturationis ſtatum redigi queant, regulari permultorum ſalium cryſtalliſationi quam maximo eſt obſtaculo; cui adeo quies ſolutionis ad cryſtallorum formationem neceſſaria haud mediocriter favet, id quod ex ſequentibus luculenter pateſcit.

§. 12. Notiſſimum eſt, cryſtalliſationis negotium praeter quietem lentam quoque ſolutionis refrigerationem poſtulare, ut cryſtallorum generatio ſenſim tantum et pedetentim fiat. At cautiones hae non raro omni uſu excidunt, quia in multis ſalibus id efficiunt, ut cryſtallorum formatio ſaepiſſime non niſi longo poſt ſummam ſolutionis refrigerationem tempore incipiat.

Multoties quoque cryſtalliſationem tum primum incipere vidi, cum ſolutio, poſt ſummam iam ſuperrefrigerationem, calidiorem temperiem eſſet adepta.

§. 13. Omnibus igitur in ſolutionibus, quae tardae huiusmodi cryſtalliſationi ſubiectae ſunt, in ipſa cryſtalliſatione ſequens, aſpectui iucundum quidem, ſed effectu ſuo minime gratum, phoenomenon cernere licet: Simulac nimirum cryſtallorum formatio incipit, tenuia cryſtallorum primordia internum ſolutioni motum imprimunt; qui per totam ſolutionem brevi tempore diffuſus quietem ipſi omnem, hoc tempore ſummopere neceſſariam penitus eripit; cryſtalli ſurſum deorſum et quaquaverſum iactantur; imaque ſummis miſcentur, ita, ut, reſtituta quiete, cryſtallorum regularium loco, non niſi informis et indigeſta maſſa ſalina ſe offerat.

§. 14. Sunt adeo eiusmodi ſalium ſolutiones, quae evaporationis ope tantam concentrationem, poſteaque ſuperrefrigerationem adeo inſignem admittunt, ut, licet per longum tempus fluiditatis fuerint tenaciſſimae, tandem uno quaſi momento praepete coagulatione e liquida in ſolidam formam abeant.

§. 15. Motus ſolutionis, de quo dixi, (§. 13.) inteſtinus eo vehementior ſemper eſt, quo promtior eſt partium ſalinarum ab aqua ſeceſſio; longe ille autem debilior eſt, ſi cryſtallorum formatio lento tantum greſſu et pedetentim procedit.

§. 16. Phyſica ſpontanei huius motus cauſſa haec eſt: particulae aqueae, eo in loco, ubi in vaſis fundo ſalinis

nis particulis liberantur, hoc ipſo ſeparationis momento, ob minorem, quam nunc induunt, ſpecificam gravitatem, ſuperiorem ſolutionis regionem petunt, id quod nudis adeo oculis videre licet: omnibus enim in ſolutionibus ſalinis cryſtalliſationis tempore a cryſtallis in fundo concreſcentibus innumera filamenta verſus liquoris ſuperficiem aſſurgentia, haud ſecus ac ſi alcohol vini ſive lixivium quoddam ſalinum aqua miſcuiſſes, conſpiciuntur.

§. 17. Atque haec omnia probe perpendenti facile eſt concludere, regularis cryſtalliſationis cardinem in eiusmodi artificii inventione verti, quo auxiliante ſolutiones ad cryſtalliſationis punctum redactae eo diſponerentur, ut ab initio ſtatim, uti ſucceſſiva ſit refrigeratio, ita ſucceſſive quoque et ad ſummam refrigerationem usque, particulas ſalinas ſegregarent; vel quod eodem redit, ut prohiberetur, quominus ſolutio, dum refrigeratur, ſuperrefrigerationis ſtatum admitteret.

§. 18. Cum inde ab aliquot iam annis multa omnibus fere cum ſalibus tentamina eo inprimis fine ſuſcepiſſem, ut varias cryſtallorum ipſorum figuras explorarem; nihil ſaepenumero, quam noſſe eiusmodi artificium, magis mea interfuit, ſiquidem non raro unius eiusdemque ſalis ſolutionem et cryſtalliſationem decies vel pluribus adeo vicibus repetere fuerim coactus, antequam exoptatas diſtinctae figurae cryſtallos obtinere potuerim, cuius laboris moleſtia in tanta ſalium varietate exercendae patientiae ampliſſimam mihi occaſionem praebuit.

§. 19. Poſteaquam ſupra expoſitae (§. 13.) in cryſtalliſationibus occurrentis difficultatis cauſſam diſtincte explo-

ploratam et cognitam habuiſſem: licuit mihi eſſe tam felici, ut facillimum ſimpliſſimumque, et votis meis plane reſpondens, invenirem medium, quod, ſine exceptione, omnibus ſalibus, per refrigerationem in cryſtallos concreſcentibus, adhiberi queat, cuiusque ope id obtineatur, ut ſalis ſolutio, dum refrigeratur, ſuperſaturationis vel ſuperrefrigerationis ſtatum admittat nulla, et ſubita et turbulenta illa (§. 13.) cryſtallorum formatio feliciſſime prohibeatur.

Ante autem quam ipſam hanc Encheireſin exponam, id cryſtalliſationis phoenomenon exponere convenit, quod ad veram propoſiti mei metam me perduxit.

§. 20. Iis in ſolutionibus, quae poſt evaporationem et refrigerationem penitus in maſſam ſolidam coagulantur, multoties obſervavi, ſubitaneam hanc coagulationem illo ipſo momento et *ex eo ſemper puncto*, in quo coagulationis vel cryſtalliſationis primordia ſeſe manifeſtant, maxima cum celeritate per omne liquoris volumen radiatim quaſi, ceu ex communi centro ſe diffundere. Cum praeterea ſubita haec cryſtalliſatio multis in ſalibus non niſi longe poſt perfectam iam ſolutionis refrigerationem tempore contingat (§. 14.); ita ferſi, ut, plenum cryſtalliſationis negotium primum eiusdem initium quaſi exſpectare, illudque ſalis atomen, quod ab aqua primum ſegregatur, ducis quaſi vel incitatoris ad inſtar, ceteris omnibus cryſtalliſationis ſignum quaſi dare, exiſtimarem.

§. 21. Atque hocce modo rem intuenti mihi forte fortuna in mentem venit, cryſtalliſationis initium maturari poſſe, adiecto ſalis cryſtallulo ad ſolutiones ſalinas, evaporatione ad iuſtum cryſtalliſationis punctum perductas, quo fore ſpera-

ſperabam, ut idem incitatoris officio fungeretur, quod alias prima ſed tarde admodum et non niſi aegre ſua ſponte ab aqua ſecedens ſalis particula praeſtitiſſet; quam ſententiam meam, inſtitutis ſtatim experimentis, pleniſſime confirmatam vidi. Cum enim ſolutioni cuilibet, iam prorſus refrigeratae nec ullam tamen cryſtalliſationem vel coagulationem oſtendenti particulam ſiccam ſalis eiusdem ſpeciei addidiſſem; ſolutiones pro diverſa ſalis natura varioque concentrationis gradu, ſine ulla mora, vel ad coagulandum per omne volumen ſuum vel ad formandas cryſtallos pronae conſpiciebantur. Addito autem calidae adhuc ſolutioni cryſtallulo, cryſtallorum geneſis ſemper tempeſtive, id eſt, nondum refrigerato liquore, incipiebat, lentoque tantum et pari cum ſucceſſiva refrigeratione paſſu progrediebatur, ita, ut artificii huius adminiculo pulcherrimas cryſtallos nunquam non obtinuiſſem.

§. 22. In novi autem huius artificii adplicatione ſequenti modo procedendum eſt:

Salia cuncta, hac methodo tractanda, ceterum ſueto plane modo tractanda ſunt, hoc uno diſcrimine, ut filtratae et in locum quietum repoſitae ſed calidae adhuc ſolutioni portiuncula ſicca eiusdem ſalis immittatur; quae ſi nimio adhuc lixivii calore prorſus ſolveretur, novam ut addas, neceſſe eſt; idque tot vicibus donec fruſtulum ultimo iniectum non iam ſolvatur: nunc enim brevi tempore ex ipſo hoc fruſtulo cryſtallorum formatio ea lege leniter ac pedetentim incipiet, ut eo diſtinctiores maioresque et pulchriores obtineantur cryſtalli, quo lentiore paſſu ſolutionis refrigeratio procedit.

Si

Si forte ſoluti ſalis particulae ſiccae ad manus non ſint: redactae ad cryſtalliſationis punctum ſolutionis aliqua pars ſeorſim ad ſiccitatem usque evaporetur, et obtentae hoc modo informis maſſae ſalinae particulae perinde ac ſupra liquori iterandis vicibus addendae ſunt; in univerſum enim monendum eſt, nihil omnino referre, an cryſtallina ſint, an pulveris forma, quae ſolutionibus ad cryſtalliſandum incitandis, ſalis portiunculae adiiciantur.

Addito igitur ad calidam adhuc ſolutionem ſale ſicco, ea inſignis utilitas obtinetur, ut cryſtalliſatio tempeſtive, id eſt, nondum plane refrigerata ſolutione, primordia capiat, hincque ſalia pededentim tantum in diſtinctiores ſubinde cryſtallos concrescant.

§. 23. Simpliciſſimi huius artificii cognitio ingentem mihi in cryſtalliſationis negotio utilitatem attulit, eamque in iis praeſertim tentaminibus, cum parvis ſalium quantitatibus cryſtalliſandis occuparer; neque tamen ea minoris uſus eſt, ſi cryſtalliſationes magnis cum ſalium quantitatibus ſuſcipiuntur.

Terra e. g. ponderoſa ſalita in cryſtallos tabellares eximiae magnitudinis et pulchritudinis coit, ſi ſaturatae iam eiusdem ſolutioni, dum evaporationi ſubiicitur, ſiccas eiusdem ſalis particulas adiicias.

Sal polychreſtum Seignete, eo inprimis in loco, ubi ſolutioni eiusdem ante refrigerationem ſalis fruſtula immiſſa fuerunt, inſuetae magnitudinis cryſtallos ſingit.

Salia

Salia liqueſcentia, alias non niſi magna cum difficultate in regulares cryſtallos coëuntia, v. c. alcali volatile acetatum, calx et magneſia acido ſalis vel nitri unitae, magneſium, nec non ferrum ſalitum et complura alia, hoc artificio ad cryſtalliſandum lubenter incitantur.

Immo talia etiam concreta ſalina, quae nemo hucusque in regulares cryſtallos redigere potuit, v. c. acida aceti et vitrioli, nec non alcali minerale cauſticum, unico hoc medio ad pulcherrimas cryſtallos reduxi.

Atque adeo ſingulari hac ſalium proprietate totum cryſtalliſationis negotium incommodo illo, ex ſuperſaturatione ſolutionum oriundo, de quo ſupra dixi, feliciſſime liberatur.

§. 24. Nova haec a me detecta ſalium proprietas ad alia etiam me invitavit experimenta. Vt explorarem, utrum homogeneum ſolutioni neceſſario eſſe debeat ſal, quod ipſi additur, an vero etiam heterogeneum eodem munere fungi queat; acetum glaciale varia in vitra diffudi, ſingulasque has aceti portiones ſimul cryſtalliſationi earundem aptae expoſui temperiei. Atque ſingulis, ſalva fluiditate, debite refrigeratis, variorum ſalium, nitri ſcilicet, ſalis Glauberi, Sodae acetoſae, ſalis ammoniaci, acidique tartari et acidi ſachari cryſtallos inieci; ſed nullum horum ſalium, licet acetum frigidiori etiam temperiei expoſuiſſem, ad formandas cryſtallos illud ſuſcitare potuit; addita vero perexigua tantum aceti glacialis ſolidi portiuncula, acetum confeſtim per omne volumen ſuum in ſolidam maſſam cryſtallinam abiit.

Quo in experimento id inprimis memoratu dignum mihi viſum eſt, quod ipſa adeo ſolida acida, uti ea tartari et ſachari, nullam hac in re vim exſerere deprehenſa fuerint.

§. 25. Plura eiusdem generis tentamina me denique edocuerunt, non aceto id eſſe proprium, ſed omnibus ſalium ſolutionibus commune, ut non niſi homogeneorum ſalium ope, ad tempeſtivam cryſtallorum generationem impelli queant: quotiescunque enim ſolutioni cuidam ſalinae ad cryſtalliſationis punctum redactae, heterogeneum quoddam ſal addidi, cryſtallorum formationem perinde, ac ſi nihil adieciſſem, non niſi poſt peractam ſummam ſolutionis ſuperrefrigerationem incipere vidi.

§. 26. Praeter acetum glaciale, alcali minerale cauſticum huius rei egregium exemplum offert. Lixivium nimirum cauſticum alcali mineralis ad iuſtum cryſtalliſationis punctum redactum, ſine ulla difficultate in magnas et regulares concreſcit cryſtallos, modo huiusce alcali cauſtici portiuncula ſicca ei immittatur; ſi vero eidem lixivio, alcali cauſtici loco, alcali aërati cryſtallulus additur, cryſtallorum generatio obtinet *nulla*. Solutio porro alcali mineralis aërati quam optime ad cryſtalliſationem revocatur, ſi eiusdem alcali aërati cryſtallulus additur.

§. 27. His dum experimentis occuparer: inter heterogenea ſalia vim adeo repulſivam quandam obſervare mihi licuit; multoties enim egomet vidi, partes ſalinas in ſolutione detentas, cum in cryſtallos coirent, iniectam ſolutioni heterogeneam cryſtallum abhorere quaſi; ſiquidem tantum

tum abfuit, ut orientes cryſtalli iniecto ſali peregrino inſiderent, ut in remota potius ab eo regione quadam ſe formare, et homogenei ſalis cryſtallo adhaereſcere praeoptare viderentur. Si cui forte hac de re experimenta ſuſcipere placeat; moneo, vel maximi momenti eſſe, ſolutionis evaporatio ne iuſto ſit diuturnior; qua neglecta cautela, fieri poteſt, ut experimentum ſucceſſu careat.

§. 28. Vis huius, quam ſalia heterogenea in ſe invicem exercent, repulſivae cognitio aliorum etiam tentaminum inſtituendorum anſam mihi praebuit: venit enim in mentem mihi, ſuſpicari licere, fore, ut iſta proprietas faciliori, variorum ſalium una eademque in ſolutione contentorum, a ſe invicem ſeparationi inſervire queat.

§. 29. Atque hoc etiam in propoſito felici tandem gaudere ſucceſſu mihi licuit, adeo, ut in ſolutione e duobus diverſis ſalibus conſtante pro lubitu meo unum, quod placuerit binorum ſalium ad cryſtallos revocare, alterum in ſolutione plane illibatum relinquere potuerim. Qua in re etſi nonnullae initio difficultates ſeſe obtulerunt; tamen ſuperare eas tandem mihi licuit omnes, cum vidiſſem, totius rei cardinem in obſervandis certis iisque ſequentibus cautionibus verti:

1.) Proportionem quod attinet, multum intereſt, ſalia non niſi certa et determinata quantitate miſceri.

2.) Mixta haec ſalia non niſi moderatae temperiei auxilio aqua ſolvantur.

3.) Probe ſaturata ſolutio quam ſtudioſiſſime filtranda eſt, ea cautione, ne particularum ſalium ſubtilium non ſolutarum ulla per filtrum tranſeat.

4.) Vitra, in quibus experimenta inſtituuntur, ſolutione filtrata penitus replenda nec non operculo claudenda ſunt, quo impediatur, quominus ſiccae ſalis particulae liquoris ſuperficiei propter aëris contactum ad marginem aſſideant utpote quae ipſo experimento fallaciae occaſionem praebere poſſent.

5.) Cum ſalium ſolutiones inſigne frigus gignant; ſolutionis temperiem thermometri ope ſubinde explorare, haud ſuperfluum eſt.

6.) Caveatur quoque, ne experimenti tempore ſolutio refrigerationem iuſto gradu maiorem patiatur.

Singula haec ſi minus accurate obſerventur, facile poteſt fieri, ut ambo ſalia ſimul et promiſcue in cryſtallos concreſcant.

§. 10. Miſſis, quae hac de re inſtitui, ſingulis experimentis, id unum exponam, quod voti me perfecte compotem fecit:

Duas nitri et tres ſalis Glauberi uncias, mixtas et in pulverem redactas, quinque aquae purae unciis eo modo diſſolvi, ut vitrum, mixtionem hanc continens, aquae calidae 95 graduum immergerem. Poſteaquam ipſa ſolutio dictum temperiei gradum accepiſſet, et ſalis nihil iam ſolveret; eam adhuc calidam ſolicite filtravi, poſteaque in tria vitra operculo claudenda diffudi, et uni portioni nitri, alteri

vero

vero ſalis Glauberi cryſtallulum immiſi; tertiae nihil addidi. Immerſis poſtea vitris his aquae, glaciei ope ad [illegible] gradus usque refrigeratae, brevi tempore in primo vitro unicum nitrum, in ſecundo unicum ſal Glauberi cryſtalliſationem quam pulcherrimam ſubierant: in tertio autem vitro, cui nihil addidi, nullae prorſus oriebantur cryſtalli; frigore autem poſtea ad 15° usque gradus aucto, et nitrum et ſal Glauberi promiſcue cryſtalliſabantur.

Experimentum hoc licet prima fronte oblectamento, quam utilitati, magis inſervire videatur: tamen ſi de duobus inter ſe mixtis ſalibus e ſolutione a ſe invicem ſegregandis, id quod in chemicis laboribus non raro obtingere ſolet, quaeſtio ſit; haud exiguum uſum praeſtare iure exiſtimandum eſt.

§. 31. Conſtat diverſorum duorum ſalium a ſe invicem ſegregationem, uti varia eorum natura eſt, ita diverſa quoque facilitate perfici. Facilis iſta ſeparatio eſt: *primo*, ſi mixta ſalia ita natura ſua diſcrepant, ut eorum unum non niſi refrigerationis ope, alterum vero non niſi continuata evaporatione in cryſtallos coëat; vel, quod idem eſt ſi unius in calida aqua longe maior quam in frigida, alterius in utraque eadem quantitas ſolvitur; illius claſſis ſal Glauberi, huius ſal commune eſſe, novimus.

Secundo, ſi mixtorum ſalium unum, veluti tartarus vitriolatus, aquae copiam longe maiorem, quam alterum, veluti ſal polychreſtum ſeignette, ut ſolvantur, poſtulant.

Tertio

Tertio denique, ſi eorundem unum facile cryſtalliſatur, uti nitrum, alterum vero deliqueſcentis eſt naturae, uti calx vel magneſia ſalita.

Singulis his tribus in caſibus ſalium diverſorum ſegregatio nulla difficultate laborat.

At, aliter prorſus res ſe habet, eiusmodi diverſa ſalia una in ſolutione ſi contineantur, quae ſolubilitatis gradu vix inter ſe diſcrepant; vel quae ambo per refrigerationem in cryſtallos concreſcunt; vel denique quae unius fère formae cryſtallos ſingunt. Haec enim ſalia, dum cryſtallos formant, plerumque promiſcue praecipitantur, id quod eorum ſeparationi, fieri non poteſt, quin maximas opponat difficultates; atque hoc ipſo in caſu e ſupra deſcripto experimento haud mediocris utilitas redundare videtur.

§. 32. Fac, una in ſolutione et ſal Glauberianum et ſodam acetoſam contineri; tum principio, utrum horum ſalium alterum quantitate ſuperet, noſſe ſummopere intereſt, propterea quod ea, qua ſolutio abundat, ſalis ſpecies, ut prima ad cryſtallos revocetur, abſolutae neceſſitatis eſt.

Hunc igitur in finem redactae ad cryſtalliſationis punctum ſolutionis duae parvae portiones ſeorſim tractentur ita, ut uni ſalis Glauberi, alteri vero ſodae acetoſae cryſtallulum iniicias, hocque facto, exſpectes, donec appareat, utra duarum harum portionum ad formandas cryſtallos hoc adminiculo prima incitetur; ſi forte utraque pari facilitate cryſtallos deponeret, id indicio foret, nihil intereſſe, utrum ſal Glau-

Glauberi, an ſoda acetoſa ſolutioni primo loco addatur, ſi vero portionum illarum non niſi una cryſtallos format; tum illud ſal, cuius abundantia in ſolutione hac encheireſi ſe prodidit, ut ad formandas cryſtallos primum provocetur, neceſſe eſt.

Fingamus igitur, in ſolutione noſtra ſal Glauberi praepollere; tum ſolutioni ad cryſtalliſationis punctum redactae filtrataeque ſalis Glauberi cryſtalli ſubinde addantur eousque, donec iam non ſolvantur. Finita deinde ſalis Glauberi concreſcentia, ſuperſtiti liquori, nunc ſoda acetoſa abundanti, evaporatione denuo ad cryſtalliſationis punctum redacto, ſodae acetoſae cryſtalluli addantur. Alternae hae duorum horum ſalium additiones toties repetantur, donec utriusque ſalis in cryſtallos concreſcentia prorſus fuerit ad finem perducta.

§. 33. Etſi non niſi eiusmodi ſolutiones, duas tantum diverſas ſalium ſpecies quae continebant, hucusque tentaminibus meis ſubieci: nullus tamen dubito, quin artificium illud meum iis quoque in lixiviis, quae plura ſalia ſimul complectantur, parem utilitatem ſit praeſtiturum.

§. 34. In fine diſſertationis meae, cautelam ſilentio praetermittere non poſſum, qua obſervanda ut certe ſuccedat regularium cryſtallorum formatio, in artificii mei adplicatione ſummopere opus eſt. Paragrapho [illegible]. aſſerui quidem, ſolutiones iſtas ſucto prorſus modo tractandas eſſe; enim vero ipſum cryſtalliſationis punctum quod attinet, ſolutionum evaporationem non plane eousque, ac fieri aſſolet,

let, continuari convenit: ſed potius finiri oportet eam ſimulac contentum in ſolutione ſal, finita refrigeratione, ob ſuperrefrigerationem ad formandas cryſtallos ſua iam ſponte pronum eſſe conſpicitur. Qua cautione obſervata, ſi evaporatae ſolutioni, dum refrigeſcit, homogenii ſalis cryſtallulus adiicitur; fieri non poteſt, quin pulcherrimae cryſtalli concreſcant.

§. 35. Moneri id quoque non alienum eſt, ſal homogeneum ſiccum calidae adhuc, neque iam refrigeratae prorſus, ſolutioni addi debere: quod ſi fieret, ſolutio quidem ad generandas cryſtallos ſtatim utique diſponeretur, enim vero intempeſtiva haec et tarda nimis cryſtallorum formatio perinde, ac ſpontanea, non turbulenta eſſe non poſſet.

§. 36. Id etiam lubens concedo, artificii mei in ſalibus tantum ſolutu facilioribus praecipuum uſum eſſe; in iis vero, quae, ut ſolvantur, admodum largam aquae copiam requirunt, uti calx vitriolata et tartarus vitriolatus, nec non in iis, quae, uti ſal commune, calida et frigida aqua pari copia ſolvuntur, id nullius omnino utilitatis eſt.

§. 37. Poſtremo et id addere libet, detectam a me et in hac diſſertatione expoſitam ſalium proprietatem phyſico-chemicam in eo potiſſimum conſiſtere, quod non niſi homogeneorum ſalium particulae ſimilares aggregationis affinitate in ſe invicem gaudeant, quae eadem, tantum abeſt, ut inter heterogeneorum quoque ſalium particulas locum obtineat, ut eae potius repulſivis in ſe invicem viribus agere videantur; quibus inprimis proprietatibus inventi a me ſalium cryſtalliſationem iuvantis artificii vis et utilitas nititur.

ENV-

ENVMERATIO MINERALIVM
QVORVNDAM RARIORVM IN MVSEIS NONNVLLIS PETROPOLITANIS OBVIORVM.

Auctore
BASIL. SEWERGIN.

Conventui exhib. die 30 Apr. 1795.

Celeber. Ferberus quondam noſter in Actis academiae noſtrae rariorum quorundam mineralium, quae in Muſeis nonnullis extraneis obſervare ipſi licuit, enumerationem expoſuit. Exempli utilitate incitatus Mineralia quoque ea, in Muſeis Petropolitanis quae adnotavi, deſcribendi conſilium cepi, illa praeſertim, quae in variis Imperii Roſſici regionibus occurrunt nec dudum detecta ſunt, ut pote quorum notitia et patriae utilis, nec hodienum ſatis divulgata eſt. Ob magnam autem eorum, quae enumeranda ſunt, copiam, et quorum ſingula integrae diſſertationis materiam ſuppeditare poſſent, heic amplas deſcriptiones non exſpectandas eſſe, facile patet. Breviter ergo, quidquid mihi obſervare licuit, exponam, idque eo tantum fine, ut mineralia eiusmodi memoratu digna ab oblivione vindicentur. Novas ſpecies ſi heic afferre mihi non datur, Mineralogis tamen acceptum fore arbitror, varietates quoque, ut cel Ferberus ait, cognoſcere, quotquot exiſtunt, omnes, et

loca omnia, ubi inveniantur. Saltem novis argumentis hic comprobabitur, quantis Ruthenia divitiis mineralogiam iam locupletaverit, et quanta eius augmenta etiamnum ſperanda forent, ſi peregrinatores perſcrutandis montium, qui eam permeant, viſceribus operam ſuam impenderent.

Ea quae iam in Patria noſtra detecta ſunt, mineralia quod attinet, geographice in duas claſſes diſtribui poſſunt, quarum I^{ma} ea, quae patria cum aliis regionibus communia habet, mineralia, 2da autem quae illi propria ſunt complectitur. Denique claſſis tertia eorum erit, quibus omnino caret Ruthenia, de quibus autem alio loco exponere conſtitui.

Eorum, quae ad primam claſſem pertinent, adeo ingens eſt numerus, ut ad totius fere mineralogiae ambitum referantur, neque hic allegari, eam ob cauſam, queant. Quod autem ad ea, quae Rutheniae ſunt propria, attinet, iis ſequentia iure annumeranda ſunt: Beryllus et Aquamarina mirandae magnitudinis, Quartzum roſeum amorphum, a quartzo roſeo cryſtalliſato, quod prope Feldkirch in Carinthia reperitur, diverſum, e Coliwan; Schoerlum roſeum e vico Sarapulskoy, Lapides ſic dicti marecanenſes, Zeolitharum proprietates ut a me detectum eſt, prae ſe ferentes, vitrum Ruthenorum, cuius tabulas unius et amplius ulnarum latas non dudum vidi, Mica criſtalliſata, granatus viridis, Hyacinthum viluienſe, Corneus albus dendriticus e Colywan, Brecciae nonnullae, Gneuſſum arenaceo talcoſum Catarinopolitanum, Baikalites, Cyanitharum varietas. Calcedonius caeruleus. Feldſpathum viride et labradoricum, Ferrum nativum, Magnes, Spathum plumbi rubrum et vitreum,

treum, Cupri nativi ſpecimina elegantiſſima, Malachiti moles, Malachites in carneolo, Malachites criſtalliſatus, Minerae cupri vitreae rubrae criſtalla octaëdrica, parva, ſolitaria, viridi montano obtecta, *Aſchirk* Buchariae, id eſt viridis montani varietas pellucida, forma Smaragdi cryſtalliſata, Cuprum arenaceum, Cuprum rubrum ſtalactiticum, Minera aluminis butyracea, ochrae plumbi, ſpecies denique varietatesque ſequentes:

1.) *Schoerlus* griſeorubeſcens, opacus, prismatibus arcte iunctis adhaerente mica argentea, ſecundum nonnullorum opinionem, matrix Schoerli roſei, e montibus prope vicum Juſchakowa territorii Alapaiewskoy.

2.) *Corneus roſeus* nonnullorum, ſaepiſſime magneſia nigra perfuſus, nonnunquam dendriticus, in tenuibus tabulis ſemipellucidus, polituram iaspidis inſtar elegantiſſimam admittens, atque conficiendis annulis, tabulisque inſerviens. Lapidis ſpecies non dudum detecta, et examini chymico eo magis digna, quod Magneſiae rubrae a celeber. la Peyrouſe in Pyrenaeis obſervatae ſimillima eſſe videtur, e monte prope vicum Schibrach 25 ſtadiorum Roſſicorum a Catharinopoli.

3.) *Criſtallus montana* fuſca, prismate hexaedro, et pyramide tetraëdra utraque extremitate terminata, ſuperficie vero Carneolo luteo et ſtalactitico obducta, non procul a vico Juſchakowa territorii Alapaiewskoy.

4.) *Tremolites* fibris longis argentei vel nivei coloris, in Feldſpatho albo, paſſim mica argentea mixta, ad

Oo 2 flu-

flumen Sliudenka in Auſtrali ſine Baikali lacus; Tremolithis varietas helvo colore invenitur etiam in Avanturinis noſtris Catharinopolitanis; Tremoliten denique flavam in Marmoribus nonnullis Carelienſibus obſervavi.

5.) *Criſtallus ponderoſa* Ruthenorum, id eſt Topazii veri varietas ponderoſiſſima criſtallis tetraëdris per longitudinem ſtriatis et apice piramidali terminatis, druſae forma ſuper quartzum ferrugineum, e Catharinopoli.

6.) *Spathum hebraicum*, id eſt Feldſpathi varietas amorpha, nec niſi raro criſtalliſata, communiter coloris albi vel ex albo flaveſcentis, raro autem越 virideſcentis, venis quartzi fusci parallelis fiſtularum organicarum inſtar traiectum, quarum exeuntes extremitates in fractura transverſali ſimilitudinem litterarum hebraicarum exhibent, quo fit, ut politum, faciem elegantiſſimam oſtendat, praeſertim in ea ipſius varietate, ubi color albus in argenteum vergit. Nonnunquam exeuntes extremitates tabularum vel fere criſtarum forma terminantur, nonnunquam forma piramidali criſtalliſatae ſunt, quarum ſeries novam illius elegantiam conſtituit. Saepe micam nigram vel argenteam, interdum forma tabulari apice acuto ciſtalliſatam in ſuperficie continet; quaedam illius ſpecimina partim ochra ferri ſunt obducta, alia praeterea ſchoerlum nigrum priſmaticum, alia minores feldſpathi criſtallos continent; invenitur prope vicum Alabaſchka territorii Alapajewſkoy Catharinopoli.

7.) *Spathum oſſeum*, alia Feldſpathi varietas, plerumque criſtalliſata, coloris lutei cum venulis quartzi paral-

rallelis tenuiſſimis, quae ei ſimilitudinem oſſis vindicant, eodem loco.

8.) *Quartzum* fuſcum amorphum, asbeſto albo capillari plene perfuſum, prope vicum Schaitanka territorii Alapajewſkoy.

9.) *Schoerlum* ſic dictum *Konſtantinowienſe*, aciculare, album ſplendens. In ſerpentino griſeo virideſcente, miculis ſpathi calcarei immixtis, e monte Konſtantinowienſi ad vicum Guſſewa 30 ſtadiorum roſſicorum a Catharinopoli.

10.) *Feldſpathum* rubrum cum criſtallis quartzi et ſuperinſidente cupro nativo reniformi ex Inſula Medweſchei.

11.) *Feldſpathum* rubro luteum cum adhaerente galaena plumbi, quae ſecundum experimenta cel. Lowitzii ne minimam quidem argenti particulam, et in centenaria maſſa 38 part. plumbi, 18 ferri calcinati, 10$\frac{3}{5}$ ſulphuris et 23$\frac{2}{5}$ matricis continet, e monte prope caſtrum Dawidoff in Fionia.

12.) *Plumbago* (Graphites Werneri) ad conficienda ſtila aptiſſima, maſſis pondere nonnullarum librarum, pura, nulli matrici adhaerens e monte prope Neuſchlott in Fionia; quaedam eius ſpecimina compacta, alia vero, ut mihi obſervare licuit, ſchiſtoſa ſunt.

13.) *Molybdaena* in Quartzo compacto albo vel luteo ochraceo ex Selenginſk.

14.) *Molybdaena* in ſuperficie aquamarinarum, foliata, mollis, e Dauria.

15.)

15.) *Lignum* ferro mineraliſatum ochraceum cum criſtallis minerae plumbi albae minutiſſimis ſparſim adſperſis, e Nertſchinſk.

16.) *Criſtallus montana* albi coloris, et notabilis magnitudinis, minera cupri picea obducta, quae ipſa viridis et coerulei montani partim criſtalliſati maculis tecta eſt, e montibus Catharinopolitanis.

17.) *Succinum* flavum in territorio Kiewienſi fortuito detectum, elaſticum?

18.) *Globuli pyritacei*, elegantiſſimi, ſolitarii, flavi, ſplendentes, e vico Sagorka territorii Sophiae non procul a Petropoli.

19.) *Tufa vulcanorum* griſea, compacta, facie terrea, cum criſtallis ſchoerli nigris, planis, priſmaticis e vulcano Inſulae Unalaſka.

20.) *Matrix calcedoniorum* ſic dicta, granuloſa, coloris viridis, intermixtis particulis quibusdam micantibus, cum maculis ochraceis, et globulis ſiliceis, ſtrata conſtituit ad flumen Urack.

21.) *Gypſum album* compactum, ab una parte adhaerente argilla albogriſea, quam innumerabiles venulae ſeleniticae parallelae permeant, ab altera vero terra calcarea carnei coloris tectum, ad flumen Kama.

22.) *Serpentinus granuloſus* virideſcens, granulis talcoſis micantibus, facile friabilis e monte non procul a vico Koſſobrodſkoy territorii Catharinopolitani.

23.)

23.) *Granatum compactum* viride, cui granati lutei criſtalli inſident, cum quartzo albo pingui et ſpatho calcareo albo vel etiam cum Feldſpatho rubro mixtum e fodina cuprifera Schiloffskoy territorii Catharinopolitani.

24.) *Spathum calcareum* flavum criſtalliſatum piramidale trigonum cum innumeris criſtallis cubicis fluoris, colore viridi, matrici ferrugineae partim ochraceae ſuperpoſitis, quarum mixtio fruſto faciem elegantiſſimam conciliat, e fodina ad vicum Kadajnſkoy in Nertſchinſk.

25.) *Terra viridis* friabilis, aciculis quibusdam micantibus intermixta, e monte Tennisberg prope Reval in Livonia.

26.) *Terra tripolitana* flava, reperitur ad flumen Pyſchma prope vicum Rogatſchewa territorii Catharinopolitani.

27.) *Terra Tripolitana* griſea globulorum inſtar conglomerata, territorii Catharinoſlawiani.

28.) *Hornblende* griſeo-flava, partim talco mixta, reperitur non procul a vico Kultajew territorii Alapajewſkoy.

29.) *Magneſia nigra* Stalactitica ſuper Quartzum granuloſum e Nertſchinſk.

30.) *Globus calcedonii* (Geodes) intus criſtallis amethyſteis repletus, quibus inſident cryſtalli ſpathi calcarei, adfuſo asphalto, reperitur iuxta littus Baikali lacus.

31.)

31.) *Galaena plumbi ſtriata* (Striperz) cum ochra terri plumbea et argilla minerali, e fodina Savinſkoy in Nerſchinſk.

32.) *Spathum ponderoſum* compactum, Spathum ponderoſum foliatum et Spathum ponderoſum undulatum, albi coloris, maſſis nonnullarum librarum, e monte Smejewſkoy Colywaniae. Saepe etiam Saxum illud corneum griſeum eodem loco, incluſum argentum nativum auriferum, Lunam corneam, et ceteras argenti mineras continens, ſpatho ponderoſo copioſe mixtum et arcte cum eo iunctum eſt.

33.) *Spathum ponderoſum* carnei coloris foliatum, et in ſuperficie criſtarum inſtar criſtalliſatum, exacte refert illud, quod in Hertzynia reperitur, e fodina ferraria Koikoſerſkoy in Olonetz.

34.) *Lapis piceus* (Pechſtein) opacus, ad tactum pinguis, nec vitreus ut quaedam peregrinorum ex. gr. Francofurtiana varietas, compactus, nec niſi raro terreus, diverſi coloris, qui multas ipſius varietates conſtituit, ſicut albus, lacteus, griſeus, ruber, fulvus. flavus, carnei coloris, violaceus, ruber cum ſtriis vel maculis flavis, ruber forma brecciae maculis albis, griſeus variegatus etc. An bolo indurato originem debeat? E fodine Nicolajewſkoy territorii Semipalatnoi ad flumen Uba 69 ſtadiorum Roſſicorum a fodina Smejewſkoy.

35.) *Terra fullonum* Belewſkiana, territorii Tulajenſis, coloris griſeo rubeſcentis, inquinans, aqua facile ſolubilis, ſabulo omnino deſtituta.

36.) *Terra fullonum* e Bogoroditzk eiusdem territorii, griſeo fuſca, rudis, durior, aqua difficilius ſolubilis, maculis paſſim ochraceis inquinata.

37.) *Terra fullonum* Symphiropolitana Crimaeae, griſea, compacta, ad tactum pinguis, cornu ſimillima, optima. An ſpuma maris mineralogorum, vel *Kil* Tartarorum.

38.) *Terra fullonum* Catharinoſlawiana non procul ab urbe Catharinoſlaw, griſeoalba, facile friabilis, ad linguam adhaerens, ad tactum pinguis, inquinans, aqua facile ſolubilis, eamque lactis inſtar tingens, ſed parum cum ea intumeſcens, oleum cito abſorbens, cum acidis non efferveſcens, pura, nonniſi particulis arenaceis intermixta, quarum ſecundum experimenta Cel. Lowitzii 4 partes in centenaria maſſa continet.

39.) *Whiterites* ſtriis magis diſtinctis ac in Anglicano, vel potius radiis arcte iunctis ac in Schoerlo, criſtallinus, ſemipellucidus, colore griſeo-albeſcente, terra whiteritica alba in ſuperficie adſperſa, e monte Smejewſkoy Kolywaniae.

40.) *Ochra terri coerulea*, vel coeruleum Berolinenſe nativum, maſſis magnitudinis notandae, friabilis, inquinans, levis, reperitur non procul a vico Katajnſkoy territorii Dalmatzkoy.

41.) *Coeruleum Berolinenſe nativum* cum Schoerlo fasciculato nigro incluſo, e Crimaea.

42.) *Concha petrificata*, intus coeruleo Berolinenſi nativo repleta, cum prominentibus Hornblendae nigrae criſtallis radiatis, e Crimaea.

43.) *Spathum ponderoſum*, ochra ferri rubra et lutea tinctum, cum adhaerente argilla minerali alba et terra argentifera nigra, quae metalli nobilis adeo dives eſt, ut ex maſſa 40 librarum (1 pud Ruthenorum) unam ad 9 usque libras argenti in operatione docimaſtica praebeat, e fodina Salajirſkoy in tractu Soimonowſkoy in Nertſchinſk.

44.) *Lignum Betulae* ferro mineraliſatum, ochraceum, fibris tamen et cortice plane viſibilibus, e fodina Dworetzkoy ad fontem martialem in Olonetz.

45.) *Avanturinus* baſi quartzoſo mica aurea (vel in alia eius varietate mica argentea) plene perfuſus, ad viam Tobolſkianam 30 ſtadiorum Roſſicorum a Catharinopoli repertus.

EXPE-

EXPERIMENTORVM CIRCA SVMMAM SPIRITVS VINI DEPHLEGMATIONEM A ME INSTITVTORVM EXPOSITIO.

Auctore
TOBIA LOWITZ.

Conventui exhib. die 29 Octob. 1795.

§. 1.

Spiritus vini, memorabile illud naturae artisque productum, cuius multifarius uſus tam in medicina quam variis artibus rebusque oeconomicis immo in ipſa chemia latiſſime patet, dignus ſane eſt, cuius ſummae ab omni heterogenea materia, proprias ipſius vires debilitante ac alterante, depurationi omnis, quantum fieri poteſt, opera impendatur; puriſſimo enim eiusmodi ſpiritu ad ſubtiliora praecipue experimenta chemica et ad parandas varias vernices opus eſſe, chemicorum fugit neminem.

§. 2. Chemicos uſus quod attinet, in iis praecipue operationibus omnis omnino aquae expers requiritur ſpiritus, quibus variorum ſalium in eo ſolubilitatis gradus ſtabilire propoſitum eſt. Omnia enim ſalia cum ſolvantur aqua; facile eſt perſpicere, ſpiritum aqua mixtum, quam purum, plus

plus ſalis eſſe ſoluturum, cum et aqua in eo contenta ſolvendis ſalibus ſua quoque ex parte inſerviat. Praecipue autem ſumma hac in re cautione opus eſt, quando ſalia ſpiritu omnino non ſolubilia ab illis, quae eo vix ac ne vix quidem ſolvuntur, exacte diſtinguere volumus; quantumvis enim parvam aquae copiam ſi contineat ſpiritus; facile eiusmodi in experimentis fieri poteſt, ut eorum quoque ſalium, quae ſolvendi puro ſpiritui nulla plane poteſtas fuiſſet, non nihil eo ſolvatur, hincque, qui aquae proprie debetur effectus, ſpiritui erroneo iudicio attribuatur.

§. 3. Spiritus vini ob inſigne ipſius permultis aliis cum ſubſtantiis conſortium, ſub prima potiſſimum ipſius productione, varias recipit partes heterogeneas, quarum princeps et variis quidem diſquiſitionibus chemicis maxime inimica aqua certe eſt.

§. 4. Duae hae ſibi invicem amiciſſimae, ſed diverſiſſimae natura ſua ſubſtantiae, connubio iunctae, altera alterius in alia corpora effectus mirum in modum mutuo perturbant; quam ipſam ob cauſſam eas a ſe invicem perfecte ſegregari, multis in operationibus chemicis ſummi utique momenti eſt.

§. 5. Spiritus et aqua corpora ſunt volatilia, eo tamen diſcrimine, ut ille huic volatilitatis gradu antecellat; hancque ob cauſſam maxima quidem aquae pars ſimplici eaque ſaepius repetenda deſtillatione, ſed ea tamen lege, a ſpiritu ſeparatur, ut, quae priores tranſeunt, deſtillati partes minori ſemper, quam ſequentes, aquae copia impraegnatae deprehendantur.

§. 6.

§. 6. Iſte tamen dephlegmandi modus terminos ſuos habet; eadem enim ratione, qua contenta in ſpiritu aquae copia diminuitur, ſpiritus aquae in ipſo ſuperſtitis tenacior et aqua ſeparatu difficilior evadit, ita, ut, quae ultima quaſi reſtat aquae portiuncula, hoc artificio neutiquam ſeparari a ſpiritu queat; praeterea methodo huic id quoque incommodi ineſt, quod per eam ea ſolummodo conditione concentratiorem quidem illum, ſed neutiquam perfecte dephlegmatum obtineamus ſpiritum, ubi nempe dephlegmatio haec magna cum ſpiritus quantitate inſtituitur.

§. 7. His commoti difficultatibus varia chemici in auxilium vocaverunt additamenta eiusmodi materiarum, quae, ob proprium ſuum cum aqua conſortium, intimum eiusdem cum ſpiritu nexum vel debilitarent vel prorſus omnino diſſolverent; quorum in numero ſal tartari primum certe locum ſibi vendicat, eam inprimis ob cauſſam, quod nulla plane in ipſum ſpiritum vi deſtructrice polleat; dum contra, quae ſimilem quoque in finem commendantur, calx viva et alcali cauſticum, quamquam maiori particulas aqueas eripiendi efficacia gaudent, ipſam ſpiritus mixtionem afficiunt eiusque indoli non nullam mutationem afferunt.

§. 8. Circa ſummam ſpiritus dephlegmationem experimenta ſuſcepturo mediis ſecurioribus opus eſt, quibus ſpiritus unius prae altero maiorem minoremve puritatis ſtatum diiudicare valeat. Variis quidem hunc in finem utuntur mediis: pulcherrime tamen ac tutiſſime cuiusvis ſpiritus puritatis gradus gravitate ipſius ſpecifica diſcernitur; cum enim aqua multo ſit ſpiritu ſpecifice gravior; ſpiritus pro varia aquae copia in eo contenta varia quoque gravitate

tate

tate ſpecifica pollet, ita, ut qui ſpecifice leviſſimus eſt, idem quoque puriſſimus cenſeri ſpiritus debeat.

§. 9. In variorum inter ſe comparandorum ſpirituum gravitatibus ſpecificis explorandis duas potiſſimum ſummo ſtudio obſervari cautiones neceſſe eſt: Primo nimirum ſpiritum non niſi altero poſt eius deſtillationem die examini huic ſubiici, et ſecundo ipſum hoc ſingulorum ſpirituum examen ſub aëris temperatura perfecte eadem inſtitui opus eſt; his enim cautionibus neglectis, erroris evitandi nulla ſpes eſt, cum unus idemque ſpiritus pro temperaturae varietate et ob variam inde oriundam voluminis vel expanſionem vel contractionem, varia quoque ſe induat gravitate ſpecifica. Teſtantibus experimentis a Celeb. Borries *), ex propoſito hac de re cum ſpiritu rectificatiſſimo inſtitutis, denſitatis eiusdem pro variis temperaturae gradibus variatio ita ſeſe habet:

Scala Reaumuriana.			Gravitas ſpecifica.
+ 10°.	—	—	$820 \frac{1000}{5055}$.
15°.	—	—	$817 \frac{65}{5055}$.
20°.	—	—	$813 \frac{2285}{5055}$.

§. 10. Autores celeberrimi variam ſtabiliverunt ſpiritus rectificatiſſimi gravitatem ſpecificam. Poſita enim aquae denſitate = 1000; eam ſpiritus rectificatiſſimi ſtatuit Briſſon = 837; Bergmannus = 820, et Muſchenbroek = 815. **). Atque ego quidem propriis meis experimentis de induſtria

*) Nicholſons Anfangsgründe der Scheidekunſt 1791. pag. 503.

**) Grens ſyſtematiſches Handbuch der Chemie der erſten Ausgabe 2ten Theils 1ſter Band §. 1622.

duſtria huius rei gratia multoties ac ſumma diligentia inſtitutis, ſpiritum, ſalis tartari beneficio et conſueta hodienum methodo depuratum ad gravitatem ſpecificam ea, quam Muſchenbrock ſtatuit, multo minorem reduci non poſſe, certo certius evictum habeo. Nec enim, niſi unica vice, ſpiritum iſta methodo ad eum usque puritatis gradum perducere mihi licuit, ut denſitatem = 812 nactus eſſet.

§. 11. Ob aquae maiorem cum ſale tartari, quam cum ipſo ſpiritu, affinitatem, ſal hoc ſpiritui aquoſo additum, accedente vitri agitatione, aquam attrahit et brevi in liquorem, qui vitri fundum occupat, et cui ſpiritus aqua liberatus ſupernatat, ſolvitur. Hoc inducti phoenomeno ita ſenſerunt complures chemici, ut, ſpiritum omni plane aqua iam liberatum eſſe, putarent, ſimulac ſalis tartari ſicciſſimi portiuncula ſpiritui iniecta, ſub diuturna etiam vitri concuſſione, ſicca prorſus permaneret.

§. 12. At alcoholis puritatem ſcrutandi methodum hanc egregie fallere poſſe, eo praecipue nomine ſuſpicari licuit, quod ſpiritus eiusmodi, ſicuti ſequenti experimento comprobabitur, cum ſale tartari cautiſſime tractatus et diſtillationi ad ſiccitatem usque ſubiectus ita ſeſe gerat, ut, quae prima tranſit eius portio ſpecifice leviſſima, ſubſequentes vero graviores, et ultima demum graviſſima deprehendantur; dum contra, ſpiritus omnis materiae heterogeneae perfectiſſime expers, et deſtillationi commiſſus ita ſe, mea quidem ſententia, habere debeat, ut priſtina eiusdem gravitas ſpecifica ad ſummum deſtillationis finem usque ne minimam quidem ſubire mutationem, reperiatur.

EX-

EXPER. I.

Vnicas 16 ſpiritus rectificati gravitate ſpecifica 852, pollentis, *) Sale tartari ſicciſſimo et conſueto procedendi modo ſumma, quantum potui, diligentia aqua liberavi. Impenſis huic negotio 7 ſalis unciis, 92 drachmae ſpiritus dephlegmati, gravitatem ſpecificam 827 exhibentis, remanſerunt. Hunc ſpiritum tartariſatum per retortam ad ſiccitatem usque leniſſimae deſtillationi ea lege ſubieci, ut eius tranſeuntis tres portiones ſeorſim exciperem, quae reſpectu quantitatis et gravitatis ſpecificae ita ſeſe habuerunt:

	drachmae.		gravitas ſpecifica.
No. 1.	36.	—	812.
— 2.	40.	—	813.
— 3.	13.	—	817.

Spiritus ex tribus his portionibus mixti gravitas ſpecifica = 815. fuit.

NOTANDA.

1.) Maior illa, qua ſpiritus hic ante deſtillationem gaudebat gravitas ſpecifica a particulis alcalinis, inter deſtillationem in retorta remanentibus, ab eoque receptis, repetenda eſt.

2.) Idem hoc experimentum quando maiori ſpiritus copia inſtituitur, gravitates ſpecificae ſingularum deſtillati ſpiritus portionum non tantum longe magis a ſe invicem diſcre-

*) Monendum in univerſum hic loci mihi eſt, me ſingulas gravitates ſpecificas, per omnem diſſertationem hanc expoſitas, ſemper ad temperaturam + 16 graduum ſcalae Reaumurianae exploraſſe.

diſcrepant, ſed ex ultima adeo transgreſſi ſpiritus portione ſalis tartari beneficio aquae non nihil reapſe educi adhuc poteſt, id quod luculentiſſimo documento eſt, ſpiritum ſola ac ſimplici cum ſale tartari mixtione particulis aqueis neutiquam perfecte liberari poſſe.

§. 13. Chemicorum complures methodi huius defectum dudum edocti, ſpiritus tartariſati rectificationem ea lege inſtitui commendaverunt, ut prima tantum tertia eiusdem pars prolecta, ceu ſubtiliſſima, et quam omnis aquae perfecte expertem putaverunt, ſeorſim aſſervaretur.

§. 14. Verum enim vero hanc quoque, ſubtiliorem quidem illam alcoholis partem, neutiquam omni aqua liberam eſſe, comperi, quotiescunque enim novae eam ſubiicere rectificationi volueris, priorem tranſeuntem partem ſubſequente ſpecifice aliquantulum leviorem nunquam non reperies. Atque ſic taedioſiſſimo nec non valde diuturno labore ex 20 ſpiritus rectificatiſſimi ordinarii libris duas tantummodo uncias ad eum demum ſubtilitatis gradum perducere mihi licuit, ut gravitate ſpecifica = 806 gauderent.

§. 15. Summam eiusmodi dephlegmationem ſpiritus vini poſtquam aliquo iam ex tempore magnopere exoptaſſem, omniaque, quae ad eam perficiendam conducere viderentur, ſaepiuſcule apud me perpendiſſem; in mentem mihi venit experiri, ecquid eventurum eſſet, ſi alcohol ſalis tartari ope ſueto modo a maxima aquae copia iam iam depuratum ſuper tanta ſalis huius ſicciſſimi abſtraheretur copia, qua ipſum alcohol omne omnino abſorberetur, eiusque plane nihil prorſus ſali in retorta detento ſupernataret. Spes enim mi-

hi affulgebat, forſan fieri poſſe, ut ſalis tartari facultas particulas aquoſas eripiendi hoc artificio haud mediocriter augeatur, quo ſcilicet ſalis huius intimus cum univerſis et ſingulis ſpiritus particulis isque continuus contactus efficeretur. Summa igitur felicioris ſucceſſus ſpe commotus, hoc experimentum inſtitui.

EXPER. II.

Spiritus rectificatiſſimi tartariſati ac rectificati, gravitatis ſpecificae = 816, uncias 28 retortae capaciori immiſi, iisdemque admiſcui ſalis tartari probe ſiccati libras 6, quibus ſpiritus, ſenſibili calore orto, omnis plane abſorbebatur; quo facto, retortam arenae balneo impoſui. Adplicato excipulo, et, ut ſalis diuturnior cum ſpiritu contactus eſſet, omnibus in priſtino ſtatu, per duos dies relictis, deſtillationem moderato igne adgreſſus ſum. Spiritum facillime tranſeuntem quaternis portionibus excepi, nec niſi ſub finem deſtillationis ad expellendam aquam, admodum parvam adhuc ſpiritus copiam vehentem, vehementiſſimo igne opus erat. Singulas ſeorſim exceptas deſtillati huius ſpiritus portiones pondere et gravitate ſpecifica maxima mea voluptate ita ſeſe habere, deprehendi:

	drachmae;	gravitas ſpecifica.
No. 1.	— 49.	— 791.
— 2.	— 43.	— 791.
— 3.	— 92.	— 793.
— 4.	— 16.	— 805.
— 5.	— 48.	— 988.

NO-

NOTANDA.

1.) Docente feliciſſimo huius experimenti eventu, in aprico eſt, eos qui alcohol ſueta hactenus depurandi methodo paratum et gravitatem ſpecificam 815 exhibens, omni aqua liberum prorſus eſſe, exiſtimaverunt, longe a veritate aberraſſe, et ſpiritum ſub frigida ipſius cum ſale tartari dephlegmatione aliquam ſemper eamque determinatam ac ſatis magnam aquae copiam ſumma tenacitate retinere: quam vero noſtro artificio feliciter divelli ab eo poſſe, iam evictum eſt.

2.) Nec id in experimento noſtro parvi momenti reputandum eſt, quod ipſa adeo, tantum non ultimo, transgreſſi ſpiritus portio, non obſtante phlegmate eam immediate ſubſecuto, eminentiori adhuc praedita fuerit ſubtilitate, quam ſpiritus ipſe experimento impenſus.

3.) Monendum quoque eſt, me, experimentum hoc cum ſaepius novo cum ſpiritu repeterem, omnia ſimili plane modo ſeſe habere prioresque transgreſſi ſpiritus portiones nunquam non eiusdem, quam dixi, gravitatis ſpecificae = 791 deprehendiſſe.

4.) Remanens in retorta, ſeparato per vehementiorem ignem omni phlegmate, ſal tartari neutiquam ſub concreta forma ſed laxi pulveris ad inſtar deprehenditur, ex quo ipſo id inſigne commodum proficiſcitur, ut una eademque ſalis quantitas plus una vice idque absque eo, ut eam e retorta eximi opus ſit, nova alcoholis depurandi copia impraegnari queat.

§. 16. Vt in ſumma alcoholis depuratione nihil intentatum relinquerem, neceſſarium duxi, experiri, ecquid eventurum eſſet, alcohol dicto procedendi modo ad inſignem illum puritatis ſtatum iam deductum ſi novae ſimili tractationi ſubiiceretur.

EXPER. III.

Vnciis 40 eiusmodi alcoholis gravitatis ſpecificae = 793. retortae infuſis ſalis tartari ſicciſſimi libras ſex addidi, quibus alcohol omnino prorſus abſorbebatur. Praeterlapſo 24 horarum ſpatio, igne moderato deſtillationem ſuſcepi, tranſeuntemque ſpiritum ſequentibus 8 portionibus excepi, quarum ſeptima, ut transpelleretur, multo auctum, octava, purum fere phlegma exhibens, vehementiſſimum ignem poſtulavit.

	Drachmae.	Denſitas.
No. 1.	— 52.	— 791.
— 2.	— 49.	— 791.
— 3.	— 54.	— 791.
— 4.	— 55.	— 791.
— 5.	— 42.	— 791.
— 6.	— 35.	— 792.
— 7.	— 25.	— 844.
— 8.	— 4.	— 998.

§. 17. Experimenta haec multoties et maiori etiam quantitate repetita, dum nimirum 13 Alcoholis tartariſati libras ſimul ſuper 35 ſalis tartari ſicciſſimi libris abſtraherem,

rem, eundem ſemper effectum exhibuerunt, gravitatem nempe alcoholis ſpecificam = 791; qua ipſa pulcherrima eventus conſtantia methodus haec noſtra haud contemnendam ſibi vendicat praeſtantiam, cui accedit, quod ſpiritus per eam ad longe maiorem, quam vel unquam hodienum, ſubtilitatis ac puritatis ſtatum perducitur.

§. 18. Experiendi gratia, concentratiſſimus hic ſpiritus, ubi ſimplici rectificationi ſubiicitur, quomodo ſeſe habiturus ſit, experimentum ſequens inſtitui.

EXPER. IV.

Alcoholis illius gravitate ſpecifica = 791. pollentis libras 6 ſine ullo additamento per retortam ad ſiccitatem usque evocavi, ea cautione, ut moderatiſſimo igne ebullitionem eiusdem ad ipſum usque deſtillationis finem penitus impedirem. Finita hac deſtillatione, ſingulae ſeparatim exceptae transgreſſi ſpiritus portiones, quin ipſa adeo ultima, magna mea cum voluptate eamdem accuratiſſime, qua ſpiritus hic ante rectificationem iſtam praeditus fuit, gravitatem ſpecificam = 791 exhibuerunt.

§. 19. Cum igitur experimentis ſumma cura inſtitutis certo certius compertum mihi habeam, alcoholis ad propoſitam meam methodum parati ſubtilitatis gradum neutiquam intendi ultra poſſe, cumque alcohol hoc ſimplici ac lentae rectificationi ſubiectum ita ſeſe gerat, ut ipſa adeo ultima illius pars transgreſſa eundem prorſus ac prima denſitatis gradum exhibeat; nullum plane ſupereſt dubium, quin ſpiritus hic omnibus iam iam particulis aqueis perfectiſſime omnino liberatus ſit.

§. 20.

§. 20. Cum igitur ſpiritus novo hoc procedendi modo reapſe ad ſummum puritatis ſtatum perductus eſſe iure cenſeri debeat; haud ſuperfluum duco, omnes quae in hoc negotio obſervandae ſunt, procedendi regulas iunctim exponere.

Spiritus vini optime rectificati copiae pro lubitu ſumtae repetitis vicibus et ſueto methodo ſub frequenti vitri agitatione ſal tartari ſicciſſimum eousque addatur, donec ultima decantato ſpiritui iniecta ſalis portio nullo modo amplius madeſcat et ſicci pulveris formam conſervet. Hac operatione praemiſſa, retorta ſicca ſale tartari recens ſiccato calido adhuc et cribrato impleatur, eidemque confeſtim non niſi tanta ſpiritus illius copioſiori iam iam phlegmate orbati copia affundatur, quae a ſale in retorta herente penitus abſorbeatur ita, ut in ſuperficie eius nihil prorſus liquoris ſupernatantis conſpiciatur: (communiter duae ſalis partes unam ſpiritus partem perfecte abſorbent.) Hoc facto, retorta arenae balneo immergatur excipulumque intus probe ſiccum adplicetur. Omnibus ſic adornatis ac per diem et noctem, nullo admoto igne, relictis, altero denique die deſtillatio leniſſimo igne inſtituatur, ita, ut ſingulae guttae duorum ſecundorum intervallo ſeſe ſubſequantur. Simulac uno eodemque ignis gradu conſervato guttulae tardius decidere incipiunt, ſpiritus transgreſſus, ceu puriſſimus, effundatur in vitrum. Aucto nunc igne debilior tranſibit ſpiritus, quem vehementiſſimo demum igne purum propemodum phlegma ſubſequetur. Expulſo omni phlegmate, ac vaſis refrigeratis, eadem operatio, quotieſcunque placuerit, repeti poteſt, relictum

lictum nempe in retorta ſal immediate nova eaque debita ſpiritus dephlegmandi copia impraegnando.

§. 21. Spiritus expoſita hac methodo perfecte dephlegmatus, cuius quippe in ſubtilioribus et accuratioribus experimentis chemicis inſtituendis egregius ſine dubio uſus eſt, ut ab alcohole ſolito modo parato diſtinguatur; fallor an haud inepte *Alcoholis alcoholiſati* nomine appellari poteſt? idque eam praecipue ob cauſſam, quia nihilominus ordinario alcohole carere neutiquam poterimus, quippe qui cum et paratu facilior et minoris pretii ſit, compluribus tam chemicis quam pharmacevticis et technicis uſibus, non obſtante, qua imbutus eſt, aquae copia egregie inſervire poteſt.

§. 22. Sciendi cupidus quomodo calx ſalita ſeſe in ſpiritus dephlegmatione habitura ſit, tentamina ſequentia inſtitui:

EXPER. V.

Alcoholis tartariſati gravitatis ſpecificae = 816. uncias 18 cum ſeptem calcis ſalitae ſiccae libris in retorta commiſcui, adplicatisque adplicandis, praeterlapſo nichthemero deſtillationem adgreſſus ſum, transgreſſis ignis ſatis fortis adminiculo 17 unciis cum duabus drachmis ſpiritus, quas quatuor portionibus excepi, igne multum aucto, 18 puri phlegmatis unciae adhuc prodierunt. Quatuor illae hic obtentae ſpiritus portiones pondere et denſitate hoc modo ſeſe habuerunt.

Drach-

		Drachmae.		Denſitas.
No.	1.	28.	—	800.
—	2.	38.	—	799.
—	3.	56.	—	815.
—	4.	16.	—	840.

EXPER. VI.

Cum calx ſalita ſub ſimplici ad ſiccitatem inſpiſſatione multum adhuc aquae retineat, priorum duarum antecedentis experimenti ſpiritus portionum 54 drachmas ſuper 23 calcis ſalitae per fuſionem ab omnibus partibus aqueis prorſus antea liberatae, unciis denuo abſtraxi. Prolectus inde ſpiritus ita ſe habuit:

		Drachmae.		Denſitas.
No.	1.	15.	—	793.
—	2.	19.	—	792.
—	3.	19.	—	796.

Vehementiſſimus demum ignis ſesqui drachmas adhuc ſpiritus, unam circiter phlegmatis drachmam compleſtentis, expulit.

NOTANDA.

Quamvis huius ſalis ope alcohol ad eundem fere, quam per ſal tartari, tenuitatis gradum perducatur; variae tamen eaeque ſequentes difficultates hic locum obtinent:

1.)

1.) Ad expellendum ſpiritum ab ipſo inde deſtillationis initio vehemens requiritur ignis gradus; atque hac de cauſa

2.) Vltima ſpiritus pars aegerrime tranſiens alieno et ingrato inficitur odore.

3.) Reſidua denique in retorta calx ſalita non pulverulentam ſed compactam ac duriſſimam ſiſtit maſſam, quae, ut novae ſimili operationi apta reddatur, ſolvi antea ac denuo ad ſiccitatem inſpiſſari debet.

§. 23. Vt alcali cauſtici in ſpiritum noſtrum puriſſimum efficientiam explorarem, ſequens tentamen inſtitui:

EXPER. VII.

Lapidis cauſtici fuſi antea et pulveriſati unciis 24 retortae immiſſis uncias 6 alcoholis alcoholiſati gravitate ſpecifica = 791 pollentis caute ac pedetentim addidi. Vehementiſſimus et aliquo cum ſtrepitu inde oriebatur calor. Retorta arenae balneo impoſita et excipulo applicato, ipſam deſtillationem praeterlapſo nichthemero adgreſſus ſum. Vt expelleretur ſpiritus vehementiſſimo, quo detenta in retorta materia fundebatur, igne opus erat. Ipſe autem ſpiritus admodum lente et partim vaporum ſub forma tranſiit, et inſignem quantitatis iacturam paſſus eſt, ita, vt, finita deſtillatione per totam diem protracta, 48 impenſi ſpiritus drachmarum loco ſummatim 23 tantum drachmae, quas tribus portionibus ſeorſim excepi, prodierint, quaeque ita ſeſe habuerunt:

		Drachmae.		Denſitas.
No.	1.	5.	—	795.
—	2.	7.	—	794.
—	3.	11.	—	824.

NOTANDA.

1.) Teſtante igitur hoc experimento tantum abeſt, ut ſpiritus per alcali cauſticum ultra concentretur, ut ille huius acceſſu debilitetur potius, et ſalis huius vis deſtructrix in ſpiritum luculentiſſime pateſcat.

2.) Prolectus inde ſpiritus peculiarem valde ingratum ac nauſeoſum et odorem et ſaporem referebat.

3.) Monendum id quoque eſt, me inter totam hanc deſtillationem, quotiescunque nempe vaſa disiungi oportuit, ne minimum quidem evoluti cuiusdam fluidi elaſtici veſtigium obſervaſſe. Relicti autem in retorta ſalis cauſtici pondus explorare non potui, quia retortae fundus in ipſo deſtillationis fine multas cepit fiſſuras, per quas magna fluentis ſalis copia effuſa arenae ſeſe commiſcuerat.

4.) Ad vehementiſſimum denique, quem non deſtructa ſpiritus pars, ut expelleretur, hoc in caſu exigit, ignis gradum quod attinet: eius cauſſam in ſumma alcali cauſtici cum ſpiritu affinitate, qua fit, ut ſpiritus a ſale illo tenaciſſime retineatur, repetendam eſſe, pateſcit.

§. 24. Quemadmodum ipſae gravitates ſpecificae variorum ſpirituum varium ac diverſum ipſorum puritatis ſta-

ſtatum indicant: ita, quantum aquae in iis contineatur, per easdem exactiſſime explorari poteſt; quem autem in finem id neceſſario requiritur, ut gravitates ſpecificae, quas puriſſimus ſpiritus variis cum aquae rationibus mixtus exhibet, experimentis definiantur. Celeb. Borries primus quidem eiusmodi experimenta inſtituit et tabulam exhibuit huic ſcopo accomodatam: ſed, cum noſtris iam experimentis evictum ſit, alcohol conſueta methodo paratum et gravitate ſpecifica = 815 praeditum, quo Celeb. Borries in tentaminibus ſuis uſus eſt, neutiquam omni aqua liberum cenſeri debere, tabulam iſtam erroneam eſſe, facile perſpicitur.

§. 25. Qua de cauſſa operae pretium mihi viſum eſt, nova hunc in finem meo cum alcohole alcoholiſato experimenta iſtius generis inſtituere. Ad conficiendam igitur ſequentem novam tabulam, cui comparationis gratia eam Celeb. Borries adiungam ſingulas alcoholis et aquae deſtillatae mixtiones ſtaterae exactiſſimae beneficio libravi ea lege, ut admiſcenda alcoholi aquae copia continua et eadem ratione increſceret, qua ipſius alcoholis quantitas decreſceret, ita, ut mixtarum aquae et ſpiritus partium ſumma centenis ſemper totae mixtionis partibus reſponderet. Mixtiones has, antequam gravitates ſpecificas ipſarum explorarem, in vitris probe clauſis per 24 horas temperaturae + 16 graduum Reaumurianorum expoſui; quam cautionem eo nomine praecipue obſervandam duxi, quod ſpiritus ſub ipſo mixtionis tempore ſenſibilem cum aqua calorem excitat.

 Tem-

Temperatura + 16°. Reaumurianorum.

Partes centenae.		gravitates ſpecificae.
alcoholis	aquae	
100	0	791.
99	1	794.
98	2	797.
97	3	800.
96	4	803.
95	5	805.
94	6	808.
93	7	811.
92	8	813.
91	9	816.
90	10	818.
89	11	821.
88	12	823.
87	13	826.
86	14	828.
85	15	831.
84	16	834.
83	17	836.
82	18	839.
81	19	842.
80	20	844.
79	21	847.
78	22	849.
77	23	851.
76	24	853.
75	25	856.
74	26	859.
73	27	861.
72	28	863.
71	29	866.
70	30	868.
69	31	870.
68	32	872.
67	33	875.
66	34	877.
65	35	880.
64	36	882.
63	37	885.
62	38	887.
61	39	889.
60	40	892.
59	41	894.
58	42	896.
57	43	899.
56	44	901.
55	45	903.
54	46	905.
53	47	907.
52	48	909.
51	49	912.
50	50	914.
49	51	917.
48	52	919.
47	53	921.
46	54	923.

Tem-

Temperatura = 16°. Reaumurianorum.

Partes centenae.		gravitates
alcoholis	aquae	ſpecificae.
45	55	925.
44	56	927.
43	57	930.
42	58	932.
41	59	934.
40	60	936.
39	61	938.
38	62	940.
37	63	942.
36	64	944.
35	65	946.
34	66	948.
33	67	950.
32	68	952.
31	69	954.
30	70	956.
29	71	957.
28	72	959.
27	73	961.
26	74	963.
25	75	965.
24	76	966.
23	77	968.
22	78	970.
21	79	971.
20	80	973.
19	81	974.
18	82	976.
17	83	977.
16	84	978.
15	85	980.
14	86	981.
13	87	983.
12	88	985.
11	89	986.
10	90	987.
9	91	988.
8	92	989.
7	93	991.
6	94	992.
5	95	994.
4	96	995.
3	97	697.
2	98	998.
1	99	999.
0	100	1000.

Tabu-

Tabula Celeb. Borries.

Temperatura + 15°. Reaumurianorum.

alcohol.	aqua	gravitas ſpecifica.
10.	0	817 65/5055
9.	1	844 3580/5055
8.	2	869 4705/5055
7.	3	893 1805/5055
6.	4	915 925/5055
5.	5	934 36[illegible]0/5055
4.	6	951 3[illegible]05/5055
3.	7	965 1025/5055
2.	8	976 13[illegible]0/5055
1.	9	987 715/5055
0.	10	1000.

Cognita igitur ſpiritus vini cuiuscunque gravitate ſpecifica, quot centenas tam aquae quam alcoholis partes ſpiritus iſte in centenario complectatur, ope tabulae illius noſtrae facili calculo cognoſci poteſt.

§. 26. Docente igitur tabula hac ſpiritus ille rectificatiſſimus, qualem parare hucusque ſuevimus, gravitatis ſpecificae = 815. et quem hodienum omni aqua liberum ſed falſo exiſtimavimus, in centenario novem propemodum adhuc aquae partes continet.

§. 27.

§. 27. Quam ob aquae copiam, certe haud mediocrem, in alcohole ordinario ſuperſtitem facile perſpicitur, in omnibus eiusmodi experimentis ac operationibus, quibus ſpiritu vini opus eſt, et in quibus a minima praeſente aquae copia eventuum fallaciae metuendae ſunt, neceſſario alcohol noſtrum alcoholiſatum impendi debere. Ceterum ſingulas illius generis operationes, puriſſimi ſpiritus uſum requirentes, hic enumerare alienum eſt, quae Chemicorum certe latent neminem.

EX-

EXPOSITIO METHODI NOVAE NAPHTHAM VITRIOLICAM AD SVBTILITATIS ET PVRITATIS GRADVM HODIERNO MAIOREM PERDVCENDI.

Auctore

TOBIA LOWITZ.

Conventui exhib. die 19 Maii, 1796.

§. 1.

Inter chemicos conſtat, naphtham vitriolicam ſueto hodienum modo paratam et depuratam ſubtilitate, volatilitate atque ſua in aqua ſolubilitate usque adeo differre, ut pro varia particularum heterogenearum eam inquinantium ratione ipſis eiusque peritiſſimi Chemici manibus parata ſubinde alia atque alia prodeat.

§. 2. Partium ſulphurearum et aquoſarum, quibus naphtha vitriolica inquinatur, mentione hic plane ſuperſedeo, ſiquidem ſal tartari, alcali cauſticum, magneſiam calcinatam et aquam calcis, iſtis vitiis prorſus omnino tollendis ſufficere, iam dudum conſtat.

§. 3.

§. 3. At, longe maioris momenti id meo quidem iudicio cenſeri debet, naphtham iſtam certa ſpiritus ardentis copia modo maiori, modo minori, ſub prima eius deſtillatione quam tenaciſſime ſeſe inſinuantis nunquam non inquinari, atque huius quidem ſpiritus perfecta ſegregatio praecipuum caput eſt, quod hac in diſſertatione penitiori examini ſubiicere conſtitui.

§. 4. Fuerunt quidem, qui crederent, naphtham aqua lotam iſto ſpiritu liberari. Verum enimvero nec perfecta iſta eſt medela. nec a multis iisque non contemnendis vitiis libera: Primo nimirum inſignis ipſius naphthae aquam una cum ſpiritu ſubeuntis iactura cernitur; deinde vice verſa ipſa naphtha poſt lotionem ſuperſtes aquae non nihil in ſe recepiſſe deprehenditur; denique tentaminibus meis certo certius evictum habeo, egregie falli, qui naphtham omni, quem continet, ſpiritu hac operatione plane orbari ſibi perſuaderent.

§. 5. Ipſa adeo rectificatio, mediorum naphtham a ſupervacua ſpiritus portione liberandi hodienum uſitatorum longe praeſtantiſſimum, inſigni etiamnum defectu laborat, ſiquidem nec in ea nulla naphthae iactura obtinet. atque adeo ipſa etiam prior portio tranſtillans quae ſubtiliſſimam naphthae partem exhibet, ſemper adhuc ſpiritus non transmutati non nihil ſibi intime unitum retinet; adeo enim tenax eſt duorum horum liquidorum valde volatilium, naphthae et alcoholis, mutuum connubium, ut ſolis, etiam pluries repetitis, rectificationibus ſolvi neutiquam poſſit.

§. 6. Ad dignoſcendum naphthae unius prae altera varium ſubtilitatis ac puritatis gradum, gravitatis earundem ſpecificae exploratio tutiſſimam ſane viam aperit. Cum enim naphtha tenuitate ſua ſpiritui rectificatiſſimo multum antecellat; gravitatem eiusdem ſpecificam pro largiori vel minori ſpiritus praeſentia pari ratione vel maiorem vel minorem eſſe debere, rationi ſine dubio prorſus conſentaneum eſt.

§. 7. Minima, ad quam Chemici, modis ſupra expoſitis, naphtham vitriolicam perducere potuerunt, gravitas ſpecifica, omnium auctorum conſenſu, ad eam aquae ſeſe habet, uti 732 ad 1000. Talem igitur naphtham ab omni parte heterogenea, quin ab ipſo adeo ſpiritu eſſe liberrimam et ad ſummum puritatis ſtatum reductam, putaverunt.

§. 8. Cum autem ſueta hucusque methodus, naphtham ad dictum eumque non niſi hypotheticum perfectionis gradum perducendi, haud mediocri laboret difficultate, atque ipſa illa perfectio non niſi hac ſub conditione ſupponi queat, ut inſignis naphthae quantitas operationi huic ſimul impendatur; non potui, quin ſaepius ſummopere optarem, aliud ut inveniretur medium, huic negotio aptum, idque ſecurius nec non minus laborioſum. Quae quidem res menti meae tunc imprimis ſeſe obtulit, quotiescunque in ſpiritu vini, ope ſalis tartari dephlegmando, verſarer; quo quippe noto et pulcro operandi modo conſtat, partes aquoſas et ſpirituoſas, nulla etiam adhibita deſtillatione, ſola mixtione ac agitatione momento quaſi in diverſos duos liquores disiungi, ſeparatorii beneficio facillime a ſe invicem ſegregandos.

§. 9.

§. 9. Quae ſimpliciſſima methodus cum ab aquae cum ſale tartari, quam cum ipſo ſpiritu, maiori affinitate originem repetat. quo et id accedit, quod alcali omne cum ipſo ſpiritu connubium reſpuat; operae pretium mihi viſum eſt experiri, poſſitne ſimili modo naphtha quoque ab inhaerente ei ſpiritu liberari; quo quidem in negotio omnis rei cardo in eo verti mihi videbatur eiusmodi cum ſalibus ut inſtituantur experimenta, quae omni cum naphtha conſortio inimica, ſpiritu abundantiſſime ſolvantur. Rem igitur cum hoc intuitu contemplarer; ſpes mihi affulgebat, fore, ut in calce ſalita optatum invenirem auxilium; quod quousque votis meis reſponderit, experimentorum ſequentium eventus docebit.

EXPER. I.

Praecipuus tentaminum meorum ſcopus cum partium ſpirituoſarum ſegregationem ſpectet, cumque calx ſalita pari immo maiori adeo facilitate aqua, quam ſpiritu, ſolvatur; naphtham omnibus particulis aqueis perfecte liberatam ad experimenta revocare, ut nullis in diiudicando eorum eventu dubiis locum relinquerem, neceſſe duxi. Hunc in finem 10 unciis naphthae, ſueta deſtillatione e miſtione aequalium alcoholis et olei vitrioli partium obtentae, cuiusque gravitatem ſpecificam = 75 deprehendi, per vices et frequenti ſub agitatione tamdiu ſal tartari ſicciſſimum addidi, donec ultima immiſſi ſalis portio nec ſolveretur iam, neque madeſceret, quo facto, unciae 12 naphthae perfecte dephlegmatae remanſerunt, cuius nunc gravitatem ſpecificam = 746 reperi. *)

 EX-

*) Vbicunque hac in diſſertatione gravitatis ſpecificae obtentorum liquorum mentio fit, me eam ſemper ſub temperatura + 12 graduum ſcalae Reaumurianae exploraviſſe, monendum hic loci eſt.

EXPER. II.

Duodecim unciis naphthae huius a phlegmate ſollicite liberatae frequentiori ſub vitri agitatione parvas calcis ſalitae ſiccae et pulveriſatae admiſcui portiones, quae initio, calore non nullo orto, perfecte ſolvebantur. Additis iam iam per vices 8 huius ſalis drachmis. mixtionem hanc in vitro quiete repoſitam, ſumma mea cum voluptate quam celerrime in diverſos duos divelli liqnores vidi, quorum ſuperior ſpecifice levior, naphtham, inferior autem ſalis noſtri ſolutionem ſpirituoſam exhibuerunt. Duobus hisce liquoribus ſeparatorii ope a ſe invicem ſegregatis, naphthae denuo aliquam calcis ſalitae copiam, quae perinde in liquorem fundum occupantem ſolvebatur, addidi. Haecce ſalis additamenta et obtentorum inde duorum liquorum ſeparationes toties iteravi, donec ultima ſalis portio naphthae iniecta nec iam ſolveretur, neque in grumos coiret. Separata nunc a ſale naphtha pellucidiſſima ponderis 9 Unciarum, et gravitatis ſpecificae = 732 reperiebatur.

NOTANDA.

1.) Docente igitur feliciſſimo experimenti huius eventu, naphtha vitrioli ſimpliciſſima hac manipulatione confeſtim et quam ocyſſime, per decem nimirum minutorum intervallum, nulla etiam inſtituta deſtillatione, ad eundem prorſus, quem hactenus non niſi taedioſis rectificationibus aſſequi licuit, ſubtilitatis gradum perduci poteſt.

2.) Naphtha in operatione hac, iam poſt primum eius in duos diverſos liquores divortium, ſemper lacteſcentem non nihil faciem offert, quae, dum obtinet, certo indicio eſt, naphtham ab omni, quo polluitur, ſpiritu nondum libera-

beratam eſſe. Simulac autem poſtrema iniecti ſalis portio non iam madeſcit, in lacteſcentiae iſtius locum repente ſumma pelluciditas ſuccedit, ita, ut duo ſint abſoluti negotii indicia, ad quae experimentatorem attentum eſſe oportet; quorum unum in iniecti ſalis permanentia, alterum in perfecta et repentina naphthae clarificatione cernitur.

3.) Evincitur quoque artificio hoc, calcem ſalitam ſiccam pulcherrimum praebere medium, quo, perinde ac ſalis tartari ope puritas alcoholis vini exploratur, gradus puritatis naphthae extemplo diiudicari poſſit.

4.) Calcem ſalitam, quam tentaminibus hiſce meis impendo, ex reſiduis poſt ſpiritus ſalis armoniaci cauſtici et alcali volatilis ſicci deſtillationem remanentibus, ſolvendo ea filtrandoque atque igne ad ſummam usque ſiccitatem inſpiſſando, praeparo.

§. 10. Licet mea haecce naphtham a ſpiritu liberandi methodus ſimillima videatur illi, qua ſpiritus vini ope ſalis tartari aqua orbatur; intercedit tamen inter, utramque notatu ſatis digna differentia. Sal tartari nempe novimus, e ſpiritu phlegmatico praeter aquam nihil prorſus particularum ſpirituoſarum ſecum ferre, ita, ut eductum hoc phlegma puram ſalis tartari ſolutionem aquoſam exhibeat: noſtro autem in experimento calx ſalita certam quoque ipſius naphthae copiam ſimul cum ſpiritu abripit, cui tamen incommodo medelam facillime afferri poſſe, ſequentia me experimenta docuerunt.

EX-

EXPER. III.

Liquores ſpirituoſo-ſalini in antecedente experimento obtenti, collecti et inter ſe commixti ſesqui unciam adhuc naphthae ad liquoris ſuperficiem ſurgentis ſuppeditabant, ſimulac unam aquae purae unciam illis admiſcerem. Sed naphthae huius gravitas ſpecifica = 750 erat.

EXPER. IV.

Haec vero naphtha, cuius aucta iam iam gravitas ſpecifica imminutam eiusdem puritatem prodidit, eodem, quo in experimento ſecundo uſus ſum modo, debita calcis ſalitae copia tractata, non niſi dimidiam naphthae purae unciam largiebatur, et obtentus hoc in caſu liquor ſpirituoſo-ſalinus, addita denuo parva aquae copia, perinde ac in antecedente experimento, ſimilem naphthae ſpirituoſae quantitatem iterum iterumque ſuppeditabat, quae, repetito calcis ſalitae additamento, in naphtham puram et liquorem ſalinum aethereo-ſpirituoſum ſecernebatur; quae alternae operationes, ut omnem, quanta eſt, naphthae copiam obtineas, pro lubitu eousque repeti poſſunt donec liquoris ſalini ſpirituoſi copia ultimo obtenta adeo iam fuerit exigua, ut huic ſcopo inſervire iam non poſſet.

EXPER. V.

Vt, cuius eſſet indolis ſpiritus ille calcis ſalitae ope e naphtha ſegregatus, cognoſcerem, omnes in praecedentibus experimentis, addita aqua, collectos ac commixtos liquores ſalinos aquoſo-ſpirituoſos deſtillationi per retortam commiſi. Prior tranſeuntis fluidi deſtillati portio amoenum exhibuit liquorem anodinum, qui, partibus aquoſis, ope

ſalis

ſalis tartari ſeparatis, cum calce ſalita et aqua, uti in experimentis antecedentibus expoſui, tractatus, denuo aliquam ſed parvam illam naphthae copiam largiebatur; et ſuperſtes nunc liquor ſalinus aquoſo-ſpirituoſus novae deſtillationi ſubiectus, rurſus liquorem anodinum ſuppeditabat, e quo, calce ſalita auxiliante, aliquam naphthae in eo ſcatentis partem denuo elicere mihi licuit.

NOTANDA.

1.) Tria haec experimenta (III. IV. et V.) luculenter evincunt, operationes haſce alternas nullo quaſi limite circumſcribi, ita ut, circuli quaſi ad inſtar, infinita ſeſe ſucceſſione continuo ſubſequerentur, niſi liquores voluminis et maſſa magis ſubinde magisque diminuerentur, quo fit, ut eorum manipulatio, ſubinde difficilior, tandem plane locum iam habere nequeat.

2.) Nec minus inde tenaciſſima naphthae cum ſpiritu cohaeſio perſpicitur, licet enim maxima naphthae tentamini impenſae pars artificio noſtro ab inhaerente ei ſpiritu liberari queat; ipſe tamen ſeparatus hic ſpiritus a naphthae particulis ipſi vice verſa pertinaciſſime adhaerentibus nulla plane arte liberari poteſt; neque enim niſi ſub liquoris anodini forma illum obtinere licet.

3.) Ea naphthae pars, quae e liquore ſalino-ſpirituoſo aquae adminiculo ſegregatur, cum priori naphtha iam iam depurata remiſceri prius non debet, niſi poſtquam ea ope calcis ſalitae a ſpiritu ei adhaerente liberata fuerit.

4.)

4.) Eadem naphthae pars, licet pellucidiſſima ſit, ſalis tamen certam copiam una cum ſpiritu continet, quo fit, ut,

5.) ſi eam a ſpiritu illo nondum liberam priori naphthae admiſceas, liquores mixti ſubito inſigniter lacteſcant ac poſt aliquam moram, liquore ſalino ad fundum ſecedente, priſtinam limpiditatem recuperent.

6.) Tentaminibus hisce multoties repetitis, ſingulare et memoratu dignum phoenomenon mihi ſeſe obtulit: commixtis nimirum 10 naphthae omni ſpiritu orbatae unciis cum duabus napthae ſpirituoſae, aquae ope e liquore ſalino obtentae, unciis; mixta naphta initio valde lacteſcens, praeterlapſo duarum horarum intervallo, uti ſumma pelluciditate, ita pulcherrimo etiam ſe induebat colore coeruleo, qui vero color amoenus poſt horae ſpatium ſua ſponte prorſus omnino diſparuit.

§. 11. Antequam ad id, quod caput huius diſſertationis eſt, ad ſummam videlicet naphthae depurationem progrederer, e re mihi viſum eſt, ſingularis cuiusdam phoenomini mentionem facere, quod, quotiescunque naphtha a ſpiritu liberanda flaviusculi coloris eſſet, ſeſe nunquam non haſce inter operationes mihi obtulit. Naphtha nimirum eiusmodi flava ſpirituoſa eo ipſo momento, quo, addita ei debita calcis ſalitae copia, in duos liquores divellitur, omni flavo ſuo colore ſe exuit, quo iam liquor inferior ſalino-ſpirituoſus imbuitur. Quodſi iam liquoribus his a ſe invicem ſegregatis, flavo nunc illi liquori ſalino aquam addas; naphtha ſpirituoſa inde ſegregata coloris flavi, eiusque adeo magis, quam ante, intenſi, liquor autem ſalinus aquoſo-ſpiri-

ſpirituoſus limpidiſſimus cernitur. Huicce iam naphthae ſpirituoſae a liquore inferiore ſeparatae calcem ſalitam ſi addas; tranſit ex ea flavus color in orientem liquorem ſalino-ſpirituoſum, et redit priſtina ſcena, debitam aquae copiam huic denuo ſi addas. Quas coloris alternas migrationes, quousque id per liquorum ſucceſſiva decrementa fieri poſſit, ſi efficias: omnem denique, quae initio multo liquore valde diluta fuerat, materiam colorantem anguſto ſpatio coarctatam et ſummopere concentratam habebis ita ut ultimus ille liquor ea imbutus non iam flaveſcentem, ſed infuſi caffeae ad inſtar, fuſcam prorſus faciem ſit exhibiturus.

§. 10. Ex methodo hac naphtham depurandi ea quoque utilitas redundat, quod eius ope ex illo quoque ſpiritu, qui naphtham in prima deſtillatione praecedere ſolet, maxima ipſi inhaerens napthae pars facile ſegregari queat; quam rem eo minus contemnendam eſſe, ſequenti experimento comprobabitur, quo maior eſt, quam colligere licet, ſpiritus eiusmodi etherei copia, ubi nempe unum idemque acidum vitriolicum, a priori deſtillatione reſiduum, repetitis vicibus novo cum alcohole tractatur.

EXPER. VI.

a) Octo ponderis medicinalis librae collecti eiusmodi ſpiritus etherei, cum aqua ſub quacunque quantitatis ratione miſcibilis, 17 uncias calcis ſalitae plane ſolvebant, naphtha tamen ſecedente nulla, additis autem ſolutioni huic 28 aquae purae unciis, mixtio in duos dividebatur liquores, quorum ſuperior 5 libras cum uncia una naphthae ſpirituoſae exhibuit. Separata a naphtha hac ſeparatorii ope

ſolutio ſalina aquoſo-ſpirituoſa, additis eidem denuo 12 ſalis noſtri et totidem aquae unciis, 11 adhuc naphthae eiusmodi ſpirituoſae uncias largiebatur.

b) Obtentae hoc modo 6 librae naphthae, ſpiritu quidem valde adhuc turgentis, ſed aqua iam non omnino miſcibilis, ope 18 unciarum calcis ſalitae, 12 naphthae uncias omni ſpiritu liberatae ſuppeditaverunt.

c) Lixivium inde obtentum ſpirituoſo-ſalinum, (*b.*) affuſis aquae libris duabus, totidem naphthae ſpirituoſae libras praebuit, quae naphtha

d) auxiliantibus 9 calcis ſalitae unciis 8 naphthae purificatae uncias largita eſt.

e) Liquor ſalinus inde ſuperſtes (*d.*), addita aquae libra una, rurſus 13 naphthae ſpirituoſae uncias ſuppeditavit, e quibus

f) mediantibus 3 calcis ſalitae unciis 4 naphthae a ſpiritu liberatae uncias nactus ſum.

g) Liquor ſalinus exinde obtentus 7 aquae unciis mixtus denuo ſex naphthae ſpirituoſae uncias ſuppeditavit, e quibus

h) duabus ſalis unciis duas naphthae purae uncias aſſecutus ſum.

Octo igitur illae ſpiritus etherei librae, alternis illis manipulationibus, quae, uti videre eſt, ultra adhuc, ſi pla-

placuiſſet, continuari potuiſſent, ſummatim (*b. d. f. h.*) 26 naphthae ſpiritu liberatae uncias largiebantur; quo et id accedit, quod, ut e ſupra expoſito tentamine (Exper. V.) patet, ſinguli hoc in experimento poſt aquae acceſſum obtenti liquores ſalini aquoſo-ſpirituoſi (*a. c. e. g.*), ſi ſuperſtes in illis ſpiritus ethereus deſtillationis ope rite evocaretur, denuo aliquam, quamvis exiguam illam, naphthae copiam largituri fuiſſent.

NOTANDA.

1.) Monendum eſt, ſalis vel aquae debitam quantitatem, liquori ethereo vel ſalino-ſpirituoſo adiiciendam accurate neutiquam ſtabiliri poſſe; videre enim eſt, fieri non poſſe, quin ea varia ſi, pro varia naphthae et ſpiritus in divellendo liquore praeſentium proportione. Hinc experimenta haec ſuſcipere qui voluerit, ne addendorum quantitate peccet, et ſalem et aquam non niſi parvis doſibus per vices admiſceat, oportet, usque dum exſpectandus inde effectus locum obtinuerit. Hancce regulam in aqua affundenda praecipue obſervari neceſſe eſt, cuius ſi iuſto largiorem addas copiam, facile fit, ut, quae parciori ante aqua ſegregata iam fuerat, naphtha liquorem aquoſo-ſpirituoſum omnis ingrediatur, cui quidem incommodo poſtea largiori ſalis additamento medela afferri poteſt.

2.) Si naphtha abundat ſpiritus ethereus divellendus licet aqua qualibet ratione ſolubilis ſit, aliqua tamen naphthae in eo detentae pars ſola calcis ſalitae additione, nulla addita aqua, ſecernitur.

 3.) Con-

3.) Contra, ſpiritu ſi liquor ethereus abundat, ad efficiendam naphthae ſegregationem, adiecto iam ſale, aquam quoque ſupperaddi, neceſſe eſt; quod ſi neglexeris, quantumvis ſalis admiſceas, naphthae, utpote ipſam ſolutionem ſpirituoſam ingreſſae, ne hilum quidem obtinebis.

4.) Si denique liquor ethereus admodum pauper naphthae fuerit, ut nihil eius, et ſale et aqua iam additis, ſegregetur, id quod in liquore anodino Hoffmanni obtinet; tum deſtillatione opus eſt, ea tamen cautione, utne ea iuſto ſit diuturnior.

§. 13. Nec id ſilentio praetereundum duco, calcis ſalitae inſignem quoque efficatiam in eam, multo phlegmate ſcatentem, deſtillati partem ſulphuream interdum eſſe, quae liquorem anodinum mineralem Hoffmanni in deſtillationis fine ſequitur. Hoc enim phlegma uberrimam nonnunquam in eo latentem naphtham, ſimulac debita in eo ſolvitur ſalis noſtri copia, ſuppeditat.

§. 14. Primariis, methodum meam concomitantibus, circumſtantiis hactenus expoſitis, ad ipſam diſſertationis metam, hoc eſt, ad eorum, quae ſummam naphthae a ſpiritu liberationem ſpectant, experimentorum expoſitionem progredior.

Experimento ſupra relato teſte, naphtha rite inſtituta frigida eius cum calce ſalita tractatione, gravitatem ſpecificam = 732 induit (Exper. II.) pluribusque experientiis compertum habeo, naphtham ad dictum illum denſitatis gradum ſimpliciſſima iſta manipulatione mea nunquam

non

non exactiſſime reduci, qua effectus conſtantia ſola, etiamſi a reliquis commodis diſceſſeris, mea iſta methodus peculiarem ſibi praeſtantiam ſuo quodam iure vendicat, eamque eo maiorem, cum ipſe hic denſitatis gradus ad amuſſim illi reſpondeat, quem hactenus non niſi diſpendioſis admodum ac taedioſis naphthae rectificationibus aſſequi licuit §. 7.).

§. 15. Hisce ſtabilitis, in id omni opera incubui, ut, ſitne naphtha mea iſta methodo ope calcis ſalitae tractata reapſe pura et ab omni heterogeneo additamento libera, explorarem; cuius rei ut certior fierem, eiusmodi naphthae rectificatione medium aliud magis ſcopo meo accommodatum inveni nullum. Intelligitur enim, naptham ſenſu ſtrictiſſimo puram, dum rectificatur, ita ſeſe habere debere, ut per retortam ad ſiccitatem usque evocata, nullam omnino maculam relinquat, utque praecipue ultima adeo eiusdem portio ſeorſim excepta, eam exacte ac prima et media, quin praeciſe eam quoque, qua ante deſtillationem gaudebat, gravitatem ſpecificam exhibeat. Hunc in finem ſequens experimentum inſtitui.

EXPER. VII.

Vncias 10 naphthae pellucidiſſimae limpidiſſimaeque ope calcis ſalitae ſpiritu orbatae, cuiusque gravitas ſpecifica = 732. retortae ſiccae immiſi, adplicatoque excipulo ſicco, deſtillationem leni calore inſtitui. Simul ac detenta in retorta naphtha incaleſceret, ſubito valde lacteſcens pulviuſculi albi terrei ad inſtar quidpiam ad fundum depoſuit, quo pulvere depoſito, priſtinam recuperavit naphtha pelluciditatem. Dimidia transgreſſae naphthae parte ſeorſim excepta, deſtillationem ad ſummam fere reſidui ſiccitatem

tem usque continuavi. Iam mutato excipulo, longe fortiori igne drachma circiter dimidia liquoris lacteſcentis aliquantulum et ingratum odorem ſpargentis, cuius in fundo aliquot olei globuli aſpectui ſeſe offerebant, tranſiit. In retortae fundo quindecim circiter calcis ſalitae grana forma ſicca remanſerunt.

Gravitatem ſpecificam duarum naphthae rectificatae ſeorſim exceptarum portionum quod attinet, neſcio certe, utrum voluptate magis mea, an faſtidio, eam prioris = 725, eam poſterioris = 740 deprehendi.

NOTANDA.

1.) Licet experimentum hoc, quantum eſt, totum atque adeo ab ipſo operationis initio naphtham meam haud omnino puram fuiſſe, luculenter demonſtret: hoc tamen non obſtante inſignis ille ſubtilitatis gradus, quo prior huius naphthae portio pollebat, utpote ad quem nemini hodienum naphtham perducere licuit, non potuit non eſſe mihi acceptiſſimus; id unum aegerrime tuli, aliquam ſemper eamque determinatam ſpiritus copiam, indocilem quaſi calcis ſalitae imperium pati, frigida illa tractatione cum naphtha indiſſolubili vinculo cohaerere, quo ipſo ſit, ut ipſius quoque calcis ſalitae certa quaedam, ſed parva ea, copia ipſam naphtham ingrediatur, nec rectificatione pro naphtha ulterius depuranda ſuperſedere nobis liceat.

Quamvis autem prima fronte eventus huius experimenti haud videatur prorſus favere methodo noſtrae; huius tamen utilitas, hoc non obſtante, ſalva utique eſt utpote aliunde ſatis ſuperque comprobata. Et quid pluribus verbis

bis opus eſt; notiſſimum enim chemicis eſt, ſalis tartari ope cum ſpiritus vini dephlegmatur, ſimili prorſus modo contingere, ut et ſalis quaedam portio in depurando liquore et aliqua aquae copia in alcohole retineatur, nec unquam ſpiritus eiusmodi tartariſati nova rectificatione ſuperſedere liceat, quo tamen incommodo non obſtante iſta ſpiritum dephlegmandi methodus, omnium chemicorum communi teſtimonio, primum ſibi prae ceteris locum vendicat.

2.) Experimentis ex propoſito ſuſceptis, compertum habeo, naphtham puram ne hilum quidem calcis ſalitae ſolvere; ex quo certo certius colligere licet, eam ſalis copiam, quam naphtha ope frigidae cum calce ſalita tractationis depurata recipit, non niſi opilulante illa ſpiritus, tenaciſſime in ea remanentis, parte naphtham ingredi.

3.) Album illud naphthae ſedimentum quod attinet, cuius in experimenti noſtri expoſitione mentionem feci, et quod tot, quot nova naphtha uterer, vicibus obſervavi, naturam eius, ob admodum exiguam quam obtinui quantitatem, accurate explorare non potui. Id unum obſervare mihi licuit, nec alcohole illud nec aqua ſolvi, neque acidorum ullam in illud efficatiam eſſe; ceterum perexiguae illud eſſe gravitatis ſpecificae, unde etiam aquae interdum ſupernatat; ita, ut oleoſae proſapiae eſſe mihi quidem videatur.

4.) De illo denique, quem in ipſo deſtillationis fine obtinui, liquore lacteſcente, nec non de globulis oleoſis in eo conſpectis infra ſermo mihi erit.

5.)

5.) Ex tentamine noſtro id quoque evidenter patet, naphtham una frigida cum calce ſalita tractatione reapſe maiori ſpiritus quantitate orbari, quam ullo alio eorum mediorum, quibus hodienum uti ſolemus. Licet enim gravitas ſpecifica noſtrae naphthae ab ea naphthae ordinaria methodo depuratae nihil diſcrepet: nemo tamen dubitabit, naphtham hanc noſtram, ſalvis particulis ſpirituoſis in ea adhuc haerentibus, gravitatem minorem exhibituram fuiſſe, ſi in operatione illa nullas particulas ſalinas in ſe recepiſſet, utpote quae gravitatem eius non augere non poſſunt.

§. 16. Quamvis igitur tentamine illo edoctus eſſem, naphtham certae ſpiritus copiae tenaciſſimam, et longe tenaciorem eſſe, quam ego ipſe unquam eſſem ſuſpicatus: id tamen nullo modo obſtitit, quominus omnem, ut aiunt, lapidem moverem, ut duorum horum liquidorum perfecte ſeparandorum methodum invenirem. Licet enim prioris, quam in experimento illo obtinui, naphthae partis imminuta gravitas auctum puritatis gradum indicet; aucta tamen alterius dimidii gravitas fecit, ut in ipſa adeo priori illa parte ſpiritus non nihil latuiſſe ſuſpicarer, cuius perfectiſſima ſeparatio tantopere in votis mihi erat.

§. 17. Cum omnia, quae ſe in ſimplici illa naphthae rectificatione obtulere, phaenomena probe perpenderem, inſignis ille ignis gradus, quo ad poſtremam ſpiritus partem expellendam opus erat, attentione praecipue dignus mihi viſus eſt. Dum enim tranſtillandi iſta difficultas ex eo repeti debere mihi videretur, quod ſpiritus a parva illa calcis ſalitae copia in retorta ſuperſtite tenaciſſime retineatur, exiſtimavi, fieri poſſe, ut naphtha omnem omnino in ſe con-

ten-

tentum ſpiritum demiſſura eſſet, ſi, loco ſimplicis illius rectificationis, ſuper tantam ſalis noſtri copiam abſtraheretur, qua cuncta naphthae maſſa ultro depuranda ex toto imbiberetur vel abſorberetur. Quae quidem ſpes eo mihi magis affulſit, quo certior eram, uti alia iam in diſſertatione expoſui, idem artificium in ſumma ſpiritus vini dephlegmatione egregio ſucceſſu gaudere. Nova itaque ſpe ſuſcitatus ſequens experimentum inſtitui.

EXPER. VIII.

Naphthae, frigida cum calce ſalita tractatione, ad gravitatem ſpecificam = 73[illegible] reductae unciis 2[illegible], retortae ſiccae infuſis, tantam calcis ſalitae ſiccae copiam addidi, ut omnis in retorta detentus liquor perfecte non abſorberetur tantum, ſed etiam ſalis ſicco ſtrato tegeretur, id quod [illegible] ſalis illius libris perfeci, quo facto, retortam ſtatim arenae balneo impoſui, adplicatoque excipulo capaciſſimo, aquae frigidae glacie mixtae immerſo, et rimis veſica porcina ſtipatis, ipſam deſtillationem non niſi praeterlapſo nychthemero et leniſſimo calore, quo manus ad ipſum catini fundum arenae immiſſa non lederetur, adgreſſus ſum. Leniſſimo hoc igne, ne ulla quidem guttula per retortae orificium decidente, per horae ſpatium 7 naphthae unciae in recipiente colligebantur. His ſeorſim exceptis, poſt horae dimidiae intervallum eodem ignis gradu, nullis ſere guttulis decidentibus, rurſus [illegible] cum dimidia naphthae unciae accumulabantur; quas fortiori iam igne duae eiusdem adhuc unciae aegre ſtillando ſequebantur. Iam nunc vehementiſſimo igne 7 unciae liquoris aquoſi, lacteſcentis, flavi coloris et valde acidi tranſiere, quibus duae drachmae olei eſſentialis flavi coloris et peculiarem odorem ſpirantis ſupernatabant.

Ex ipſo autem liquore aquoſo, oleo ſeparatorii ope ablato, et ſale tartari ſicco addito, 7 drachmas ſpiritus ardentis flavi coloris et oleo iſto imbuti obtinui; ſummo denique igne eiusdem liquoris aquoſi acidi et ingrati odoris 7 adhuc unciae tranſierunt.

Gravitates ſpecificas trium illarum naphthae portionum, cum eas ad temperaturam 12 graduum Reaumurianorum rediiſſe compertum haberem, ſumma mea voluptate deprehendi, eam prioris = 716, ſecundae = 718 et tertiae = 762.

§. 18. Varia, quae ſe hoc in experimento obtulerunt, phaenomena, ſigillatim et ſingula perpendere, operae pretium mihi videtur:

1.) Ex prompta illa naphthae leniſſimo adeo calore, ſub aëris forma expulſae, in excipulo condenſatione, nullis tamen guttulis decidentibus, patet, operationem hanc, utne diſplodantur vaſa, ſummam eamque praecipue in ignis regimine cautionem ac attentionem requirere, eademque de cauſſa neceſſe quoque eſt, capaciſſimum apponi excipulum, quod inſuper ad maturandam naphthae, ſub aëris forma tranſeuntis, in liquorem condenſationem, per omne operationis tempus aqua frigida vel quod praeſtat, glacie aut nive diligentiſſime refrigerandum eſt: oportet quoque, ignem prius non admoveri, niſi quando adplicata iuncturis veſica plane fuerit ſiccata, hac enim cautione neglecta, naphtha, pro ea, qua tum pollet, inſigni vi expanſiva, madidam adhuc veſicam diffians, exitum ſibi paratura foret.

2.)

2.) Priorum duarum obtentae naphthae portionum eximia ſubtilitas, ſi cum ea longe inferiori, qua tertia, et ultima, utpote non niſi igne valde aucto transgreſſa eiusdem portio praedita deprehenditur, comparetur: manifeſto patet, calcem ſalitam eo, quem oſtendi, modo huic operationi adhibitam, in eas quoque partes ſpirituoſas, quas frigida manipulatione auferre non licuit, vim ſuam ex voto exſeruiſſe. Partes enim ſpirituoſae, quae iam noſtro hoc artificio calcis ſalitae partibus undique contingu ntur, tanta vi iis adhaerent, ut, ad expellendas eas multo fortiori igne opus ſit, quam ad ipſam naphtham expellendam aut deſtillationem ſpiritus per ſe, id eſt, absque additamento perficiendam. Atque hinc ſequitur naphthae deſtillationem methodo hac inſtitutam, niſi forte in ignis regimine peccetur, eousque, donec omnis fere naphtha transgreſſa fuerit, continuari tuto poſſe, absque eo ut vel naphthae ſpiritu contaminandae periculum ſit pertimeſcendum vel frequentioribus receptaculi mutationibus opus ſit, quippe quae haud mediocrem naphthae iacturam non afferre non poſſunt: hoc iam praeſtito, retentus in retorta ſpiritus aliqua adhuc naphthae portione imbutus, mutato nunc excipulo, et aucto igne, ſeorſim excipi poteſt.

3.) Phaenomena ſequentia:

a) Inſignis nimirum illa, quae ſe in experimento noſtro obtulit, 5 cum dimidia unciarum naphthae iactura.

b) Copioſa porro iſta obtentarum 14 unciarum phlegmatis quantitas:

c) Contentum praecipue in phlegmate hoc acidum ſalis, quod novimus, tantum abeſſe, ut e calce ſalita eo, quo in tentamine uſus ſum, ignis gradu expellatur, ut potius vehementiſſimi immo fuſorii ignis vis in illud nulla ſit:

d) Ipſum denique notatu dignum illud oleum, quod priori phlegmatis parti innatavit:

Haec omnia cum mecum reputarem; ita ſenſi, ut, calcem ſalitam vi deſtructrice in ipſam naphthae mixtionem pollere, ſuſpicarer; quod ut non explorarem modo, ſed ulterius quoque, poſſitne naphtha ſupra expoſita ad maiorem adhuc ſubtilitatis gradum reduci, inveſtigarem, experimenta ſequentia inſtitui.

EXPER. IX.

Duas illas priores naphthae portiones (Exp. VIII.), $15\frac{1}{2}$ uncias pendentes, denuo 4 cum calcis ſalitae libris eodem omnino modo, ac in antecedente tentamine, deſtillationi ſubieci, ita tamen, ut excipulum ante phlegmatis aſcenſum quinquies mutarem. Transgreſſis ſummatim 12 unciis et 5 drachmis naphthae, cuius ultimae duae portiones intenſiorem iam iam requirebant calorem; vehementiſſimo demum igne 10 purae phlegmatis unciae tranſierunt, quae nunc nec aciditatis ullum, nec ullum innatantis olei veſtigium prodiderunt, ſingularum naphthae obtentarum portionum pondus et gravitas ſpecifica hoc modo ſeſe habuerunt:

Drach-

		Drachmae.		Denſitas.
No.	1.	12.	—	718.
—	2.	52.	—	716.
—	3.	27.	—	719.
—	4.	10.	—	720.
—	5.	4.	—	740.

Ex ultima hac napthae portione; cuius aucta iamiam gravitas ſpecifica, ſpiritus non nihil illi acceſſiſſe, demonſtrat, reapſe aliquam huius copiam ope calcis ſalitae ſiccae ſegregare mihi licuit.

NOTANDA.

1.) Evincente igitur experimento hoc, calcis ſalitae in puram naphtham nulla omnino deſtruendi poteſtas eſt; quodſi enim naphtha ſale hoc deſtrueretur; facile intelligitur, deſtructionis eiúsmodi veſtigia, qualia in experimento octavo apparuerunt, neceſſario eodem ſemper modo obſervari debere, quotiescunque proceſſus ille una eademque cum naphtha repeteretur. At, ex tentamine hoc id potius manifeſtum eſt, naphtham, ſub frigida ipſius per calcem ſalitam depuratione, praeter ſpirituoſas alias adhuc heterogeneas, easque oleoſas ac acido-vitriolicas praecipue partes tenaciter retinere, a quibus non niſi uno hoc noſtro artificio liberari penitus poſſe, et e quibus ſuſpicio, in quam incidi, vis iſtius deſtructricis repeti deberi, videatur.

2.) Naphtham oleoſas iſtas partes ipſi ſpiritui, e quo paratur, debere, facile eſt perſpectu, quas in ſpiritu vini

vini nunquam non adeſſe, complurium chemicorum peritiſſimorum teſtimonio, conſtat.

3.) Acidi vero vitriolici, ad ipſam naphthae mixtionem eſſentialiter non pertinentis, eiusmodi in naphtha, ſale tartari iam iam depurata, utpote qualem tentaminibus meis impendi, praeſentia primo quidem aſpectu difficilior explicatu eſſe videtur: quae autem cum partiali illa calcis ſalitae deſtructione (Exper. VIII) ſatis ſuperque evicta ſit; perſpicitur, acidum hoc partibus ſpirituoſis intime unitum vel involutum ita in naphtha abſconditum latere, ut, niſi ea, quam expoſui, methodo, ſegregatio eiusdem nec ſalis tartari ope, neque ceteris hodienum ſuetis naphtham depurandi mediis, obtineri poſſe videatur.

4.) Magnam porro illam, in deſtillationis fine transgreſſam, 10 Unciarum phlegmatis copiam ex ipſa calce ſalita originem ſuam repetere, ex eo patet, quod ſal in retorta poſt deſtillationem ſuperſtes ponderis iacturam paſſum ſit phlegmatis illius quantitati proportionalem; ſal enim hoc, ſub ſimplici eiusdem ſuper ignem inſpiſſatione, certam aquae copiam tanta retinet vi, ut niſi igne fuſorio expelli non poſſit.

5.) Monendum id quoque eſt, priori praecipue ſub recipientis mutatione, vaſorum iuncturam caute ſemper ac pededentim relaxari debere; nimis enim prompta eorum ſub relaxatione, hincque oriundo aëris naphthoſi, in vaſis valde expanſi, repentino exitu ne receptaculum maxima vi propellatur, pertimeſcendum eſſe videtur.

6.)

6.) Hocce in caſu id quoque accidere vidi, ut naphtha, licet nulla antea guttula decidiſſet, vaſis deſtillatoriis vix ſeparatis, protinus per retortae ſupercilium non guttatim ſed rivuli ad inſtar deflueret.

7.) Quod denique ad inſignem illam naphthae iacturam attinet, quae in utroque experimento (Exp. VIII. IX.), ſeſe obtulit; eam ex ipſa ſumma huius liquoris ſubtilitate ac volatilitate, neutiquam vero ex deſtructrice quadam calcis ſalitae vi derivandam eſſe, ex tentamine ſequente pateſcit, quo naphtha ad ſummum puritatis ſtatum iam perducta et ſimplici poſtea rectificationi per ſe ſubiecta, ſimile plane ponderis ſui decrementum paſſa eſt.

EXPER. X.

Vt explorarem; poſſitne naphthae noſtrae ſubtilitas ultro adhuc intendi; tenuioris illius in antecedente operatione obtentae naphthae, cuius gravitas ſpecifica = 716, drachmas 50 rectificationi per ſe ad ſiccitatem usque ea cautione ſubieci, ut per omne deſtillationis intervallum moderatiſſimo ignis regimine, ne liquor ebulliret, uterer. Finita hac deſtillatione, impenſae naphthae decrementum 15 drachmarum deprehendi; atque prima, quae tranſiit, naphthae portio, eaque 18 drachmarum, gravitate ſpecifica = 719 pollebat; in ſecunda, quae 12 drachmarum erat, eam = 716; in tertia demum et ultima 5 drachmarum quantitate eandem = 720 reperi.

NOTANDA.

1.) Primae et ultimae huius naphthae portionis gravitatem ſpecificam ea, qua eadem ante rectificationem pol-

pollebat, maiorem ſi perpendimus: fieri non poteſt, quin ſuſpicemur, naphtham, ſumma noſtrae methodi efficacia non obſtante, aliquam adhuc ſpiritus portionem indiſſolubili nexu retinere.

2.) Ceterum ex hiſce omnibus longe veriſimillimum eſt, fore, ut, ſi calcis ſalitae loco, aliud eripiendae ultimae huius portionis ſpirituoſae medium efficacius forte inveniretur, nulla quidem arte prohiberi tunc poſſet, quonimus omnis, quanta eſt naphthae portio, aëris permanentis, non niſi apparatu pneumatico excipiendi, forma ſe indueret.

3.) Atque ego quidem iam nunc hac de re ita ſentio, ut exiſtimem naphtham, ut liquoris palpabilis formam conſervet, ſpiritus aliqua copia, vehiculi quaſi vice, opus habere; perinde ac alcali volatile cauſticum et acida volatiliora, quae, ut ſcimus, deficiente determinata quadam aquae quantitate, aeque aëris permanentis forma ſeſe induant.

4.) Cum experimenta haec omnia aeſtivo tempore a me inſtituta ſint: monendum eſt, fieri forte poſſe, ut, ſi eadem ſummo hiemali frigore inſtituerentur, naphtha eo, quem hucusque ei impertire mihi licuit, non nihil intenſiorem tenuitatis gradum admitteret.

5.) In ultimis duobus noſtris tentaminibus id quoque ſingulare videtur, quod prior tranſeuntis naphthae portio gravitatem ſpecificam, ea ſubſequentis mediae, maiorem plerumque exhibeat; cuius tamen phoenomini ratio ſine dubio ex inſigni illa, quae, receptaculo nondum mutato, obtinet,

tinet, aëris naphthoſi expanſione repetenda eſt; qua ſit ut repentina aëris huius inter ipſam vaſorum disiunctionem relaxatione, ſubtiliſſimae naphthae partes auferantur.

§. 10. Cum igitur omnibus tentaminibus hactenus a me expoſitis inſignis et praecellens calcis ſalitae in educendis e naphtha partibus heterogeneis praecipue ſpirituoſis, efficientia extra omne dubium poſita ſit: haud ſuperfluum duco, novi huius naphthae depurandae proceſſus operationes omnes hic ſuccincte deſcribere.

1.) Naphtha depuranda ſalis tartari beneficio et ſueto modo ab omnibus partibus aquoſis et ſulphureo-vitriolicis liberetur.

2.) Decantatae a ſale tartari naphthae ſub frequenti vitri agitatione per vices tamdiu parvae calcis ſalitae probe ſiccatae portiones addantur, donec mixtio ſponte ac repente in duos divellitur liquores. His ſeparatorii ope caute a ſe invicem ſegregatis, naphthae denuo calx ſalita admiſceatur: eademque toties repetatur operatio, usque dum naphtha ab omni, quo quidem frigida hac tractatione ſeparari poteſt, ſpiritu liberetur et plane pellucida appareat.

3.) Cunctis hac in operarione obtentis ac commixtis liquoribus ſpirituoſo-ſalinis ſub vitri agitatione quadrupla vel tripla aquae purae copia admiſceatur. Naphtha, quae repente inde ſegregatur, a liquore ſalino aquoſo-ſpirituoſo ſeparata eodem omnino ac ante modo, calcis ſalitae ope a ſpiritu liberetur.

4.) Duae hae naphthae portiones (m. … et ….), ſi quidem eas ab illa, quae frigida hac tractatione auferri nequit, ſpiritus portione plane liberare non ſit propoſitum, immittantur retortae ſicciſſimae, adplicatisque adplicandis, moderatiſſimo igne inſtituatur deſtillatio tamdiu continuanda, donec uno eodemque caloris gradu nihil iam transgrediatur; quo facto, ſuaviſſimam eamque ea quam modis difficilioribus hodienum uſitatis obtineri licuit, ſubtiliorem naphtham obtinebis.

5.) Sin vero eidem ſummum, quem licet, tenuitatis gradum conciliare animus ſit; ſimplicis illius rectificationis loco, naphthae in retortam capaciorem immiſſae tanta calcis ſalitae ſicciſſimae copia, quanta abſorbendae omni naphthae in retorta contentae ſufficit, addatur, retortaque arenae balneo immergatur; adplicato excipulo capaciſſimo, iuncturisque veſica porcina probe clauſis, omnia per diem et noctem, nullo admoto igne, reponantur; deinde ignis leniſſimus ea moderatione ac cautione ſubminiſtretur, ut quantum quidem fieri poteſt, nullae plane per retortae orificium guttulae decidant. Receptaculum interea aquae immerſum, quo naphthae ſub aëris forma tranſeuntis in liquorem condenſatio maturetur, glacie vel nive diligentiſſime refrigerari, oportet. Hicce ignis gradus absque ullo augmento eousque conſervari debet, donec naphthae, inſigni ſatis celeritate in excipulo confluentis, quantitas iam non augeri amplius videatur. Quod ſi contigerit, effundatur naphtha, idemque recipulum denuo applicetur, atque iam nunc, igne multum aucto, ſuperſtes in calce ſalita ſpiritus, parva adhuc naphthae copia et oleo eſſentiali imbutus, tranſibit. Vehementiſſimo denique igne phlegma acido ſalis et parva adhuc

ſpiri-

ſpiritus copia impraegnatum, cui olei eſſentialis non nihil innatat, ſubſequitur. Sal in retorta reſiduum, aqua frigida ſolutum filtratumque et inſpiſſatum, ſimili novae operationi aptum evadit.

Monendum id quoque eſt, praevia naphthae per ſal tartari dephlegmatione, ſi quidem naphtha ſulphureis particulis heterogeneis libera ſit, ſuperſederi poſſe, quia calx ſalita educendarum et aquoſarum particularum et ſpirituoſarum duplici munere una fungitur.

§. 20. Cum experimenta noſtra evincant, ſub frigida cum calce ſalita tractatione certam ſemper eamque determinatam adhuc ſpiritus quantitatem, cuius perfecta ſegregatio ſiccam naphthae ſuper calce ſalita abſtractionem poſtulat in naphtha retineri; facile quis ſpem capere poſſet, fore, ut perfecta naphthae a ſpiritu liberatio uno actu obtineatur, ſi ea immediate, id eſt, absque praevia frigida tractatione ſuper debita calcis ſalitae copia abſtraheretur. Verum enim vero monendum mihi hic eſt, optatum hoc et ſpe praeſumtum operationis compendium inſigni ea difficultate laborare, quod calx ſalita, naphtha eiusmodi ſpirituoſa impraegnata hancque ob cauſſam ſpiritu nimis imbuta, accedente calore, ex parte ſolvatur; quo ipſo fit, ut oriunda inde mixtionis quaedam pultis ad inſtar ſpiſſitudo expellendae leviori naphthae haud mediocre obſtaculum ponat, et igne, quo iam quidem opus eſt, longe fortiore certa quoque ſpiritus quantitas cum naphtha ſimul transpellatur, qua vel unica cauſſa fit, ut praevia naphthae frigida depuratio neutiquam ſupervacua cenſenda ſit.

DESCRIPTION

De la mine d'argent de Salaïrsk aux monts d'Altaï en Sibérie.

Avec une Planche.

Par

B. F. J. HERMANN.

Préſenté à l'Académie le 5 Mai 1796.

Cette mine eſt une des plus récentes en Sibérie, car elle n'eſt exploitée que depuis une dizaine d'années; mais elle commence à devenir très importante, vue la grande quantité de minérai, qui à la verité n'eſt pas riche, mais ſi abondant que ſans doute la *mine de Salaïrsk* ſera un jour la premiere de toutes les mines altaïques jusqu'à preſent connues, d'autant plus, que la célébre mine à la *montagne de Serpents* va être bientôt epuiſée.

Elle eſt ſituée au Gouvernement de *Tobolsk*, dans le cercle de *Kousnetzk*, 140 verſtes de *Barnaoul* & 387 verſtes de la ſusdite mine à la *montagne de Serpents.* (*Zméof* ou *Zméinogorskoï-Roudnik*).

Il

Il y a une chaine de montagnes, qui, en ſortant des plus grandes élévations de monts d'Altaï aux environs du grand lac *Téletzkoé*, ſe ſépare dans le voiſinage de la ville de *Kousnetzk* en deux branches, dont l'une fait la rive droite du *Tome*, & l'autre celle du *Tſchoumiſch*; ces rivières ſont ſeparées par une vallée très large, au milieu de la quelle ſe trouve l'*Jnaé*, autre rivière conſidérable. Toutes les deux de ces branches ſont connues ſous le nom de *montagnes de Kousnetzk*.

C'eſt ſur le coté oriental de la derniere que ſe trouve la mine de *Salaïrsk*; ſavoir dans la contrée, où l'on rencontre les ſources du grand *Batſchat* & du ruiſſeau *Saraïr*, qui tous les deux tombent dans l'*Jnaé*, laquelle ſe jete dans l'*Ob*. La gîte de minérai ſe trouve à peu près ſous le 54[e] degrés 10 Min. de latit. & 103 degr. 12 min. de longit. à compter du méridien pariſien.

Cette chaine de montagnes, qui s'etend comme un bras ſéparé vers le Nord-Oueſt en ſe perdant inſenſiblement dans la grande plaine de l'*Ob*, a une longueur de plus de 300 verſtes, en comptant du fort de *Kouſédaévsk* jusqu'au village de *Légotaevsk*, & une largeur de 50 à 60 verſtes & plus; mais ſes ſommets ne s'élévent que ſur une hauteur très peu conſidérable: cependant un des plus hauts, au pied duquel le *Batſchat* prend ſa ſource, & qui ſe trouve 12 verſtes éloigné de la mine, peut avoir 1000 pieds de hauteur. Il conſiſte d'une eſpéce de porphyre à baſe de trappe gris avec de petits points de feldſpath blanc & de Hornbleinde verte en aiguilles très minces. Les roches les plus proches de la mine conſiſtent de ſchiſtes

tal-

talqueux, de pierres calcaires compactes, de ſchiſtes argileux & de Serpentine. Le granit ne ſe rencontre que ſur la montagne de *Bourſouk*, la plus haute aux environs des ſources du *Tome-tſchoumiſch*, & dans le voiſinage de la *Kmelovka*, qui tombe dans le *Stepnoï-tſchoumiſch*. Plus loin, entre le *Butſchat* & l'*Jnaé*, & entre celle-ci & le *Tome* d'un côté, on ne trouve guère d'autres roches que des pierres calcaires avec des coquilles petrifiés, & des couches de pierre ſabloneuſe, remplies de veines & de lits de charbon de terre & de bois foſſile. De l'autre coté on voit une plaine d'un etendu immenſe, dans la quelle l'*Ob*, le *Tſchoumiſch* & pluſieurs autres rivières ont leur courſe.

Toutes ces montagnes ſont couvertes d'une couche épaiſſe de terre végétale, de bois & des herbes d'une hauteur extraordinaire. de ſorte qu'il eſt très rare de trouver quelque part la roche à nud. Sur les ſommets on trouve des *cedres* (Pinus cembra) des *pins* (Pinus picea & abies) des *bouleaux* (Betula alba) & des *trembles* (Populus tremula). Sur les pentes outre ces eſpéces d'arbre il y a encore des *ſapins* (Pinus ſilveſtris) & de la *mélèſe* (Pinus larix); mais la plûpart de tout ce bois conſiſte de *pins*, de *bouleaux*, de *trembles* & de *mélèſes*.

Dans ces bois presque impénetrables il eſt bien difficile de faire quelques découvertes minérales; auſſi n'étoit-il que par hazard qu'on a trouvé *la mine de Salaïrsk*. On en eſt redévable à un exilé, nommé Dmitri *Popov*, grec de nation, qui, étant fletri par la knoute, eſt condamné de finir ſa vie en Sibérie. Ici il a été employé pour chercher des mines & des pierres & il parcourût le pays en ramaſ-

ſant

ſant tout ce qu'il pût trouver. En 1787 il vint au village de *Salaïrsk*, ſitué ſur la petite riviere *Saraïr*, 11 verſtes de l'endroit vers le Nord où ſe trouve preſentement la minière. Il demanda aux payſans, s'ils ne ſavoient pas où trouver des mines ou des pierres, & un Tatare nommé *Nuiſchev* lui apporta quelques pierres qu'il avoit pris entre les racines d'un ſapin renverſé par le vent, juſtement ſur le lieu, où il avoit ſon poſte pour chaſſer des martres Zibellines. L'exilé *Popov*, qui pourtant n'a la moindre connoiſſance des mines ni des pierres, les apporte avec quantité d'autres à *Barnaoul* *), où l'on reconoît un ſpat péſant, qui contenoit ½ ſolotnik d'argent par poud; & c'étoit preciſement une des pierres, qu'il avoit reçu du tatare; celui-ci montra enſuite l'endroit & le travail commençoit. On l'a nommé *la mine de Salaïrsk* à cauſe de la proximité du ſusdit village, lequel cependant proprement s'appelle *Saraïrsk*, de cette petite rivière qui par les tatares, habitans de ces contrées, eſt nommée *Sairaïr*.

On ſait d'ailleurs, que dans les monts d'Altaï presque toutes les mines ont été trouvées ſelon les indices des travaux anciens; mais celle-ci n'en montre aucun veſtige, quoiqu'il y ait une ancienne mine de cuivre, qui ne s'en trouve éloignée que 10 verſtes vers le *Saraïr*, nommée *Tſchetſchoulikinskoï*, où même on a découvert des couches entieres de ſcories, comme temoins des fondéries anciennes.

Les premiers travaux de *Salaïrsk* conſiſtoient en quelques recherches à la ſuperficie de la montagne, qui con-

*) Ici ſe trouve la Direction de toutes les mines & fondéries d'Altaï.

contient le filon; mais comme celui-ci eſt d'une puiſſance (Mächtigkeit) très conſidérable en préſentant au jour deux ſommets allongés, qui conſiſtent tout-entiers de ſpat peſant, lequel cependant n'eſt pas riche, on ne l'a pas pris d'abord pour le filon même, mais pour le *parois* ſupérieur en cherchant la mine dans le ſchiſte talqueux, qui lui ſert de *parois* inférieur & qui en quelques endroits eſt entremélé des mines en rognons & en petites veines confuſément diſperſées & pour la plûpart aſſez riches. Auſſi l'officier de mines, qui au commencement dirigeoit les travaux, d'ailleurs homme de metier, aſſure dans un ouvrage imprimé de n'avoir jamais vû une diſpoſition ſi irréguliere, au lieu qu'aujourdhui il eſt demontré, qu'on ne ſauroit guère trouver un filon plus régulier que celui de *Salaïrsk.*

La montagne s'etend du Nord vers le Sud & le filon a presque la même direction; le coté oriental fait ſon *parois inférieur* (Liegendes) & celui d'occident le *parois ſupérieur* Hangendes). L'inclinaiſon du filon eſt donc de l'Eſt vers l'Oueſt ſous 20 jusqu'à 25 degrés ſur le côté du Nord, eſt de 45 à 66 degrés dans les travaux ſur le coté du Sud. Sa continuation (das Streichen) eſt connûe à preſent ſur une diſtance de plus de trois verſtes ou 1500 toiſes ruſſes; mais les travaux les plus conſidérables ne ſe trouvent que ſur l'extrémité méridionale du filon, à cauſe du meilleur minerai qui ſe trouve ici & de manque de gens pour l'attaquer par tout, ce qui même n'eſt pas encore nécéſſaire.

Au commencement & pendant les premieres années on a pouſſé deux *galeries* (Stollen); l'une eſt nommée *Doucovskoï*

covskoï & l'autre *Boriſſoglebskoï;* celle-ci eſt travaillée à travers le parois ſupérieur & celle-là à travers le parois inférieur en continuant la premiere jusqu'à 74 toiſes de longueur ſans trouver par pluſieurs *traverſes* (Streken und Querſchläge) d'autres mines que des rognons disperſés dans le ſchiſte talqueux en laiſſant le filon par deſſus. On a à la verité creuſé un puits dans le filon même, appellè *Caritonovskoï*, dans une direction diagonale ſelon l'inclinaiſon du filon jusqu'à 70 toiſes de profondeur; mais comme on n'y trouvoit pas le minérai aſſez riche pour etre fondu avec profit on étoit presque decidé d'abandoner tout le travail, lorsqu'on 178 on trouva de bon minèrai vers l'extrémité méridionale où la crête du filon a été travaillée au jour à taille ouverte, (Tagegrube) & où l'on a creuſé depuis un puits, nommé *Rosnoſsnoï*, par le quel on s'eſt convaincu, que le filon change ici très conſidérablement ſon inclinaiſon, laquelle va peu à peu de 25 à 45 & à la fin à 60 degrés & plus; mais en même tems on y rencontroit en abondance de très bon minèrai. Le filon a été donc attaqué fortement à ce côté-là par pluſieurs travaux qu'on nomme *étages*, l'un ſous l'autre; & pour les tenir à ſec & à cauſe de la meilleure communication de l'air, on y creuſoit le puits de *Soïmonovsky*, duquel tous les travaux ſur cette extrémité du filon ſont nommés; mais comme ces deux puits ne ſatisfont pas encore, on va creuſer un nouveau, & une longue galerie, qui feront des travaux d'une auſſi grande importance que d'utilité.

La continuation du filon en comptant de l'extrémité des travaux de *Soïmonovsky* jusqu'à l'extrémité de ceux de *Caritonovsky*, va à plus de 180 toiſes étant partout ou viſible

ſible au jour ou connû dans l'interieur de la montagne. Sa puiſſance (Maechtigkeit) eſt de 13 jusqu'à 16 toiſes & plus, y compris les couches & les rognons de talc, qui ſe rencontrent en pluſieurs endroits dans le ſpat péſant, dont tout le filon eſt compoſé. Quant à la profondeur perpendiculaire des travaux preſents, elle eſt dans ceux de *Caritonovsky* de 20 & dans les travaux de *Soïmonovsky* de 45 toiſes.

Les parois les plus proches du filon ſont compoſés de ſchiſte talqueux; mais comme celui-ci eſt lui même, ſurtout dans le parois inférieur, chargé de mines y confuſement diſperſées, on doit conſiderer comme *veritable parois inférieur* (das wahre Liegende) *la pierre calcaire compacte*, qu'on a trouvé dans les travaux de *Soïmonovsky*, & dont même à la ſurface du terrein ſont compoſées quelques collines tout près du filon, ce qui demontre, que toute la maſſe de minérai, avec ſon ſchiſte talqueux, répoſe ſur cette pierre calcaire, qui lui ſert de mûr. Le parois ſupérieur ou le *toît* du filon conſiſte de ſchiſte talqueux melé de quartz & de pierre de corne en petites couches & grains. On y a rencontré pluſieurs petites veines en direction presque parallele avec le filon principal, dont l'une contient des mines de cuivre, qu'on a attaqué par le puits de *Troitzkoï*; les autres ont été trouvées quand on s'enfonçoit dans le puits de *Soïmonovskoï*.

Pour faire mieux connoître l'intérieur de cette grande & importante gîte de minerai j'indiquerai les roches, les pierres & les mines, qu'on a rencontré dans pluſieurs de ſes travaux.

En

En travaillant p. e. dans la partie de *Soïmonovsky* la *traverſe mitoyenne* (die mitlere Strecke) au niveau du ſol du puits *Rosnoſsnoï* en ligne droite du parois inférieur vers le toit, on a trouvé immédiatement ſur la pierre calcaire, qui eſt, comme il eſt dit ci-deſſus, le mûr veritable:

1) Argille brunâtre endurcie, ferrugineuſe, chargée de quelques rognons de mine de cuivre bleu -	5 toiſes
2) Argille rouge, ferrugineuſe avec de petits rognons de cuivre vert & bleu - - -	2 —
3) Argille jaunâtre & rouge, denſe & onctueuſe au toucher - - - - - - - -	1 —
4) Talc blanc, mélé de quartz - - - -	$1\frac{1}{2}$ —
5) Schiſte talqueux - - - - - -	$\frac{1}{3}$ —
6) Le filon, conſiſtant ici de ſpat peſant impregné d'ocre rouge presque partout ſans autre mélange - - - - - - -	$12\frac{1}{2}$ —
7) Schiſte talqueux, avec des rognons de ſpat peſant - - - - - - -	5 —
Enfin le ſchiſte talqueux du toît ſans mine, excepté deux petites veines de pyrite.	
	27 toiſes.

Mais par le travail de la *traverſe ſupérieur*, qui eſt 12 toiſes plus haute que celle-là, & presque dans la même direction on rencontroit immédiatement après la pierre calcaire: *).

Yy 2 1)

*) Voyez la Planche. V. Profil B, No. 2. 4 5. 6. 7. 8. &c.

1)	Argille brunâtre ferrugineuſe - - - -	$1\frac{1}{2}$ toiſes.
2)	Argille rougeâtre avec des rognons de mine de cuivre bleue & verte - - - -	$1\frac{1}{3}$ —
3)	Argille jaunâtre - - - - -	1 —
4)	Schiſte talqueux avec des maſſes de quartz	$5\frac{1}{4}$ —
5)	Spat peſant ordinaire - - - - - -	$\frac{1}{4}$ —
6)	Spat peſant mélé d'ocre très riche - -	$1\frac{1}{2}$ —
7)	Schiſte talqueux avec des rognons de quartz	$\frac{1}{2}$ —
8)	Talc avec du ſpat peſant - - - - -	$\frac{2}{3}$ —
9)	Le filon conſiſtant de ſpat peſant mélangé par-ci par là de talc - - - - -	16 —
10)	Schiſte talqueux avec des rognons & maſſes de ſpat peſant - - - - - -	1 —
	Enfin le ſchiſte du toît, qu'on a traverſé ici ſur une diſtance de 20 toiſes.	
		29 toiſes.

En perçant le puits de *Soïmonovskoï* on a trouvé les couches ſuivantes:

		toiſes.	archines.
1)	Terre végétale noire - - - - -	—	$\frac{3}{4}$
2)	Argille griſe - - - - - - -	—	$1\frac{1}{2}$
3)	Schiſte talqueux jaunâtre, pour la plûpart très mou - - - - - -	6	$2\frac{1}{4}$
4)	Schiſte talqueux blanc & gris, plus ferme & parſemé de pyrite ſoufreuſe -	27	$2\frac{1}{4}$

5)

	toſes.	iarchines.
5) Schiſte talqueux melangé de quartz, pierre de corne & de ſpat peſant, chargé de pyrite - - - -	2	—
6) Spat peſant parſemé de pyrite & de mine de cuivre griſe - - -	3	1
7) Schiſte talqueux avec du quartz - -	1	—
8) Spat peſant avec de la pyrite & des mines de cuivre griſe; ici on travaille actuellement	—	$1\frac{1}{2}$
	42	$\frac{3}{4}$

Mais dans les travaux de *Caritonovsky* on n'a pas encore percé jusqu'au veritable parois inférieur, c'eſt-à-dire jusqu'à la pierre calcaire; auſſi les couches de la gangue n'y varient pas ſi ſouvent qu'à l'autre extrémité. Dans la plus grande profondeur de la galerie diagonale, appellée *Caritonovsky*, on a travaillé vers le puits de *Troitskoï*, où l'on trouva:

1) Schiſte talqueux, le parois inferieur ſuppoſé.

2) Spat peſant impregné de mine (la moitié du filon) 5 toiſes.

3) Schiſte talqueux, melangé des maſſes de ſpat peſant, de quartz, de pierre de corne & d'ocre - - - - - -	15	—
4) Spat peſant, l'autre moitié du filon - -	6	—
5) Schiſte talqueux, parſemé de beaucoup de pyrite; c'eſt le toît.		
	24 toiſes.	

En

En travaillant le puits de *Troitzkoï* il ſe trouvoit ce qui ſuit :

	toiſes.	archines.
1) Terre végétale melée d'argille - -	—	$\frac{3}{4}$
2) Veine de mine de cuivre, conſiſtante d'un melange de ſpat peſant, talc, ſchiſte & ocre, chargée de cuivre bleu & vert, de pyrite & de mine de cuivre griſe - - - - - -	—	3
3) Schiſte talqueux jaunâtre en feuilles très minces - - - - - - -	5	—
4) Schiſte talqueux griſâtre, plus ferme, melé de quartz & parſemé de pyrite ſoufreuſe - - - - - -	12	$1\frac{1}{2}$
5) Spat peſant, parſemé de la même pyrite - - - - - - - - -	—	$\frac{3}{4}$
6) Schiſte talqueux, chargé de pyrite, où l'on travaille actuellement.		
	21	—

Par ce recit on voit aiſement, que le filon varie à la verité dans ſes propriétés, dans ſa largeur & ſurtout dans ſa richeſſe. Son minérai eſt bien plus riche vers le midi, où le filon, en s'abaiſſant tres ſenſiblement dans le valon, tombe dans une grande profondeur, au lieu que dans les travaux de *Caritonovsky* on voit des grandes maſſes de ſpat au jour, dont la poſition eſt conſidérablement plus élevée & leſquelles en même tems ne ſont pas riches; ici le filon couche fortement, là il eſt vers la fin presque perpendi-

perpendiculaire. Mais c'eſt toujours un amas étonnant de minérai; ſa puiſſance eſt très-conſidérable, & le ſpat peſant, qui fait la matrice, eſt partout argentifer; en un mot, c'eſt un des plus beaux & des plus importants filons, qu'-on peut voir.

Les roches & les mines, qu'on a trouvé jusqu'à preſent dans la minière de *Salaïrsk* ſont les ſuivantes:

a) Roches. (Bergarten oder das Liegende und Hangende).

1.) *Pierre calcaire.* Elle eſt ou compacte ou d'un grain très fin, de couleur blanche & griſâtre; en lames minces elle eſt demi-transparente & ſi dure, qu'on en peut tirer quelques etincelles avec le briquet. Elle ſe trouve en grandes maſſes & blocs, diſpoſés non en *couches*, mais en *bancs épais*, fendûs en tout ſens. Elle ne contient les moindres veſtiges des coquilles petrifiées. Cette roche eſt, comme je l'ai dit, le mûr (das wahre Liegende) ſur lequel toute la maſſe du filon répoſe.

2.) *Schiſte talqueux.* Il preſente quelques variètés, dont l'une ſe laiſſe fendre en feuilles très minces. Sa couleur eſt blanche ou jaunâtre; il eſt onctueux au toucher, d'un tiſſu feuilleté & mou. Entre ſes feuilles & lames ſe trouvent des grains de quartz & ſouvent de ſpat peſant. De cette ſorte eſt la plûpart du ſchiſte, qui ſert de parois inférieur du filon le plus proche. L'autre variété eſt compoſée de talc blanc, mélé de beaucoup de grains & rognons de quartz & de pierre de corne; il eſt aſſez compacte & ne

ne ſe laiſſe pas fendre en feuillets minces; il fait la plus grande partie des couches, qui couvrent le filon & lui ſervent par conſéquent de toît. La troiſieme variété eſt de couleur griſe ou bleuâtre, compoſée de talc gris & de couches minces de pierre de corne ou de quartz, & parſemée de beaucoup de pyrite ſoufreuſe & arſénicale. Ce ſchiſte eſt aſſez ferme & compacte; il ſe trouve dans le toît & fait communement le parois ſupérieur le plus proche du filon.

b) Gangue ou la maſſe du filon. (Gangarten.)

1.) La maſſe principale, dont le filon eſt compoſé, conſiſte de *Spat peſant*; il s'y trouve dans un amas ſi enorme, qu'il ſurpaſſe bien encore le célébre filon *à la montagne de ſerpents*; il n'eſt pas cependant partout de la même qualité. Dans les travaux de *Caritonovsky*, p. e. il eſt blanchâtre ou gris, d'un tiſſu compacte, grainu ou écailleux & aſſez pur, mais en même tems pauvre, ne contenant guère qu'un Soltnik d'argent par poud; dans les travaux de *Soïmonovsky* au contraire il eſt chargé de plus d'ocre jaune, rouge, brune ou noire, qui le ſont bien plus riche; ici ſon tiſſu eſt plus grainu & compacte qu'écailleux, ſouvent aſſez ſemblable à une pierre de ſable. Dans tous les travaux on le voit diſpoſé en *couches epaiſſes*, lesquelles s'inclinent presque également avec celles du ſchiſte, dans le quel le filon eſt encaiſſé.

2.) *Quartz*. Il ſe rencontre en veines, rognons, masſes & grains, auſſi bien dans le filon même, que dans le ſchiſte des parois & dans le talc; il n'eſt guère minéraliſé que de pyrite & de mine de cuivre griſe.

3.) *Pierre de Corne.* En maſſes & en rognons & même en couches minces entre les feuilles du ſchiſte. Elle eſt pour la plûpart de couleur griſe, compacte, demi-transparente aux extrémités & ſi dûre, qu'elle fait un feu très vif contre le briquet. Elle n'eſt pas minéraliſé que de pyrite, mais rarement.

4.) *Spat fluor.* On en a trouvé quelques morceaux non criſtalliſés de couleur violette aux travaux de *Troitzkoï* dans du quartz parmi les mines pyriteuſes.

5.) *Talc.* C'eſt lui qui fait le mélange le plus commun dans la maſſe du filon; il s'y trouve en veines, rognons & même en grandes maſſes pour la plûpart d'une figure ovale & en couches entre & dans les fentes du ſpath peſant. Il eſt toujours très mou & ſouvent comme pourri, onctueux au toucher, quelquefois luiſant, d'un tiſſu lamelleux & de couleur blanche & jaunâtre. Nonſeulement la mine y eſt communement plus riche, où il ſe rencontre dans le filon, mais ſouvent il eſt lui-même minéraliſé & contient ſurtout des rognons & des maſſes d'une ocre noire endurcie très riche en argent; on en a trouvé beaucoup dans les travaux de *Doucovsky* & autour du puits *Rosnoſsnoï.*

6.) *Argille endurcie ferrugineuſe.* Elle ſépare, comme il eſt dit plus haut, le ſchiſte inférieur & le filon de ſon mûr c'eſt-à-dire de la pierre calcaire; elle contient quelques rognons & nids de mine de cuivre bleue & verte, mais de fort peu de conſéquence. Cette argille n'eſt pas con-

connûe jusqu'à preſent que dans les travaux de *Soïmonovsky*.

c) Mines. (Erzarten.).

1.) *Or natif.* En lames & grains très petits dans une ocre rouge, couleur de cinabre, dont le ſpath peſant eſt impregné. Il ſe trouve, mais rarement, dans les travaux de *Soïmonovsky* du travail au jour (Rosnoſs) jusque dans la profondeur.

2.) *Argent natif.* En petits grains dans le ſpath peſant ocraceux & disposés de manière, qu'ils répreſentent des petits dendrites très-jolis; ils ſont fort rares & ne ſe trouvent que dans les travaux inférieurs de *Soïmonovsky*.

3.) *Ocre noire endurcie.* (Silberſchwärze). C'eſt la mine la plus riche dans toute la maſſe du filon; on en a trouvé qui contenoit 18 livres d'argent par poud. Il paroit conſiſter d'un melange d'argent natif très diviſé & de mine vitreuſe ou de mine de corne decompoſée. La plus grande partie de cette riche mine ſe trouve préſentement dans les travaux de *Soïmonovsky*, où le ſpath peſant en renferme des couches entieres; il y en a d'une toiſe de largeur & plus; ce qui eſt rémarquable c'eſt qu'elle ſe trouve toujours à la proximité du talc ou dans le talc même.

4.) *Ocre brune, rouge & jaune.* Cette mine eſt ici la plus commune & dont la plus grande partie du ſpath peſant a ſon contenu en argent; même on peut dire, que toute l'exploitation ne conſiſte que de ſpath plus ou moins char-

chargé d'ocre argentiſere, dont l'une pourtant eſt plus riche en argent que l'autre. L'ocre rouge & jaune fait le ſpath peſant plus riche que celle de couleur brune, qui contient trop de fer, quoique toute la mine de *Salaïrsk* eſt aſſez ferrugineuſe & beaucoup plus qu'aucune autre aux monts d'altaï. Le ſpath peſant impregné d'ocre jaune ou rougeâtre contient ordinairement 4 à 5 Solot. d'argent, au lieu que les autres varietés ne contiennent guère qu' $1\frac{1}{2}$ jusqu'à 2 ſol. par poud.

5.) *Mine d'argent griſe.* On en trouvoit dans le ſpath peſant avec de la pyrite dans les travaux de *Troitzkoï*, mais en petite quantité; elle contient 7 ſol. d'argent par poud.

6.) *Mine de cuivre griſe.* Elle ſe trouve, mais pas en grande quantité, dans le puits de *Soïmonovskoï*, où l'on a rencontré une veine cuivreuſe ſéparée. Elle eſt disperſée dans le ſpath peſant avec de la pyrite de cuivre, de ſoufre & d'arſenic. La mine pure contient 14 livres de cuivre & $\frac{3}{4}$ ſol. d'argent par poud; mais avec la matrice $1\frac{1}{2}$ liv. de cuivre & $\frac{1}{2}$ ſol. d'argent.

7.) *Mine de cuivre vitreuſe.* Elle eſt très rare & ne ſe trouve que dans la veine ſeparée aux travaux de *Troitzkoï*.

8.) *Pyrite cuivreuſe.* Dans le puits ſusdit de *Soïmonovskoï* & de *Troitzkoï*, mais en petite quantité.

9.) *Mine de cuivre bleue.* (bleu de montagne). Elle ſe trouve d'un tiſſu terreux & en petites grouppes criſtalliſées dans la veine de cuivre aux travaux de *Troitzkoï* & dans l'argile rouge, qui couvre la pierre calcaire aux travaux de *Soïmonovsky*; mais dans touts les deux endroits elle n'eſt qu'en petite quantité.

10.) *Mine de cuivre verte.* (vert de montagne). Dans les mêmes travaux, où l'on en rencontre en petites couches & rognons d'un tiſſu terreux.

11.) *Mine de plomb ſoufreuſe*, Galène. (Bleyglantz). Elle ſe rencontre, mais rarement, aux travaux de *Troïtzkoï* & *Boriſſoglebsky* parmi la pyrite.

12.) *Spath de plomb blanc.* Il ſe trouve très rarement dans les fentes du ſpath peſant en couches minces & en petites grouppes criſtalliſées aux travaux de *Caritonovsky*.

13.) *Pſeudogalène ou Bleinde de Zink.* Elle eſt rougeâtre, phoſphoreſcente & d'un tiſſu lamelleux; on en rencontre, mais rarement, dans les travaux de *Troïtzkoï* parmi la pyrite.

14.) *Pyrite ſoufreuſe & arſénicale.* Elle ſe trouve en grande quantité dans le ſchiſte qui fait le toît, ſurtout dans les travaux de *Troïtzkoï* où même elle eſt exploitée pour ſervir de fondant à la mine ſpateuſe. On rencontre la pyrite également dans les travaux de *Soïmonovsky*, mais en beau-

beaucoup moindre quantité; & c'eſt une choſe rémarquable que la pyrite n'exiſte pas que dans le ſchiſte ſupérieur, car il n'y en a point du tout dans le parois inférieur.

La meilleur de toutes ces mines eſt, comme j'ai déjà dit, l'ocre noire, dont une partie du ſpath peſant & du talc eſt chargée. L'une portant l'autre elle contient 6 Sol. d'argent par poud. — La mine en plus grande quantité eſt le ſpath peſant mélé d'ocre rouge & jaune, lequel en général contient $1\frac{1}{2}$ jusqu'à 2 Sol. d'argent; il y en a cependant qui eſt plus riche. La plûpart de mine eſt tirée préſentement des travaux de *Soïmonovsky*. Le nombre de tous les ouvriers y employés va aujourd'hui à 700 têtes.

Voici toute l'éxploitation de la minière de *Salaïrsk* de chaque année depuis le commencement:

En

En 1782 & 1783, Mines riches, qui meritent d'etre fondues, de 1¼ à 3¼ Sol. d'arg. par poud - - 70,000 p.

	Mines pauvres - - - -	de ½ à 1 -	13,100 —
1784.	— riehes - - - - -	1¼ à 30 -	16,670 —
	— pauvres - - - - -	½ à 1 -	17,200 —
1785.	— riches - - - - -	1¼ à 1½ -	20,700 —
	— pauvres - - - -	1 - -	68,750 —
1786.	— riches - - - -	1¼ à 1½ -	44,000 —
1787.	— riches - - - -	1¼ à 1½ -	40,000 —
1788.	— riches - - - -	1¼ à 3 -	88,536 —
	— pauvres - - - - -	1 - -	7,320 —
1789.	— riches - - - -	1¼ à 1½	191,851⅕ —
	— pauvres - - - - -	1 -	11,600 —
1790.	— riches - - - -	1¼ à 5 -	454,700 —
1791.	— riches - - - - - -	1¼ à 5 -	451,857⅜ —
	— pauvres - - - -	1 - -	25,400 —
1792.	— riches - - - - -	1¼ à 2½ -	334,100 —
	— pauvres - - - -	1 - -	48,600 —
1793.	— riches - - - - -	1¼ à 3½ -	351,400 —
	— pauvres - - - - -	1 - -	44,200 —
1794.	— riches - - - -	1¼ à 7 -	422,850 —
	— pauvres - - - - -	1 - -	84,200 —
1795.	— riches - - - - -	1¼ à 4 -	502,300 —
	— pauvres jusqu'au mois d'Octobre	¾ à 1 -	177,000 —

Total en mines riches - - -	2,988,965 —
pauvres - - -	485,550 —
	3,474,515 ps

En

En 1791 on a commencé à fondre ces mines aux fondéries de *Barnaoul*, de *Pavlovsk* & de *Souſounsk* en y transportant:

En 1791	de $1\frac{1}{4}$	à 5	ſol. d'argent par poud	- 351151	pouds.
1792	— $1\frac{1}{4}$	— 5	. . .	346873	—
1793	— 1	— $5\frac{1}{2}$	. . .	505272	—
1794	— $\frac{3}{4}$	— 7	. . .	560299	—

Pour l'année 1795 étoient deſtinés 600,000 pouds d' $1\frac{3}{4}$ Sol. d'argent chacun, y non compris 2 jusqu'à 300,000 pouds de mines pauvres, dont le contenu ne va au delà d'un Sol. par poud & qui ſe fondent à la nouvelle fondérie de *Gavrilovsk*, bâttie en 1793 ſur la petite rivière *Talmabaya*, 4 verſtes de la minière vers le Nord. Ainſi on exploite à préſent de la minière de *Salaïrsk* chaque année à peu près 300 pouds d'argent, dont 100 pouds contiennent environ $1\frac{1}{2}$ poud d'or, & ſi l'on continue à garder cette proportion elle en fournira encore pour plus d'un ſiècle, car en ſuppoſant la longueur du filon ſeulement de 150, ſa largeur en général de 10 & la profondeur de 50 toiſes (ce qui eſt ſurement trop peu) on aura 75,000 toiſes cubiques, dont chacune ſelon la proportien moyenne contient 2,400 pouds de minerai, & par conſequant en tout 180 millions de pouds; donc ſi l'on en déduit le quart pour la mine pauvre & le rebût, les trois quarts reſtants (ne comptant que d'un Solotnik & demi en argent chaque poud) donneront 46,871 pouds d'argent, tréſor qui ſe trouve amaſſé ſeulement dans les travaux d'aujourd'hui, ſans mêttre en ligne de compte l'étonnante quantité de ſpath peſant argentifer, dont pluſieurs ſommets ſont compoſés, qui s'étendent ſur une diſtance de plus de 1000 toiſes de la minière vers le Nord, & ou

où l'on n'a fait que quelques eſſais ſuperficiels, ayant du minérai en abondance aux endroits déjà attaqués.

Explication de la Planche. Tab. V. le filon de la mine de Salaïrsk en Profil.

Tab. V. A. *Profil horizontal*, c'eſt-à-dire le filon avec ſes parois inférieurs & ſupérieurs coupé horizontalement.

a. La galérie de *Doucovsky*.
b. La galérie de *Boriſſoglebsky*.
c. Le puits de *Caritonovsky*.
d. Le puits de *Yakoblevsky*.
e. Le puits de *Troitzky*, où l'on a trouvé un rognon de mine de cuivre.
f. Le puits pour la communication de l'air. (Lichtloch).
g. Le puits de *Rosnoſſny*.
h. Le puits de *Soïmonovsky*, où l'on a trouvé pluſieurs veines de mines d'argent, dont la direction n'eſt connûe qu'en partie.
i. Le puits d'*Ivanovsky*.
k. Le puits nouveau.

B. *Profil de travers*, pris dans les travaux de *Soïmonovsky*.

a. Le puits de *Soïmonovsky* avec pluſieurs veines de mines d'argent.

Les ſignes ſuivants regardent autant le Profil A que B.

1. Ligne, qui annonce l'endroit du filon où le Profil B eſt pris.
2. Ligne de la *traverſe mitoyenne* (mitlere Strecke) aux travaux de *Soïmonovsky*.

3.

3. La profondeur d'aujourd'hui de la minière de Salaïrsk dans les travaux de *Soïmonovsky*.
4. Pierre calcaire faiſant le parois inférieur.
5. Argille ferrugineuſe de couleur jaune & rougeâtre.
6. Schiſte talqueux, ſouvent melé de rognons & de petites veines de mine.
7. Le filon, conſiſtant de ſpat peſant entremélé par-ci par-là de Talk.
8. Schiſte talqueux, faiſant le parois ſupérieur.

C. *Profil de travers*, pris dans les travaux de *Caritonovsky*.

* 1. Ligne qui annonce l'endroit du filon où ce Profil eſt pris.
2. Schiſte talqueux faiſant le parois inférieur jusqu'à preſent connû dans ces travaux, où l'on n'a pas encore percé jusqu'à la pierre calcaire.
3. Le filon.
4. Schiſte talqueux, faiſant le parois ſupérieur.
5. Maſſes de pierre de corne & de Talk entremélé de ſpath peſant argentifer, mais pauvre.

† Pierre calcaire ſuppoſée, n'etant connûe que dans les travaux de Soïmonovsky.

X. Argille ferrugineuſe, ſuppoſée de même.

EPILOBII
SPECIES NOVA DESCRIPTA.

Ab
JOAN. LEPECHIN.

Conventui exhibita die 15 Sept. 1796.

Pulchra haec in genere ſuo Epilobii ſpecies enata eſt e
Tab. VI. ſeminibus lectis in confiniis Kamptſchatkae a Clariſſ. Laxmanno iuniori, qui, in itinere ſuo per mare Parificum in Iaponiam anno 1790 ſuſcepto, varia Naturae atque induſtriae producta legit in inſulis in itinere ſuo obviis; ſemina que mihi per beatum patrem ſuum benevole communicare non recuſavit; hinc ſpeciem hanc Epilobii ſub nomine *Kamtſchatici* proponere placuit.

Pertinet ſpecies noſtra ad illam generis ſui ſubdiviſionem, ubi ſtamina conniventia ad ſtylum piſtillum que declinatum eſt, et a reliquis huius generis ſpeciebus differt *foliis lanceolatis integerrimis, ſeſſilibus, caulinis alternis, rameis oppoſitis.*

Deſcriptio.

Radix perennis, deſcendens, diviſa in fibras plurimas ſubalbidas, ex capitulo ſuo novas proles emittens.

Cau-

Caulis non raro ultra ulnam longus, teres, glaberrimus, pennae anſerine craſſitie, ſublignoſus.

Folia caulina lancceolata, ſeſſilia, pallide viridia, integerrima, tenuiſſimo tomento, praecipue in plaga inferiori, obſita, alterna, ex alis ſuis emittentia ramulos, qui in planta aetate provectiori inferne areſcunt atque emarcida decidunt, caulem que ſiſtunt nudum.

Folia ramea oppoſita, ſeſſilia, caulinis conformia, ſed minora, paribus cruciatim diſpoſitis.

Flores ex toto genere maximi, in ſummitate caulis ex alis foliorum erumpentes, pedunculati, pedunculis unifloris, germine triplo brevioribus.

Perianth:, prouti genus fert, terraphyllum, foliolis lanceolato - linearibus, rubicundis, deciduis.

Ceroll: petala iiſdem quatuor, ſat magna ex ovato-lanceolata, integerrima, pulchro roſeo ſaturato colore tincta, petalo ſuperiore aliquantum longiore, anguſtiore.

De partibus genitalibus monuimus ſupra.

Germen, pro more generis, longiſſimum, cylindraceum, eodem ac petala imbutum colore, ſed magis ſaturato.

SAPONIS LAPPONICI PRAEPARATIO ET VSVS.

Auctore

N. OZERETSKOVSKY.

Academiae exhibita die 3 Octob. 1796.

Lappones, Roſſiae ſubditi, parant ſuum ſaponem ex eiusmodi ſubſtantiis quibus veri Saponarii neutiquam utuntur, et ſapo eorum tales edit effectus, quales in alio ſapone, peritiſſime etiam confecto, nemo, quantum ſcio, hucusque eſt expertus; quamobrem, methodum, qua is paratur, deſcribere et praecipuum eius uſum indicare operae praetium duxi.

Subſtantiae, ex quibus conficitur ille ſapo, ſunt cineres vegetabilium et pinguedo piſcium. Pro parandis cineribus imprimis adhiberi ſolent ligna putrida, populnea, betulina et abiegna; diligenter etiam colligitur cortex populi, quippe qui efficaciſſimos largitur cineres; ex putridis autem lignis, experientia magiſtra, maior quam ex recentibus quantitas cinerum obtinetur. Ligna illa et cortex populi comburuntur in aëre aperto ſupra terram absque fornacibus; quae operatio per aliquot dies, eodem in loco, violento igne continuatur, ita ut tandem cineres colliquefiant et in glebas coaleſcant. Hos cineres absque ulla depuratione

tione ferridae immittunt aquae, cuius duae partes ad unam partem cinerum recipiuntur. Aqua cum cineribus ſemel ad ebullitionem deducta decantatur in vas, cui linteum imponitur, ut lixivium purum absque cineribus carbonibusve eo deſtillet. Hoc facto iisdem cineribus nova denuo affunditur aqua, quae cocta non miſcetur cum lixivio primae coctionis, ſed in aliud vas defunditur, quoniam fortius ſubminiſtrat lixivium. Tandem eadem quantitas aquae in idem ahenum tertia et ultima affunditur vice; inde ortum lixivium, cum iisdem cautelis, ſeparatim defunditur, et haec tria lixivia, ab iisdem cineribus deſumta, parando ſaponi aſſervantur.

Pinguedinem pro conficiendo ſapone ſubminiſtrant pisces tam marini quam fluviatiles et lacuſtres, uti variae ſpecies Gadi, Pleuronectes Hyppogloſſus, Salmo Lavaretus, Perca fluviatilis, et omnes in genere piſces lacubus et fluviis Lapponiae indigeni. Viſcera piſcium, quae huic ſcopo inſerviunt, ſunt Hepar et Ventriculus. Partes hae ex piſcibus exemtae vel immittuntur vaſi, amplo orificio inſtructo, quod aeſtate calori ſolis exponitur, vel repletur iis ahenum, cui ignis ſubiicitur, et his duobus modis ex viſceribus illis elicitur pinguedo, quae ope ignis extracta multo purior eſt et magis guſtui placet, quam illa, quae calore ſolis, licet maiori in copia, eliquatur; haec enim retinet ſuam cruditatem et conſervat piſcinum odorem, qui etiam linteis ſapone lapponico lotis tenaciter inhaeret.

Pro conficiendo demum ſapone duae partes lixivii ad unam partem pingvedinis recipiuntur. Coquitur haec miscela in aheno ferreo ſub perpetua agitatione, quae ſpatula lignea perficitur; hoc modo praecavetur aduſtio par-

tium

tium craſſiorum, quae alias ad fundum aheni feceſſiſſent. Sub coctione, partes liquidiores forma vaporum abeunt in aëra; inde quantitas liquoris imminuitur; materies acquirit ſpiſſitudinem; in ſuperficie erumpunt bullulae, quae finem operationi imponunt. Sed quando maior copia ſaponis deſideratur, ſub ipſa coctione, in eadem quantitate adduntur lixivium et pinguedo, quae cum cocta iam materie commiſcentur et ulteriori coctione deducuntur ad conſiſtentiam ſaponis, qui tandem effunditur ſupra aſſeres et frigefactus in portiones tetragonas diſcinditur. Parant etiam Lappones alium ſaponem, qui frigore non condenſatur et formam habet paſtae farinaceae. Sapo hic conſervatur in vaſculis ligneis vel ex cortice betulae confectis, in quibus etiam per Lapponiam divenditur et in vili praetio eſt.

Vtriusque notae ſapo, ſcilicet tam ſolidus ſeu ſpiſſus, quam liquidus vel potius ad conſiſtentiam paſtae farinaceae accedens, colorem habet nigrum, qui dilutior evadit, quando et pinguedo puriſſima et cineres ex cortice populi vel ligno iuniperi pro parando ſapone recipiuntur; egregiam autem pinguedinem largiuntur viſcera Salmonis Lavareti; ſed omnis melior pinguedo ad condiendos cibos, deterior vero ad conficiendum ſaponem ſolet adhiberi.

Inſervit hic ſapo omnibus Lapponum domeſticis uſibus, quos recenſere foret ſuperfluum. Vnicum tantummodo eius uſum indicare omnino eſt neceſſe; quippe qui ſolis Lapponibus eſt proprius, et pro eorum invento iure haberi poteſt. Notum eſt, Tarandos eſſe animalia Lapponum domeſtica, quorum corpus pilis veſtitur, ut plurimum, griſeis vel potius fuſcis. Color pedum ſaepe magis eſt obſcurus et ad ni-

nigredinem vergit. Cutis autem, de pedibus horum animalium detracta, eo maiori in praetio habetur, quo albioribus pilis eſt veſtita; ex ea enim conficiuntur pro hieme calceamina, quae caro venduntur praetio, quando niveae albedinis ſunt. Pro dealbandis itaque eiusmodi pellibus, quae pilis nigricantibus ſunt tectae, utuntur Lappones ſuo ſapone, quo illas aliquoties perfricant, et lixivio abluunt, ablutas in nive volutant et tandem in aëre libero ſupra perticas extendunt; id quod ſub finem hiemis ſolent facere; quippe quo tempore nives humidae pluviaeque ad conciliandam pilis perfectam albedinem ſuam conferunt ſymbolam. Hac ratione nigricans nativus eorum color penitus evaneſcit, et minutiſſimi pili, fortiter cuti inhaerentes, colorem nanciscuntur albiſſimum nitidiſſimumque. Ex ipſa autem operatione patet, non unius ſaponis virtute id effici, ſed concurrentibus quoque aliis circumſtantiis; nihilominus id etiam fit evidens, quod ſapo principalis ſit ſubſtantia, quae disponit pilos ad amittendam eorum nigredinem. Vtrum alii quoque colores ex pellibus et pilis animalium hac ratione ope ſaponis vulgaris extrahi poſſint, experientia docebit.

NOTI-

NOTICE
SUR LES
CHARBONS DE TERRE
DANS LES ENVIRONS DE *KOUSNETZK* EN SIBÉRIE.

Avec deux Planches.

Par

B. F. J. HERMANN.

Préſenté à l'Académie le 31 Octobre, 1796.

Il n'y a que peu d'endroits en Sibérie, où ſe trouvent des charbons de terre, quoique le pays ſoit d'une étendue ſi vaſte, & que les montagnes & les couches de terre d'un origine ſécondaire & tertiaire y ſoient en abondance. Les charbons, que l'on trouve dans les environs de la rivière d'*Argoune* dans le diſtrict de *Nertſcinsk*, & ceux de la riviere de *Tome* au cercle de *Kousnetzk* dans le Gouvernement de *Kolyvan*, ont été jusqu'à preſent les plus connûs & prêsque les ſeuls. J'avois le plaiſir de trouver l'année 1795 un troiſième endroit, où il y a trois couches de charbons de terre, dont la découverte peut devenir un jour très importante à cauſe de la proximité de la riche mine d'argent de *Salaïrsk*, où ils pourront être employés à l'exploitation du minérai à l'aide des pompes à feu, qu'on s'y propoſe à conſtruire.

Les

Les deux rivières l'*Innée* & le *Tome*, qui parcourent le cercle de *Kousnetzk*, laiſſent entre elles une plaine d'une circonférence très conſidérable, remplie pour la plûpart de couches de pierres de ſable ou de molaſſe; du moins à l'entour du terrain, où ſe trouvent les charbons, il n'y a d'autre pierre. Pour faire connoitre le ſol de ces contrées je communiquerai ici quelques obſervations, que j'y ai faites dans un de mes voyages.

J'ai pris ma route de la dite mine de *Salaïrsk* vers le village de *Mérètskaya*, ſitué ſur l'*Innée*. Le chemin contient 30 verſtes. Au commencement il faut paſſer jusqu'au Sélo *Batschatsk* la chaîne de montagnes de *Salaïrsk*, qui eſt un bras ſéparé d'une partie des monts d'*Altaï*, connûe ſous le nom de *montagnes de Kousnetzk*, dont celle-là répreſente la moitié.

Les pierres, dont les montagnes de *Salaïrsk* ſont compoſées, conſiſtent dans les points les plus élevés de roches primitives; mais à l'entour de *Batschatsk*, lequel eſt ſitué ſur la pente la plus baſſe de la chaîne, il n'y a que des roches d'un origine tertiaire, c'eſt-à dire: des pierres à chaux remplies de coquilles & de coraux petrifiés, des breches ſiliçeuſes ou des poudingues & du gris. Ici commence la plaine, qui s'étend jusqu'à l'*Innée*, & laquelle n'eſt entrecoupée que de collines d'une élévation très peu conſidérable. Quoique la terre végétale ſoit en partie impregnée de Natron, elle ne laiſſe pas d'être ſusceptible de bonne culture & le pays, habité pour la plûpart des tatares, offre d'excellens paturages à leurs troupeaux; il eſt même en partie aſſez bien cultivé. Cependant on y trouve auſſi

 des

des endroits bas & marécageux, dont le ſol conſiſte de Tourbe.

Plus près vers l'*Innée* le terrain devient ſec, en s'élévant à la fin en collines de tous les deux cotés de cette riviere; elles conſiſtent partout de pierre de ſable. Aux environs du village de *Karakanskaya* on en voit une chaîne entière d'une hauteur très conſidérable, laquelle eſt viſible dans un éloignement de 30 verſtes. C'eſt dans cette chaîne de pierre de ſable que ſe trouvent les charbons de terre, lesquels ſe recontrent ici dans divers endroits; j'en ai viſité deux. Le premier ſe trouve dans les environs du village de *Mérétskaya* à l'embouchure du ruiſſeau *Mérét*
Tab. VII. dans l'*Innée*. Tout près du village il y a deux couches de charbons, dont l'une a une épaiſſeur d'une & demie, & l'autre de trois archines & plus. Elles ſont inclinées en descendant au Nord ſous un angle, qui varie de 20 à 30 degrés. Toutes les deux réposent ſur une pierre de ſable, la quelle eſt diſpoſée en bancs épais & escarpés. Sa couleur eſt griſe ou jaunâtre & ſon grain aſſez fin. Le toît, qui couvre immédiatement les charbons, conſiſte d'une marne bleuâtre bitumineuſe de 4 verſchoks d'épaiſſeur; cette marne ſe trouve auſſi quelquefois dans le milieu des couches de charbons par nids & en maſſes d'une figure ovale.

Ce toît de charbon eſt à ſon tour couvert de la même pierre ſabloneuſe; mais ici elle n'eſt pas ſi dure comme celle, qui fait la baſe. Toutes les deux contiennent par ci-par là des empreintes de rameaux & de feuilles du regne végétal.

Près

Près du village de *Konovalova*, qui eſt éloigné à 30 verſtes de *Mérétskaya*, ſe trouve l'autre endroit, où j'ai découvert du Charbon de terre. On s'y rend en montant l'*Innée* qui partout eſt bordée de montagnes ſabloneuſes. Environ deux verſtes de *Konovalova* on voit dans la rive droite une couche de charbon, dont l'épaiſſeur ne ſurpaſſe non plus trois archines, ayant d'ailleurs la même propriété comme ceux de *Mérétskaya*. Elle répoſe ſur une pierre de ſable & en eſt auſſi couverte; mais avec cette différence, qu'ici l'on trouve dans la pierre de ſable du *bois foſſile* en Tab.VIII. pluſieurs troncs, branches & même en arbres entiers, dont l'épaiſſeur va d'une demie jusqu'à une archine; mais ſa figure ronde eſt toujours un peu comprimée. Il eſt diſpoſé en différens endroits dans la roche, auſſibien *ſous* la couche de charbon qu'au *deſſus* d'elle. Il eſt petrifié & changé dans une eſpèce de Jaspe brunâtre, lequel, frappé contre le briquet, donne aſſez vivement des etincelles. Dans quelques morceaux l'écorce eſt encore aiſement à reconnoître; elle eſt même en partie changée en charbon foſſile quoique le bois ne ſe trouve jamais dans la couche charbonneuſe.

Tout près du village de *Konovalova* & par conſéquent dans le voiſinage de la dite couche de charbon, il y a des ainſi nommés *Pſeudo-Volcans* éteints, c'eſt-à dire, des bancs de pierre de ſable en collines & même en petites montagnes entières *brûlées*, dont la roche en partie eſt complètement changée en *Lave;* mais pour la plûpart la pierre n'eſt qu'à demi-brûlée, & quelquefois présque en rien alterée. La couleur de cette Lave eſt noire, brune, rougeâtre, griſe & bleuâtre; celle-ci eſt aſſez ſemblable à ce *Jaspe-Porcellaine*, qui ſe trouve en Bohême & laquelle de même eſt une production pſeudo-volcanique.

 La

La proximité des couches de charbons ne laiſſe aucun doute, que jâdis elles s'enflamèrent & brûlèrent la roche, dans laquelle elles étoient renfermées. Outre le village de *Konovalova* il y a encore celui d'*Affonina*, où ſe trouvent de pareilles montagnes volcaniques, dont la roche demi-brûlée ſert à des pierres de fournaux pour la fuſion des mines d'argent à la fondérie de *Gavrilovsk*.

Un autre Volcan de ce genre, qui brûle encore aujourd'hui, ſe trouve dans les environs de *Kousnetzk*, près du village de *Koſonkova*, où il y a des couches de charbons d'une épaiſſeur de 3, 4 jusqu'à 5 archines. Elles s'enflamèrent par hazard, & brulent dejà pluſieurs années; on ne voit point de flamme, mais de la fumée avec une chaleur bien conſidérable; cependant la feu n'agit que dans l'intérieur de la montagne.

Dans les rivages du *Tome* il y a, outre ce Volcan, encore pluſieurs endroits, où l'on trouve du Charbon de terre; p. e. à 12 verſtes de la ville de *Kousnetzk*, en remontant le *Tome*, on rencontre une couche, dont l'étendue va jusqu'à 170 ſagènes de l'Eſt vers l'Oueſt presque horizontalement; elle a une épaiſſeur d'une & demie jusqu'à 3 archines, en réposant de même, comme le Charbon de l'*Innée*, ſur une pierre de ſable & en étant auſſi couverte. Le toît a quelque part une épaiſſeur de 6 ſagènes.

En remontant la rivière encore 23 verſtes l'on trouve une autre couche de charbons. Ici c'eſt un ſchiſte marneux & bitumineux, qui contient les charbons; mais le ſchiſte lui-même répoſe non moins ſur la pierre de ſable.

L'é-

L'épaiſſeur de la couche charboneuſe, outre les bancs de ſchiſte, dans lesquels elle eſt renfermée, ne va au de là d'une demie jusqu'à deux archines.

Quant à la qualité de toutes ces ſortes de charbon foſſile, celui de l'*Innée* a l'extérieur du meilleur charbon d'*Angleterre*, & le charbon de *Kousnetzk* du premier endroit poſſède la même propriété. D'ailleurs on en a fait des eſſais à la fuſion des mines de fer dans un four de reverbère, où ils ont rendûs tout le ſervice poſſible; mais le charbon de l'endroit dernier, qui eſt mélé de beaucoup de parties marneuſes, ne s'enflamme que très lentement & ne brûle presque pas.

Explication de Planches. Tab. VII. & VIII.

Pl. VII. *a*) Couches de charbons de terre.
b) La baſe & le toît des couches charboneuſes, conſiſtants de pierre de ſable.
c) Pierre de ſable avec des impreſſions de feuilles & de rameaux.

Pl. VIII. *a*) Couche de charbons de terre.
b) Pierre de ſable.
c) Troncs de bois petrifié.

OBSER-

OBSERVATIONS SUR QUELQUES SPATS FLUORS DE NERTSCHINSK.

Par

BASIL. SEWERGIN.

Academiae exhib. d. 17 Nov. 1796.

La propriété rémarquable d'un des ſpats fluors de Nertſchinsk, de produire une lueur phoſphorique verte, quand il eſt échauffé, dont Mr. de Crell nous a fait part (Chemiſche Annalen 179[illegible]. B. 1. St. [illegible] S. 5[illegible]4.) & dont Mr. le Prince de Galitzin à Harpke ſemble avoir fait les premieres expériences, m'engagea de faire les mêmes épreuves ſur pluſieurs varietés du ſpat fluor, que j'ai pû acquerir pour cet uſage. J'ai l'honneur de preſenter ici les reſultats de ces recherches avec la deſcription plus preciſe de cette ſubſtance, dont j'ai trouvé pluſieurs varietés moins connues, comme on le verra dans la ſuite.

Les Auteurs citent avoir trouvé du fluor ſur la Niſchnaja Toungouska, ſur le fleuve Tom & autres dans

la

la Daourie; du fluor jaunâtre prés de Kiachta, du fluor verd à Camtſchtka, du fluor bleuâtre aux environs des embouchures de Gaſimour, du fluor violet & verd melangé ſur la ſelenga, à Kiachta &c.

Vû les différences frappantes des ſpats fluors obſervées nouvellement, on pourroit les diſtribuer en ſpats fluors communs ou uniformes & en ceux de couleur melangée ou bigarrés, comme eſt celui qui a été nommé Pyros emeraude.

Les ſpats fluors communs ſont ordinairement ſpatiques par toute leur maſſe, d'une transparence plus ou moins forte & de couleur uniforme, verte, griſe ou violette.

Celui de couleur verte ſe trouve de differentes nuances & ſous différentes formes, compacte & criſtalliſé en cubes & quelques fois en octaëdres. On voit depuis quelque tems dans les collections de St. Pétersbourg des échantillons les plus élégans du ſpat fluor de couleur verte obſcure cubique grouppé avec des grouppes ſeparées de ſpat calcaire jaunâtre & quelques fois presque transparent & criſtalliſé en piramides triédres allongées, ſeparées ou jointes & ramasſées enſemble dans un marbre compacte gris de la miniére Klitſchkinskoy à Nertſchinsk. On en trouve auſſi de couleur de verd de gris & tirant tant ſoit peu ſur le bleu & de couleur ſéladon, mais ces dernières varietés ſont pour la pluspart compactes en maſſes informes. Au reſte il appartient au *Calcareus fluor ſpatoſus* du ſyſteme de Mr. Werner, & je crois me pouvoir diſpenſer de repeter la deſcription, que ce celebre Mineralogiſte en a fait avec tant de ſagacité.

Le

Le ſpat fluor gris ou enfumé eſt pour la plupart tranſparent & je ne l'ai trouvé jusqu'à preſent qu'en maſſes compactes informes.

Le ſpat fluor violet ſe trouve pour la plupart en maſſes informes, mais il y en a auſſi qui eſt épars en forme de paillettes très minces. Quelquefois il eſt criſtalliſé en cubes. Sa couleur tire plus ou moins ſur le rouge. J'ai parlé plus haut de la matrice du ſpat fluor commun verd. On vient d'exploiter de la même minière du ſpat fluor violet diſperſé en petits cubes ou pailletes dans une argille griſe endurcie entremelée de la galène de plomb & de la pyrite de ſouffre, comme on le voit par les échantillons qu'on en apporte, & que l'on regardoit être du cobalte, à cauſe de la couleur rougeatre des paillettes du fluor.

Tous ces ſpats fluors ſont plus ou moins phoſphoriques étant échauffés, de la manière ſuivante.

Le ſpat fluor verd & particulièrement celui de couleur ſéladon produit la lueur la plus forte phoſphorique, qui n'eſt teinte d'aucune couleur étrangère. Le ſpat fluor gris ou enfumé a encore ceci de particulier, qu'il aquiert une couleur d'Amethiſte la plus belle, quand il eſt échauffé, mais qui ne dure qu'une minute & s'éfface entierement. Le ſpat fluor violet ne differe en cela du ſpat fluor verd, qu'en ce qu'il devient phoſphorique étant échauffé encore plus legérement.

Ils ont encore de commun entre eux, qu'ils petillent plus ou moins fortement à un certain degrés de chaleur

leur en ſe diviſant en moindres parcelles qui ſe diſperſent çà & là. On peut en excepter ſeulement celui, qui produit une lueur de couleur d'Amethyſte, qui ne petilloit pas dans mes expériences.

Ce ſont enfin les ſpats fluors qui ont été les plus connus à l'égard de la lueur phoſphorique plus ou moins forte qu'ils produiſent, aux quels on peut ajouter tous ceux, avec les quels le très-celèbre Mr. de Crell a fait ces expériences phyſiquès.

Mais je viens à celui, qui eſt devenu le plus rémarquable par cette belle & vive couleur d'Émeraude qu'il acquiert au feu ſans petiller, & qui lui a fait donner le nom de Pyro Emeraude & de Chlorophane. Mr. de Crell en parle à peu prés en ces termes: Parmi les mineraux rémarquables, qui ſont connus nouvellement, ſe trouve une éſpèce particuliére du ſpat fluor de Nertſchinsk. Suivant ſon apparence extérieure, on pourroit le prendre pour un ſpat fluor commun violet, mais il a cette proprieté particulière, qu'étant mis ſur des charbons ardens, il reçoit ſans petiller une belle couleur d'Émeraude, qu'il perd enſuite quand il eſt refroidi, & qu'il reprend étant échauffé de nouveau. Après avoir fait les récherches néceſſaires à l'égard de cette pierre, je crois pouvoir ajouter:

1.) Que ce ſpat fluor n'eſt pas toujours de couleur violette uniforme, ſinon dans de petites parcelles, mais qu'il eſt ordinairement de couleur mélangée, ce qui fait ſa prémiere différence à l'égard du ſpat fluor commun, & je l'ai trouvé *a.*) de couleur violette trés foncée & griſe. *b.*) De cou-

couleur violette foncée & blanche & c.) de couleur griſe verdatre avec une teinte violette. Cette derniere eſt quelque fois ferrugineuſe & presque toujours chatoyante de différentes couleurs en gorge de pigeon dans les ſurfaces que préſentent les caſſures.

2.) Il a toujours différens degrés de transparence dans la même maſſe, de ſorte qu'il eſt ou entièrement opaque avec des endroits tranſparens, ou qu'il eſt transparent avec des endroits plus opaques. Et ces degrés de tranſparence ſont mélangés autant que les différentes couleurs, que j'ai indiquées, ce qui fait auſſi ſa ſeconde différence ſpecifique.

3.) Il n'eſt ni tout à fait ſpatique, ni entièrement compacte, de ſorte qu'il tient le milieu entre ces différentes ſtructures paſſant plus ou moins dans l'une ou dans l'autre.

4.) Il eſt ordinairement peu luiſant avec une lueur de graiſſe, mais il a toujours par ci par là quelques endroits plus luiſans.

5.) Il eſt très caſſant & même plein de fiſſures intérieures, qui font qu'il ſe caſſe très facilement ou en morceaux piramidaux ou en romboides ; mais en général ces fiſſures ſont aſſez paralleles & préſentent la forme des barres jointes enſemble parallelement, les parties detachées de cette derniere ayant quelques fois la même forme.

6.)

6.) Il eſt toujours melangé du talc argentin en feuillets trés minces, de ſorte que je n'ai trouvé jusqu'à préſent aucun morceau, qui n'en ſoit tant ſoit peu melangé. Il y en a même qui eſt enduit de ce talc feuilleté de deux cotés en forme de ſalbande. De ſorte que ce melange du talc pris avec les autres caractéres de ce fluor, donne le moyen aſſez ſûr à le réconnoitre à la prémiere vue & toute fois qu'il ſe préſente.

Toutes ces varietés ont la proprieté de produire une lueur phoſphorique verte bleuâtre & de la couleur de la plus belle Éméraude ſans petiller, quand on les éxpoſe à la chaleur des charbons ardens ou d'une platine de fer échauffée. Et ce qui eſt rémarquable, la lueur & la couleur verte phoſphorique de cette pierre ſont viſibles non ſeulement dans les ténébres, mais auſſi en plein jour, comme j'en ai fait l'expérience devant mes Auditeurs dans mes leçons Mineralogiques de l'été paſſé. Cette couleur s'éfface auſſitôt que la pierre eſt réfroidie, & elle revient, quand elle eſt échauffee de nouveau. De ſorte que je l'ai repeté jusqu'a ſix fois avec cette ſeule différence, qu'elle revient toujours plus lentement & avec plus de peine à meſure qu'on repete la même experience. Elle devient encore plus frappante, quand la pierre eſt réduite en poudre, que l'on repand ſur les charbons ardens, qui préſente alors une quantité d'étoiles vertes mais toujours ſans aucune marque de decrepitation. Deſorte qu'à force d'expériences on pourroit venir à bout d'en faire une ſorte du plus beau feu d'artifice en miniature, quoique étant melée avec de la poudre à fuſil elle ne produiſit aucun éffet. Les endroits les plus melangés du talc mentionné deviennent rou-

 ges

ges pendant cette expérience, tandis que tout le reſte rétient ſa premiere couleur & même ſa tranſparence. Au reſte elle commence ordinairement à devenir verte dans les coins, & depuis peu à peu jusqu'au centre, comme c'eſt le cas avec l'Hydrophane qui devient transparent dans l'eau.

Quant à la cauſe de cette proprieté du Pyro-Éméraude, il eſt vraiſemblable qu'elle vienne d'un certain degré d'oxydation du fer, qu'il contient, & que cette oxydation pouſſée plus loin, quand on repete trop de fois l'expérience, lui ote enfin la propriété de produire cette phoſphoreſcence verte ce qu'il faut preſumer parce que ce fluor eſt ordinairement melangé du talc mentionné, qui y eſt ſouvent ochreux & ſe decompoſe, & que les endroits chatoyants, comme je l'ai remarqué plus haut, ont cette propriété au plus haut degré. Au reſte l'acide fluorique s'en degage viſiblement, quand on le reduit en poudre, qu'on verſe deſſus de l'acide ſulphurique & qu'on expoſe le tout à un certain degré de chaleur. Mais on n'eſt pas ſûr, ſi la baſe eſt purement calcaire, ou ſi elle eſt melée de quelque autre terre primitive.

MIRAB. IALAPAE HYBRIDAE.

Auctore

I. T. KOELREUTER.

Conventui exhib. die 23 Nov. 1795.

Vt comparationem plantarum harum hybridarum cum ſpeciebus naturalibus eo facilius inſtituere poſſit B. L. quoad praecipua momenta brevem Jalapae vulgaris, longiflorae et dichotomae deſcriptionem praemittam.

Ialapa vulgaris.

Tubus floris 1″, — 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 5‴ — 1″, 6‴ latus. Color florum carmeſinus, cum leviſſima marginem verſus flavedinis tinctura. Odor debilis, non ingratus. Diſtributio ramorum ſatis perpendicularis, ſub angulis acutis. Folia ſaturate viridia, glabra ac nitida. Caules, inprimis genicula verſus, rubelli. Altitudo plantae media ′, ″. Radix ſuperius non ut in longiflora, tuberoſa, ſed a ſummo ad imum craſſitie ſenſim decreſcens, ac inferius in plures dentes excurrens. Varietas huius una flore penitus albo, altera penitus flavo; iſta circa genicula pallide viridis, haec autem e flavicante vireſcens, utraque absque ulla rubedinis tinctura, quibus notis iam a prima

ma iuventute a ſe invicem dignoſci poſſunt. Pondus plantae medium 4 ℔. 20 lot. circ. Radicis 1 ℔ 28 lot. circ.

Ialapa longiflora.

Tubus floris 5″. circ. longus; limbus 1″, 3‴ latus. Color floris totus lacteus; oſtium tubi vero violaceum. Odor eius, qualis Iasmini fragrans ac ſuaviſſimus. Planta haec expanſione ſuorum ramorum amplius, quam vulgaris, ſpatium occupat: rami enim ipſius longi, horizontaliter porrecti ac procumbentes ſunt. Folia ſordide viridia, ſubvilloſa, ac fere absque ullo ſplendore. Tota etiam planta, praeſertim calyx, humorem tenacem ac glutinoſum exſudat. Radix ſuperius tuberoſa, inferius dentibus ſ. caudis aliquot tenuioribus terminata. Pondus plantae medium 7 ℔. 10 lot. circ. Radicis 24 lot. circ.

Ialapa dichotoma.

Calyx huius ſpeciei minor ac patentior, quam in Ialap. vulg. Flores itidem minores, magis ſolitarii, vixque pedunculati. Tubus floris 1″, 4‴ longus, adeoque notabiliter longior, multoque magis incurvatus ac tenuior, quam in vulg. eiusque varietatibus, undique etiam ſatis pallide viridulus. Limbus floris 10 — 11‴ tantum latus. Totus itaque flos multo minor, odorisque iasminei multo fortioris ſuaviorisque, quam vulgaris. Color eius e violaceo-carmeſinus, circaque tubi oſtium flavidi tantillum ſibi admixtum habens. Quod ad habitum, ceterasque huius ſpeciei qualitates attinet, ab Jalapa vulgari praecipue differt ſtatura humiliore, dichotomia ramorum ſub angulis obtuſioribus, foliisque ✝ minoribus, iisdemque e flaveſcenti viridibus; pedunculis itidem

itidem brevioribus, tubo floris, praeprimis germen verſus, ſat pubeſcente, piſtilloque ſtaminum reſpectu, ut plurimum notabiliter longiore; maxima autem inter hanc et vulg. diverſitas in radicibus occurrit, ſuperius, ad modum longiflorae, tuberoſis, inferius caudis aliquot tenuibus brevibusque terminatis. Praeterea poſt initium floreſcentiae, ut in hybridis, multi ipſius florum integri ac infoecundati delabuntur, donec tandem temporis ſucceſſu ſemina bona proferant. Pondus plantae medium $1\frac{1}{2}$ ℔. Radicis 1 ℔. circ.

† *Obſ.* Quod folia huius ſub dio plantatae ſpeciei adhuc recentia praemature ſaepius decidant, nimia terrae humiditas, quam aegre fert, cauſatur: obſervavi enim, longe parcius id accidere, ipſamque ad foecundationem ſuorum germinum paratiorem eſſe, ſi in ollam plantata, in ſtatu ſicciore ſervetur.

* * *

EXPER. I.

Ialap. vulg. fl. rubr. ♀.
Ialap. longiflora. ♂.
An. 1768. et ſeq. menſ. Aug. Flor. plur.

Deſcriptio.

Prod. iam 1769. plantae inde plures. Color florum longe alius, quam parentum, inter utrumque medius, ſc. e pallide rubicundo-violaceus, qualis ſyringae vulg. ſeu quem Galli vulgo *Lilac* vocant. Odore grato Iasmini, licet minus gravi, longifloram ſuum patrem eſſe teſtabatur. Tubus

bus floris 2″, vel etiam 2′, 1″ longus; Limbus vero 1″, 4 5‴ latus. Oſtium tubi e violaceo purpureum. Latitudo omnium harum plantarum 1½, altitudo 3′, et maxima trunci craſſities, proxime ad radicem, inter genicula, 1½′ circ. erat. Caeterum plantae hae, excepto florum colore, iis, quae ex copula Ialap. vulg. fl. alb. ♀ et longiſt. ♂ (Exp. II.) prognatae ſunt, per omnia ſimiles erant. Dabant etiam per ſe parvum bonorum ſeminum numerum, licet, ut mihi videbatur, in parciori copia, quam iſtae. Pondus plantae medium 14 ℔, 2 lot. Radicis 5 ℔, 20 lot.

EXPER. II.

Ialap. vulg. fl. alb. ♀.

Ialap. longiflora. ♂.

An. 1769. d. 10 Aug. Flor. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 1770. et ſeq. menſe April. plantae plures. Flores albi cum leviſſima tinctura violacea; oſtium vero tubi e violaceo-purpureum. Tubus 2″ longus (*); Limbus 1″, 5‴ latus (**). Vna ex his plantis reliquas omnes longe lateque magnitudine ſuperabat. Expanſio ac directio caulium harum hybridarum, inter magis perpendiculares ♀, ac inter horizontales ♂, medium exacte tenebat; aſt caules ramique ipſarum craſſiores multo ac longiores, quam in Parentibus. Color et ſubſtantia foliorum inter eosdem media.

(*) Scil. a germine ad angulos plicarum corollae.

(**) Scil ab extremo laciniae margine usque ad angulum duarum ſibi oppoſitarum.

dia. Caules, rami, ſolia et flores tenuibus villis veſtita, aſt multo minus denſis, quam in longiflora; cum e contrario omnes hae partes in vulgari pene glabrae ſint totae. Parvum bonorum ſeminum numerum, licet non adeo exiguum, ſponte dabant; innumeri autem flores haud foecundati decidere, quibus emarcidis ſolum omne ſub ſinguiis plantis quaſi obſitum erat. Radices harum plantarum, in modum ♂, ſuperne rapae inſtar tumidae, pluribusque dentibus terminatae, tam magnitudine, quam pondere ſuo, ♀ et ♂ longe antecellebant.

Omnes praeterea ex vulg. ♀ et longiflora ♂ prognatae plantae etiam in hoc maiorem vim vegetativam exſerunt, quod ſub ſerum autumnum adhuc florere ſoleant, quando ſpecies ipſarum naturales eo tempore propter intemperiem frigidam, viribusque ob ſeminum copiam exhauſtae, ad id non amplius valent. Copulam ♀ cum ♂ prae rubra et flava potiſſimum amat. Pondus plantae medium 10 ℔, 16 lot. Radicis 3 ℔, 10 lot.

EXPER. III.

Ialap. vulg. fl. flav. ♀.

Ialap. longiflora. ♂.

An. 1769, et ſeq. menſ. Aug. Fl. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 1770. et ſeq. menſ. April, plantae plures. Color florum e pallide violaceo purpuraſcens (*Lilac*) cum vix ſenſibili flavedinis admixtione. Tubus floris 1″, 11‴ longus; Limbus vero 1″, 1‴ latus. Laciniae corollae, ad mo-

 dum

dum longiflorae, notabiliter profundius inciſae, ac antice magis crenatae, quam in ♀. Diſtributio ramorum, foliorumque color ac foecunditas, ut in Exp. II. Caules ac rami inferiores ex ipſorum trunco ramisque univerſalibus ſub angulo recto vel etiam plane obtuſo egrediebantur. Pondus plantae medium 9 ℔. 5 lot. Radicis 2 ℔. 11 lot.

EXPER. IV.

Ialap. vulg. fl. rubr. ♀.
Ialap. dichotoma. ♂.
An. 1770, et ſeq. menſ. Aug. Fl. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 1771 et ſeq. plantae plures. Omnes magnitudine non modo ♂, ſed etiam ♀ multum ſuperabant, imo huic, ratione fertilitatis parum vel nihil cedere mihi viſae ſunt, adeo ut eas vix pro genuinis hybridis agnoviſſem, niſi portentoſa ſtatura veram ipſarum naturam prodidiſſent. Cum prius florerent, quam ♀, multa quoque earum ſemina citius ad maturitatem pervenerunt. Tubus floris 1″, 1 – 3‴ longus; limbus 1″, 2‴ latus. Color florum, fere ut in ♂, e violaceo carmeſinus, attamen aliquantum intenſior, flavedinis autem tinctura, quam ♀ verſus marginem exhibet, hic fere prorſus evanuit. Odor ad ſenſum gravior, quam ♀, ſed debilior, quam ♂. Calyx minor, quam in ♀, aſt maior, quam in ♂. Tubus etiam corollae, dichotomae in modum, tenuior, magisque incurvatus, quam alias in ♀ eſſe ſolet. Caeterum totus habitus inter utramque medius. Pondus unius harum plantarum 7 ℔, 23 lot. radicis 2 ℔, 26 lot. ac alterius plantae 7 ℔. radicis 1 ℔, 14 lot.

EX-

EXPER. V.

Ialap. vulg. fl. alb ♀.
Ialap. dichotoma. ♂.
An. 1770 et ſeq. menſ. Aug. Fl. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 1771 et ſeq. plantae plures. Florebant menſ. Iul. omnes. Color florum paulo intenſior, magisque in violaceum inclinans, absque ullo flavedinis veſtigio. Folia ſaturatius paulo viridia, quam modo deſcripta Ceterum plantae iis Exp. IV. per omnia ſimiles. Pondus unius harum plantarum 7 ℔, 15 lot. radicis 3 ℔, 18 lot. ac alterius plantae 6 ℔ 19 lot. radicis 2 ℔, 27 lot.

EXPER. VI.

Ialap. vulg. fl. flav. ♀.
Ialap. dichotoma. ♂.
An. 1770. menſ. Aug Fl. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 1771. plantae plures. Florebant cum prioribus. Color florum ex pallide violaceo carmeſinus, cum notabili marginem verſus flavedinis tinctura; oſtium tubi quoque flaveſcens. Plantae de cetero iis Exp. IV. et V. per omnia ſimiles.

EXPER. VII.

Ialap. dichotoma. ♀.
Ialap. vulg. fl. rubr. ♂.
— it. fl. alb. —
— it. fl. flav. —
An. 1772. et ſeq. Flor. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 1773 et ſeq. plantae plures, a ſingulis iis Experimentorum inverſorum, IV. V. et VI. haud diſcrepantes. Plantis radicibusque plurimorum individuorum ſub ſerum autumnum trutina examinatis, pondus medium illarum 6 ℔. 1 lot. harum 5 ℔, 30 lot. inveni.

EXPER. VIII.

Ialap. dichotoma. ♀.

Ialap. longiflora. ♂.

An. 1771. menſ. Aug. Flor. plur.

Deſcriptio.

Prod. an. 1772. plantae quatuor, et quidem ocyus, quam naturales, vegetiusque creſcebant. Omnes habitus reſpectu cum plantis Exp. I. circiter conveniebant; excepto, quod paulo humiliores, foliis dilutius viridibus praeditae, multoque infoecundiores erant, quam hae ipſae: magnum enim florum numerum, quos pulvere antherarum ♀ vel ♂ de induſtria conſpergebam, ne unica quidem vera inſecuta inde eſt foecundatio. Interea autumnum verſus in nonnullis floribus ſponte ea ſe exhibuit, licet ultra unum alterumve ſemen bonum ex ſingulis individuis haud obtinuerim. Tubus floris ut plurimum 2″ longus, interdum quoque 1 – 3‴ longior.; Limbus 1″, 1 — 3‴ latus. Totus flos e pallide rubicundo violaceus, ſive *Lilac* obſcurior, qualis illorum Exp. I. Oſtium tubi floris concolor, quamvis pallidius parumper. Sic quoque calyce minore, tubo floris anguſtiore eodemque pallidiore, ac laciniis corollae paulo oblongioribus ſive acutioribus ab iisdem differt. Pondus plantae *a*)

4

$4\frac{1}{2}$ ℔. radicis 3 ℔. planta *b*) 8 ℔, 16 lot. radicis 3 ℔, 18 lot. plantae *c*) 8 ℔, 24 lot. radicis 3 ℔, 16 lot. et plantae *d*) 19 ℔. radicis 4 ℔. 5 lot. Vtraeque pondera absque dubio maiora daturae fuiſſent, ſi minus contiguas ſibi invicem ſub dio eas plantaſſem.

EXPER. IX.

Ialap. {vulg. fl. rubr. ♀ / dichotoma. ♂.} ♀.
Ialap. longiflora. ♂.
An. 1776. die 20 Aug. Flor. 41.

Deſcriptio.

Vnicum tantum ſemen bonum ex hac compoſita copula obtinueram ex quo anno inſequenti planta exſurrexit ſplendida ac magnifica valde. Habitu ſuo ad plantas Exp. I. quam proxime accedebat, ac bonorum ſeminum unum alterumve tantum dabat. Tubus floris 1″, 7 — 8‴ longus; Limbus 1″, 1 — 2‴ latus. Color florum iſto Exp. I. paulo dilutior. Stamina ſat longa, aſt piſtillum multo longius.

Copulationes Ialaparum fruſtra huc usque tentatae.

EXPER. X.

Ialap. longiflora. ♀.
Ialap. vulg. fl rubr. ♂.
— it. fl. alb. —
— it. fl. flav. —
An. 1760 et ſeq. usque ad ann. 1774. Flores longe plurimi.

Con-

Conceptio nulla.

Plus quam ducenties fruſtra tentato experimento, eius tandem pertaeſus abſtinui. Experimenta iſta ficititia, a Dn. I. Ch. E. in den Beſchäft. der Berlin. Geſ. der naturf. Fr. 1. B. Berlin. 1775. gr. 8. S. 390. propalata, nunc haud curo, quid ſentiam de eis, alia occaſione ingenue expoſiturus.

EXPER. XI.

Ialap. longiflora. ♀.
Ialap. dichotoma. ♂.
An. 1771 et ſeq. d. 31, Aug. Flor. 4.
it. —— 5.

Conceptio nulla.

EXPER. XII.

Ialap. longiflora. ♀.
Ialap. {vulg. fl. rubr. ♀. / longiflora. ♂.} ♂.
An. 1769. d. 7. Aug Flos 1.

Conceptio nulla.

Not. Deſcriptionem aliarum huius generis hybridarum, quas ex primo gradu deſcendente et aſcendente, usque ad plenariam fere Ialapae vulg. in longifloram transmutationem (*), variisque aliis modificationibus, ut et ex feminibus

(*) Plenariae Nicot. ruſtica in paniculatam, et paniculatae in ruſticam transmutatio, quam citra omnem neceſſitatem in vigeſimum usque gradum aſcendentem conſulto preſſi, ut et Dianthi ſuperbi in

nibus ſponte natis exortarum maxime ſingularium, tam pygmaeorum, quam gigantum etc. quas praeter modo datas obtinere mihi licuit, in aliud tempus r ſervabo.

---

in chinenſem, chinenſis in hortenſem, hortenſis in chinenſem, barbati in chinenſem, plumarii Sibir. in chinenſem etc. nec non reſtitutio quarundam hybridarum in priſtinum ſtatum ſub requiſitis gradibus deſcendentibus, a me iam dudum perfecta eſt. Dogma itaque Ariſtotelicum, quo ſpecies in ſpeciem transmutari non poſſe perhibetur, doctrinaque omnis hodiernorum Phyſiologorum de praeformatis germinibus, re ipſa ſatis ſuperque refutatur. Transmutationem animalium diverſae ſpeciei aeque facilem et pronam eſſe, ex certiſſimis obſervationibus mihi perſuaſum eſt, eamque pariter praeſtitiſſem, niſi commoda occaſio, locus et ſumptus ad illam ulterius proſequendam mihi huc usque defuiſſent.

SENECIONIS
SPECIES NOVA DESCRIPTA.

Ab

IOANN. LEPECHIN.

Conventui exhib. die 16 Mart. 1797.

Vaſtiſſimum Siberiae regnum quamvis ſagaciſſimis ac indefeſſis viris multoties peragratum atque perluſtratum, haud intermittit novas nobis ſuppeditare plantas, ad quas et nunc deſcibenda ſpecies pertinet. Ante duos annos obtinui ab amicis varias ſeminum collectiones per Sibiriam factas, inter quae et haec, ſub nomine indeterminatae plantae compoſitiflorae ſingularis, miſſa reperiebantur, e quibus enatae plantae praeterita aeſtate laete florebant, ſemina que matura protulerunt.

Floris natura, calycis que apices ſphacelo affecti primo intuitu plantam noſtram ad genus Senecionis pertinere facile perſuadent, et quidem flores radiati, radio patente, folia que indiviſa ſpeciem hanc ad quartam Linnaei ſubdiviſionem relegant. Dum vero locus, ubi ſponte provenit, non

non eſt deſignatus, hinc ſpeciem hanc ſub nomine *Senecionis ſibirici* proponere liceat.

Deſcriptio.

Radix perennis, fibroſa, fibris deſcendentibus, teretibus, extus brunneo, aut flavicante cortice obducta, intus parenchymate albo, ex capitulo ſuo emittens duos, non raro tres caules.

Caulis teres, erectus, glaber, bicubitalis, non raro et altius excreſcens, tenuiter ſtriatus, inferne ad exortum e radice roſeo colore tinctus, ſuperius per omnem longitudinem laete viridis, ſimplex, nec in ramos diviſus.

Folia modo caulina, longa, per paria diſpoſita, inferiora cordato-lanceolata, ſuperiora ſimpliciter lanceolata, coſta atque nervulis prominulis, ſubrogoſa, ſuperius ſaturate viridia, inferius albido tomento obſita, glabra, margine acute ſerrato, in quibusdam lacerato, aut profunde inciſo.

Petioli foliorum triquetri, ſulco profundo notati, inferiores duplo foliis longiores, ſed quo magis verſus caulis ſummitatem appropinquant, eo breviores evadunt ita, ut folia ſuperiora fere ſeſſilia videantur, baſibus ſuis, quaſi vagina, caulem amplexantia.

Flores ſummum caulem occupant et per paniculam diſponuntur. *Pedunculi* ſat longi, inferiores breviores, ex

ex adverſo, ut plurimum, per paria prodeuntes, medio impari. *Calyx* conum truncatum refert, aut fere cylindricus eſt, multifidus. *Flores* lutei, radiati in diametro fere unciam explent, inodori, et foemellarum quidem, ſive radii, antequam prorſus expanduntur, centrum floris verſus flectuntur, poſtea, cum flos aliquantum explicatus eſt, patentes manenent. Radii floſculorum octo numerantur, ex oblongovati, tantiſper cuſpidati.

MÉMOIRE
ſur la manière la plus facile & la plus prompte de preparer l'acide nitrique le plus pur & plus fort.

Par
JAC. SACAROW.

Préſenté à l'Académie le 1 Mai 1797.

Il arrive, qu'on a beſoin pour les Eſſais chymiques de l'acide nitrique le plus pûr & le plus fort. La manière ordinaire de le preparer eſt de prendre deux parties de nitre depuré & une d'acide vitriolique fort ou d'huile de vitriol; on les mele enſemble dans une Retorte & on les diſtille, jusqu'a ce qu'on ne voye plus rien s'en dégager. Mais comme tout nitre, même celui qu'on a depuré, contient une certaine quantité de ſel muriatique, c'eſt pourquoi il arrive toujours que l'acide nitrique eſt combiné avec l'acide muriatique, & ſi on a manqué la proportion neceſſaire entre le nitre & l'acide vitriolique, de ſorte qu'on ait pris de l'acide vitriolique plus qu'il n'en faut pour la décompoſition du nitre, alors le ſuperflu de l'acide vitriolique paſſe dans le récipient à la fin de l'operation. Il peut auſſi arriver, qu'il ſe mêle avec le dernier quand on prend pour la décompoſition du nitre de l'acide vitriolique noir, qui contient une certaine quantité d'acide ſulphureux volatil, & qui paſſe dans le récipient

 avec

avec l'acide muriatique où même avant. On ôte à l'acide nitreux la couleur rouge & la propriété de produire des vapeurs, en le diſtillant dans une Retorte, jusqu'a ce qu'il y reſte ſans aucune couleur. Pour le dépurer de l'acide muriatique, on y verſe de la ſolution d'argent dans l'acide nitrique, jusqu'à ce qu'il ne ſe précipite plus rien au fond du vaiſſeau, parceque l'argent ayant plus d'affinité avec l'acide muriatique, ſe dégage de l'acide nitrique, ſe combine avec l'acide muriatique & ſe précipite au fond du vaiſſeau, après quoi on le dégage de ce qui a été précipité & on le diſtille de nouveau pour le dépurer de la petite portion d'argent qui y eſt reſtée diſſoute; mais cet acide nitrique dépuré de l'acide muriatique peut encore contenir de l'acide vitriolique, parceque, quoique l'argent s'uniſſant avec l'acide vitriolique ſe précipite avec lui & en dégage l'acide vitriolique, cependant il n'a point tant d'affinité avec lui, qu'il puiſſe en dégager parfaitement tout l'acide vitriolique comme le fait la terre pondereuſe, c'eſt pourquoi on y verſe de la ſolution de terre pondereuſe dans l'acide nitrique, qui ſe combinant avec l'acide vitriolique tombe au fond du vaiſſeau. Puis on l'ote du ſediment, on le diſtille encore une fois, jusqu'a ſec, & on obtient de la ſorte l'acide nitrique parfaitement pur; où comme quelques uns conſeillent, on verſe dans une Retorte l'acide précipité par l'argent, où par la terre pondereuſe, & on le deſtille jusqu'à ce qu'il ne reſte plus que la huitième partie de l'acide.

Mais pour eviter une des diſtillations, il vaut mieux agir ainſi: Il faut auparavant eſſayer par une ſolution de terre pondereuſe dans l'acide nitrique, ſi l'acide contieut

tient de l'acide vitriolique, & quand il le contient effectivement, il faut y ajouter de cette ſolution, jusqu'à ce qu'il ne ſe précipite rien. Après quoi on ôte cet acide nitrique dépuré de l'acide vitriolique & on le dégage de l'acide muriatique par une ſolution d'argent dans l'acide nitrique, après quoi on l'ôte du ſediment & on le diſtille jusqu'a ſec.

Mais cette méthode a trop de difficultés, & en outre, on rencontre pandant la diſtillation & la dépuration de l'acide nitrique le plus fort d'autres inconveniens, par exemple, quand on le diſtille de la manière ordinaire, on ne peut produire de l'acide le plus fort; & dans la précipitation l'argent & la terre pondereuſe ne peuvent pas ſi bien agir ſur les acides qui y ſont melés, c'eſt pourquoi il devient auſſi toujours plus foible & ſa quantité ſe diminue a cauſe des diſtillations trop reiterées & particulierement quand on le diſtille, ſuivant l'avis de quelques uns, après la précipitation ſeulement jusqu'aux $\frac{7}{8}$ parties, parceque la $\frac{1}{8}$ partie de l'acide qui reſte dans la retorte eſt la plus forte. On peut eviter tous ces inconveniens & toutes ces diſtillations répétées.

1.) Quand on en prend un peu plus (environs $\frac{1}{8}$ partie) de nitre a l'égard de l'acide vitriolique, c'eſt a dire un peu moins d'acide vitriolique, qu'il n'en faut pour décompoſer une certaine quantité de nitre.

2.) Quand on voit pendant la diſtillation des vapeurs rouges noiratres a la place de vapeurs rouges pâles, alors après avoir ôté le récepient & y en avoir ſubſtitué

un

un autre pur, on obtient l'acide nitrique d'une couleur rouge nette, très fort & qui ne contient ni acide muriatique ni acide vitriolique.

Perſonne n'ignore que l'acide muriatique eſt plus volatil que l'acide nitrique & que celui-ci décompoſe le ſel muriatique & en dégage l'acide. Ainſi l'acide volatil ſulphureux & l'acide muriatique dégagés de l'alcali par l'action de l'acide ſulphureux & nitrique, a cauſe de leurs plus grande volatilité, paſſeront auparavant dans le récipient & laiſſeront la plus grande partie de l'acide nitrique, qui reſte dans le récipient parfaitement pur, c'eſt pourquoi il faut changer le récipient.

Quelques uns penſent, que quand on a plus de nitre dans le mélange, que l'acide vitriolique n'en peut décompoſer, le nitre s'enflamme, & peut rompre la retorte; mais cela eſt incroyable parcequ'il ne peut pas s'inſinuer de carbone dans la Retorte. Il peut arriver plutôt, que ſi on augmente la chaleur, a la fin de la diſtillation (ce qui n'eſt pas neceſſaire) jusqu'à ce que la coupelle commènce a blanchir, le nitre ſe décompoſe, ce qui feroit d'autant mieux pour l'acide nitrique, que le gas oxygène ſortant pourroit s'unir a lui, & le rendre plus parfait. Mais on voit qu'il ne peut paſſer d'acide vitriolique dans le récipient, attendu qu'il n'en reſte point de ſuperflu: il ſe combine avec l'alcali du nitre, en un ſel neutre vitriolique (Tartre vitriole) qui ne ſe décompoſe pas dans le feu le plus fort.

Peut être dira-t-on, qu'il ſe perd une partie de l'acide nitreux pendant qu'on change le récipient; mais on

ne

ne peut nullement comparer cette perte a celle qui réſulte dans les diſtillations repetées de l'uſage de charbon qu'il faut y employer, ſans faire mention de la perte du tems. En outre il me ſemble, que quand on fait ce changement avec precaution & promptement, la perte ne peut être de la moindre conſequence. C'eſt pourquoi il faut abſolument pendant la diſtillation avoir un autre récipient, qui ſoit netoyé avec de l'eau diſtillée & qui ſoit ſec, & auſſitôt qu'on ôte le premier [& qu'on le donne a ſon laborateur pour le boucher & le mettre dans de l'eau froide melée de glace] il faut y en attacher ſans aucun delai un autre.

Il faut obſerver encore 1.) qu'il faut mieux prendre pour cette diſtillation des récepients bien grands, parceque les vapeurs de l'acide nitrique s'y congelent beaucoup mieux. 2.) Qu'on l'entoure de glace pendant la diſtillation, où qu'on le mette dans de l'eau melée de glace & qu'on le couvre avec du linge trempé dans de l'eau froide où mieux encore on couvre le récipient de neige.

Il faut auſſi obſerver, que le col de la Retorte ne ſoit trop epais, que les cols de deux récipients ſoyent coupés nettement & egalement, & qu'on les puiſſe attacher ſolidement au col de la Retorte. Il faut encore que la jointure du ſecond récipient tombe au même endroit, où elle etoit au premier, où même plus bas, afin que le lut n'en penetre pas l'interieur. On fait le lut de bol bien melé avec de l'huile de lin cuite, jusqu'a la conſiſtence de la pâte, & après avoir appliqué ce lut, on le recouvre avec des bandes de linge, qu'on a graiſſées de cette même huile a la quelle on ajoint un peu de Bol.

L'a-

L'acide nitreux qu'on obtient de la ſorte dans le ſecond récipient à une couleur rouge & obſcure; il produit des vapeurs rouges & ſe nomme acide nitreux ou acide de nitre imparfait, parcequ'il n'eſt pas encore parfaitement combiné avec l'Oxygène; ainſi, pour le dépurer de ſes vapeurs rouges & de ſa couleur & pour le rendre parfait, il faut le verſer comme a l'ordinaire dans une Retorte pure & diſtiller dans une chaleur moderée les vapeurs rouges, jusqu'a ce qu'il devienne clair comme de l'eau dans la Retorte.

Cette dépuration de l'acide de ſes vapeurs rouges a été découverte par Mr. Scheele en 1777 qui a nommé cet acide clair, acide nitreux pur, ou acide de nitre déphlogiſtiqué, & ſes vapeurs rouges, acide de nitre phlogiſtiqué.

On voit par cet exposé qu'on peut ici obtenir par deux diſtillations l'acide nitreux le plus fort, le plus pur & ſans aucune couleur ou parfait.

Ce qui regarde l'acide nitreux que l'on obtient dans le premier récipient, qui n'eſt pas ſi fort & mélé de l'acide muriatique & vitriolique de couleur rouge claire & fumant, on peut l'employer pour d'autres experiences moins exactes & qui n'exigent par de l'acide ſi fort, en le dépurant auparavant de la maniere mentionée.

Comme l'acide vitriolique eſt de differente force & par conſéquent de differente peſanteur ſpécifique, il reſte a fixer par des expériences, combien il faut prendre d'acide vitriolique & de quelle force pour dégager d'une certaine quantité de nitre l'acide ſans aucun reſte, afin qu'on ne pren-

prenne pas une quantité trop grande de nitre par rapport a la plus grande quantité preſcrite.

Il ne ſera pas neceſſaire d'examiner a qui appartient l'honneur de la premiere découverte de cet acide de nitre fort & fumant, ſi c'eſt a Glauber, a Boyle où a Hoffmann, je remarquerai ſeulement qu'après cette découverte les Chimiſtes, n'ont obſervé aucune proportion entre l'acide vitriolique & le nitre quoiqu'ils connuſſent les differentes degrés de force de cet acide; car quelques uns ont pris trois fois plus d'acide ou d'huile de vitriol que de nitre; d'autres deux parties de nitre & une d'acide, & les modernes ſans faire connoitre la gravité ſpécifique de l'acide ſulphureux, preſcrivent qu'il ſuffit de prendre $\frac{1}{3}$ partie d'acide vitriolique pour dégager tout l'acide nitrique. Mais comme il y a du ſupperflu dans toutes ces proportions, ou dans le nitre ou dans l'acide, Mr. Richter tache de fixer par des Experiences & par des calculs, combien il faut d'acide d'une péſanteur ſpécifique connue pour décompoſer une certaine quantité de nitre, ſur quoi il fit le tableau ſuivant: Voyez *Richter über die neuern Gegenſtände der Chemie. Fünſtes Stück, pag. 2.*

1000 parties d'acide vitriolique, dont la péſanteur ſpécifique = 1, 05 peut décompoſer 183, 4 parties de nitre déſeché dans une chaleur moderée.

1000	part.	acid.	vitr.	1,10	peſant.	ſpec.	349, 5	parties.
1000	-	-	-	1,15	-	-	501, 3	—
1000	-	-	-	1,20	-	-	642, 2	—
1000	-	-	-	1,25	-	-	774, 6	—
1000	-	-	-	1,30	-	-	901, 8	—
1000	-	-	-	1,35	-	-	1018, 0	—
1000	-	-	-	1,40	-	-	1118, 0	—
1000	-	-	-	1,45	-	-	1214, 5	—
1000	-	-	-	1,50	-	-	1368, 9	—
1000	-	-	-	1,55	-	-	1513, 0	—
1000	-	-	-	1,60	-	-	1648, 2	—
1000	-	-	-	1,65	-	-	1764, 6	—
1000	-	-	-	1,70	-	-	1894, 2	—
1000	-	-	-	1,75	-	-	2008, 9	—
1000	-	-	-	1,80	-	-	2115, 6	—
1000	-	-	-	1,85	-	-	2219, 5	—
1000	-	-	-	1,90	-	-	2303, 9	—
1000	-	-	-	1,95	-	-	2390, 0	—
1000	-	-	-	2,00	-	-	2470, 0	—
1000	-	-	-	2,05	-	-	2547, 0	—
1000	-	-	-	2,10	-	-	2618, 5	—

Mais comme j'ai dit plus haut, que pour toute precaution il faut prendre plus de nitre, que d'acide vitriolique n'en peut décompoſer, je ſuppoſe que $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{12}$ partie de nitre ſuperflu eſt ſuffiſante pour qu'a la fin de la diſtillation (quand

(quand on n'a pas bien obſervé la proportion) il ne paſſe point, d'acide vitriolique dans le récipient.

Il ne me reſte a préſent qu'a fixer, combien on peut obtenir d'acide nitrique, dans les deux rétepiens & de quelle gravité ſpécifique, quand on les melera enſemble, quand on y employe de l'acide de péſanteur fixée, & qu'on ajoute encore $\frac{1}{8}$ partie outre la quantité du nitre qu'on obtient. Quelques uns n'obtenoient que la moitié du poid du nitre, qu'on avoit pris; d'autres $\frac{5}{8}$ &c. Ce qui provenoit on de la differente proportion de l'acide vitriolique & du nitre, ou parcequ'ils n'avoient pas marqué la péſanteur ſpécifique de l'acide & du nitre, comme on le verra par le calcul ci-deſſous.

Pour le fixer, ſuppoſons, que nous avons pris 1000 parties d'acide ſulphureux dont la péſanteur ſpécifique = 1600, & que nous y avons employé la quantité marquée dans le tableau en y ajoutant encore la $\frac{1}{8}$ partie de la quantité du nitre employé, ce qui fera 1648 + 206 = 1854 parties de nitre. Mais comme le nitre desſeché dans une chaleur moderée comme il doit être employé pour produire l'acide nitreux, contient dans 1000 parties 20 parties d'eau, par conſéquent dans 1854 parties de nitre, on trouve 37 parties d'eau.

De même l'acide vitriolique, dont la péſanteur ſpécifique eſt 1600 contient (quand la péſanteur ſpécifique de l'acide vitriolique exempt d'eau, ſera = 2740) dans 1000 parties 431 parties, qui jointes aux 37 parties d'eau contenu dans le nitre, il y aura 468 parties d'eau

 dans

dans l'acide & dans le nitre. Mais comme la péſanteur ſpécifique de l'acide de nitre exempt d'eau = 1,900 on trouvera par le calcul ſon poids et ſa péſanteur ſpécifique, ſi on ajoute 468 parties d'eau a cet acide.

Mais comme on ſait, qu'il ſe perd pendant la diſtillation quelque quanté d'acide de nitre en forme de vapeur, c'eſt pourquoi on n'obtient jamais exactement ni la quantité d'acide calculée, ni la peſanteur ſpecifique marquée.

Pour faire voir comment on trouve la quantité d'eau qui contient un acide d'une péſanteur ſpécifique quelconque, on agit comme il ſuit.

Suppoſons que 1000 parties d'acide vitriolique dont la péſanteur ſpecifique eſt a celle de l'eau - - - - - 1600 : 1000 = P.

Sa péſanteur ſpécifique c'eſt a dire - 1600 — — = c.

La péſanteur ſpécifique de l'acide exempt d'eau, c'eſt à dire — 2,740 - - = a.

La péſanteur ſpécifique de l'eau = 1000 - - = b.

Le poid de l'eau cherché - - - - - = x.

Ainſi $\left(\frac{P}{a} + \frac{x}{b}\right) c = P + x$; $(b P + a x) c = a b P + a b x$

$$x = \frac{b (a - c) P}{a (c - b)} = \frac{1000 (2740 - 1600) P}{2740 (1600 - 1000)} = \frac{95}{137}.$$

Ainſi quand on ajoute a l'acide exempt d'eau $\frac{95}{137}$ parties d'eau, on obtient un acide, dont la péſanteur ſpécifique = 1600.

A

A préſent ſi l'on a 1000 onces de cet acide & qu'on veuille ſavoir, combien il y a d'acide pur & d'eau on fait cette proportion:

$$1 + \frac{95}{137} : 1 = 1000 : x = 590\,\frac{15}{129},$$

eſt le nombre d'onces d'acide pur.

Si on ôte maintenant $590\,\frac{15}{129}$ de 1000, il reſte la quantité d'eau cherchée c'eſt à dire $= 409\,\frac{14}{29}$.

Pour trouver combien on obtient d'acide de nitre & de quelle péſanteur ſpécifique on agit comme il ſuit.

Suppoſons que le nombre des parties d'acide nitrique exempt d'eau $= 597\frac{1}{4}$ - - - - $= P.$

Péſanteur ſpécifique de cet acide $= 1,900$ - - $= a.$

Péſanteur ſpécifique de l'eau $= 1000$ - - - $= b.$

La quantité d'eau ajouté $= 446\frac{1}{2}$ - - - $= x.$

On voit par la première formule que $x = \frac{b(a-c)P}{a(b-c)}$. Mais puisqu'il faut trouver c.

$$c = \frac{(P + x)}{\left(\frac{P}{a} + \frac{x}{b}\right)} = \frac{(P + x)\,a\,b}{b\,P + a\,x},$$

$$c = \frac{(597\frac{1}{4} + 446\frac{1}{2})\,1900 \,.\, 1000}{1000 \,.\, 597 + 1900 \,.\, 446\frac{1}{2}} = 1462\,\frac{12378}{13556}.$$

Ainſi la péſanteur ſpécifique de l'acide de nitre qu'on obtient ſera preſque 1463.

NB.

NB. On a pris $597\frac{1}{2}$ parties, parceque le nitre renferme $\frac{30}{100}$ parties d'acide de nitre, $\frac{63}{100}$ d'alcali végétal & $\frac{7}{100}$ parties de l'eau.

Et comme nous avons pris pour l'Experience du nitre, où il n'y avoit que $\frac{2}{100}$ d'eau; par conſéquent 100 parties en contiennent $31\frac{1}{2}$ d'acide de nitre, $66\frac{1}{3}$ d'alcali & $2\frac{1}{6}$ d'eau, donc pour ſavoir combien il y a d'acide dans 1854 parties de nitre il faut faire cette proportion.

$31\frac{1}{2} + 66\frac{1}{3} : 31\frac{1}{2} = 1854 - 37 : x,$

$x =$ presque $597\frac{1}{4}$.

On a pris 446 parties d'eau, parceque l'acide vitriolique, dont la péſanteur ſpécifique $= 1600$, contient en 1000 parties, comme on a trouvé auparavant $409\frac{14}{29}$ parties d'eau. Si on ajoute a ces $409\frac{14}{29}$ (dans les 1854 parties, qu'on a pris pour obtenir l'acide de nitre) la quantité d'eau, c'eſt a dire 37 parties, il y aura $409\frac{14}{29} + 37 = 446\frac{14}{29}$, ce qu'on peut prendre pour $446\frac{1}{2}$.

Pour trouver combien on a obtenu à l'égard du poids, il faut ajouter les parties de l'acide de nitre exempt d'eau ($594\frac{1}{4}$) aux parties de l'eau de l'acide vitriolique & du nitre ($409\frac{1}{2} + 37 = 446\frac{1}{2}$), il y aura $597\frac{1}{2} + 446\frac{1}{2} = 1043\frac{3}{4}$, ce qui fera un peu plus de la moitié de la quantité du nitre qu'on a pris.

NO-

NOTICE
SUR UNE
NOUVELLE ESPECE DE GRANIT,
TROUVÉE À LA MER BLANCHE.

Par
M. *le Conſeiller Privé ANDRÉ de NARTOF.*

Préſenté à l'Académie le 4 Mai 1797.

J'ai eu l'honneur de promettre à ma réception honorable au nombre des Membres de l'Illuſtre Académie Impériale des Sciences, de Lui fournir de tems en tems quelques notices ſur toutes les eſpéces de pierres & de mines, que je puis obtenir, & qui me ſemblent être moins connues & plus remarquables. J'ai cru pouvoir accomplir cette promeſſe en Lui envoyant les deux échantillons de Granit qui ſuivent, avec la déſcription la plus préciſe que j'en ai pu faire. — Ce Granit vient des environs de Kamaliſtſcha ſur la mer blanche: ſouvent il y eſt recouvert de Polypes & de Balanes, & ſe trouve pour la plûpart en forme roulée; ou c'eſt plûtot à huit cent verſtes des frontières réunies Ruſſes, Suédoiſes, & Danoiſes, que s'éléve une isle éſcarpée, que les pecheurs du pays nomment *Raab*, & qui eſt ſituée presque Tab. IX.

au

au 63me degré, où cette eſpèce de Granit ſe trouve dans ſon lieu natal, & eſt portée de là ſur les côtes Ruſſes de la mer glaciale blanche, avec les maſſes de glace qui s'y jettent. Ses parties conſtituantes ſont 1.) du Quartz gras blanc, ou un peu griſatre & quelque fois brun, qui ſemble conſtituer ſa maſſe principale. 2.) du Mica noir aſſez gros très luiſant, en paillettes ou en écailles, qui recouvre ou paſſe par la maſſe du Quartz en forme de couches diſtinguées très minces, ſans pourtant rendre la maſſe ſchiſteuſe. 3.) du Feldſpat blanchâtre, mais en très petite quantité, & quelque fois presque inviſible & mélé avec le Quartz. 4.) Des Grénats rouges polyèdres, qui gîſſent par ci par là entre les feuillets du Mica, & 5.) des cryſtaux bleuâtres ou un peu verdâtres, qui ont quelque reſſemblance avec l'éſpece de pierre, qui à été nouvellement nommée *Cyanite*, mais qui en différent encore par leurs caracteres extérieurs, vû qu'elles ſont plus verds, plus ou moins transparents, en cryſtaux applatis en formes de tables très minces quadrangulaires, pointûs quelques fois aux deux bouts par deux faces, & dont la texture ſemble être plustôt en feuillets rhomboidals. Et ce qui eſt remarquable, ces cryſtaux ne ſe trouvent qu'à la ſurface du Mica & du Granit entier, comme s'ils étoient de beaucoup plus nouvelle formation que le reſte de la maſſe du Granit: & éffectivement il ſemble, que ces cryſtaux ont dû leur formation à la ſolution réiterée des particules du Granit par l'action réciproque des eaux de la mer & des feux ſouterrains; ce qui eſt d'autant plus vraiſemblable, par ce que ce Granit ne ſe trouve, que ſur les côtes & ſur les isles de la mer, étant ſouvent couvert de ces polypes, que j'ai nommées plus haut. On ſait au reſte, combien doivent avoir ſubi de révolutions ſouterraines toutes

toutes ces contrées depuis Olonez jusqu'à Archangel & juſques dans la Mer Blanche, par la face déchirée & culbutée, que préſentent les montagnes & leurs ſommets que l'on y trouve. Il faut y ajouter, qu'on trouve au même endroit de la mer des laves poreuſes, legères & de couleur obſcure, arrachées du lieu natal & recouvertes par les plantes marines, qu'on y trouve en abondance.

Voici donc une éſpece de granit de cinq parties conſtituantes, dont celles qui ſont le plus près de la ſurface de la pierre, ſemblent être les plus récentes.

MÉMOIRE
SUR
L'EXPLOITATION DES MINES
DE L'EMPIRE DE RUSSIE.

Par

B. F. J. HERMANN.

Préſenté à l'Académie le 18 Mai, 1797.

On exploite en Sibérie les mines depuis un tems immémorial; ce que firent ceux d'une nation, dont le vrai nom nous n'eſt point parvenu; on les nomme à preſent *Tſchoudes.* Les veſtiges de leurs travaux ſont encore notables & ont ſervi en partie à la découverte des mines nouvelles. D'ailleurs nous trouvons dans l'hiſtoire, que déjà ſous le regne du Grand-Duc Ivan Vaſſilievitſch, & ſous celui du Tzar de ce même nom, on a fait quelques recherches des mines, & ſous le Tzar Alexis Michaïlovitſch on exploita en différens endroits des mines de fer & de cuivre; mais tous ces établiſſemens ont été quittés dans la ſuite, de ſorte que vers la fin du ſiécle paſſé il n'y eut que quelques forges de fer près de Moſcou & à Toula.

Ce

Ce fut vers ce tems qu'à l'ordre de Pierre I un allemand, nommé *Blüher*, examina les monts de Sibérie, & on commençoit à exploiter déréchef les mines dans les monts Ourals, où ce Monarque fit établir par feu Mr. *Demidov* la fonderie de *Neviänskoï*. Il envoya peu après le General *Henin* en Allemagne, pour y récueillir les notices les plus exactes, les plans & les modéles des machines requiſes aux ouvrages minéralogiques, & d'y engager des hommes experimentés. Depuis ce tems on voit avec étonnement les grands progrés de l'exploitation des mines dans l'Empire de Ruſſie.

Les mines les plus riches ſont à preſent dans les monts d'*Oural*, d'*Altaï* & de *Nertſchinsk*; celles qui ſe trouvent dans les montagnes d'*Olonetz* & en quelques autres Gouvernemens de l'Empire ſont de moindre valeur.

Celles d'Oural abondent le plus en *fer* & en *cuivre*, & contiennent auſſi de l'*Or*; celles d'Altaï ſont les plus riches en *Or* & en *Argent*, & contiennent auſſi du *plomb*, du *cuivre* & du *fer*; celles de Nertſchinsk contiennent *de l'Or*, *de l'Argent* & du *Plomb*.

Mines d'Or.

1.) En 1737 on en découvrit les premières dans les montagnes *d'Olonetz*; & on y exploita la mine de Woïtzk, (Woïtzkoï - Roudnik) mais qui ne fourniſſant annuellement que quelques livres d'Or fut abandonnée enſuite, quoiqu'on en tira de beaux échantillons d'Or natif. Pendant plus de 36 ans des travaux on n'a obtenu que 4 pouds 21 liv. 23 ſol. d'Or.

 2.)

2.) Celles de *Bérofof* près de *Cathérinebourg* dans les monts d'Oural ſont plus importantes; en 1754 on commença à les exploiter. Le minérai, dont on tire par année environ 400000 pouds, conſiſte dans une pyrite ferrugineuſe en criſtaux cubiques dans le Quartz, pour la plupart en éfflorence ou en Ocre; étant broyé & lavé il détache les parcelles d'Or, lesquelles, epurées enſuite par le plomb, ſont fondues en lingots & transportées à St. Pétersbourg; mais cette ſorte d'or n'eſt pas encore pur; il contient environ 7 à 8 pour cent d'argent & du fer. Le Solotnik n'eſt eſtimé que de 2 R. 60 Cop. à la Cour de monnoie, où l'on le purifie enſuite.

Voici le tableau de l'exploitation des mines d'or de *Bérofof* de chaque année:

Ex-

Exploitation des mines de Béroſof depuis leur commencement.

Année.	Du minérai.	De l'Or.			Année.	Du minérai.	De l'Or.		
	Pouds.	Pds.	liv.	ſolot.		Pouds.	Pds.	liv.	ſolot.
1754.	$61069\frac{1}{4}$	-	10	$59\frac{9}{16}$	1774.	269834	3	5	$5\frac{5}{8}$
1755.	30428	-	9	$46\frac{9}{16}$	1775.	$326926\frac{3}{4}$	4	2	$28\frac{1}{2}$
1756.	- - -	-	2	$-\frac{70}{96}$	1776.	$284528\frac{1}{2}$	5	13	$10\frac{1}{2}$
1757.	$86436\frac{1}{2}$	-	29	$5\frac{24}{96}$	1777.	$331393\frac{1}{2}$	5	22	91
1758.	55365	1	1	$88\frac{48}{96}$	1778.	$420625\frac{3}{4}$	5	38	19
1759.	105839	1	-	$46\frac{22}{45}$	1779.	494799	6	4	43
1760.	229215	1	22	$44\frac{22}{96}$	1780.	407720	6	16	42
1761.	195859	1	22	$64\frac{11}{16}$	1781.	302624	4	4	80
1762.	296484	1	17	$68\frac{70}{46}$	1782.	287439	3	37	$20\frac{1}{2}$
1763.	162328	2	1	$50\frac{36}{46}$	1783.	279897	3	18	$39\frac{1}{2}$
1764.	200534	3	17	$64\frac{24}{86}$	1784.	391033	4	11	$32\frac{1}{2}$
1765.	213626	3	8	$81\frac{72}{96}$	1785.	348164	3	32	54
1766.	$183003\frac{1}{2}$	5	9	$65\frac{24}{96}$	1786.	328811	7	27	$54\frac{7}{8}$
1767.	202351	4	25	$28\frac{84}{96}$	1787.	361388	8	4	$65\frac{1}{4}$
1768.	198880	4	34	$78\frac{30}{96}$	1788.	401050	7	32	4
1769.	217603	4	10	$56\frac{13}{96}$	1789.	$483915\frac{1}{4}$	8	6	80
1770.	283939	4	38	$65\frac{70}{96}$	1790.	484774	7	33	93
1771.	291026	3	27	$22\frac{2}{96}$	1791.	498728	7	36	12
1772.	284634	2	27	92	1792.	428621	9	- -	6
1773.	$262931\frac{1}{2}$	2	33	$10\frac{1}{2}$	1793.	442255	7	22	33
					1794.	449089	8	10	3
					Total - -	$11575167\frac{1}{2}$	178	18	$41\frac{1}{10}$

Il y a trois endroits, où l'on lave ces minérais, ſavoir: à *Beroſovsk*, à *Pyſchminsk* & à *Ouktousk*, qui ont environ

viron 900 planches de lavage. Le nombre d'ouvriers appartenans à ces mines monte au de là de 2000 mâles, dont environ 1200 ſont employés journellement aux différens ouvrages. Il n'y a d'ailleurs plus de payſans aſſignés, qui auparavant étoient deſtinés à ces travaux, dont le nombre monte à 14,000 hommes.

La valeur intrinſeque p. ex. de 8 pouds de cet or eſt à peu près de 90000 R. & les frais montent à 50000 R. mais il y a des années, où le gain en eſt beaucoup moindre.

Mines d'Argent.

1.) Les plus conſidérables & les plus riches ſont celles de *Kolyvan* dans les monts d'Altaï, dont l'exploitation a commencée en 1725 par feu Mr. Akimfy *Démidov*, dans la vue d'en retirer le cuivre. Elles furent cedées à la Couronne en 1745. La minière principale eſt à la *montagne de Serpens (Znéof* ou *Znéinogorskoï-Roudnik)* après la quelle viennent les Mines de *Salaïrsk*, de *Pètrovsk*, de *Sèménovsk*, de *Nicolaèvsk* &c. Toutes ces mines fourniſſent jusqu'à $2\frac{1}{2}$ Millions de pouds de minérai, qui ſe trouve pour la plûpart dans le ſpat peſant & la pierre de corne, conſiſtant en Or & Argent natif, en mine d'argent vitreuſe blanche, griſe & ocraçeuſe, contenant en même tems une partie conſidérable de Cuivre, de Plomb & de Zinc. Si l'on en excepte une petite quantité, qui eſt travaillé par le lavage, la totalité en eſt broyée & fondue en matte; cette matte torrefiée eſt refondue avec des minérais plus riches, enſuite purifiée par le plomb, & ce plomb argentifer & mis à la coupelle.

Ex-

Exploitation des mines de Kolyvan depuis leur commencement.

Année.	Du minérai.	De l'Argent.			Année.	Du minérai.	De l'Argent.		
	Pouds.	Pds.	liv.	ſolot.		Pouds.	Pds.	liv.	ſol.
1745.	43863	44	6	21	1771.	1510491	1298	19	07
1747 & 1748.	168564	237	13	33 $\frac{2}{96}$	1772.	1026204	1277	34	34
1749.	204294	309	22	27 $\frac{40}{96}$	1773.	1200638	1181	12	35
1750.	142122	209	29	84 $\frac{36}{96}$	1774.	1375791 $\frac{25}{40}$	1146	24	44
1751.	231406	366	34	84 $\frac{36}{96}$	1775.	1377096	1059	32	81 $\frac{48}{46}$
1752.	150691	304	25	74	1776.	1607229	1027	20	38
1753.	281254	310	26	94 $\frac{48}{96}$	1777.	1537174	1035	26	18
1754.	209058	334	19	15	1778.	1482299	913	-	84
1755.	253511	303	21	45 $\frac{36}{96}$	1779.	1654767	809	11	69 $\frac{21}{96}$
1756.	305809	321	17	95	1780.	1793518	802	30	50
1757.	154514	222	30	80	1781.	1136745 $\frac{1}{2}$	546	14	3
1758.	346255	264	2	88	1782.	938038 $\frac{1}{2}$	400	13	10
1759.	336549	273	10	11 $\frac{12}{96}$	1783.	1485363 $\frac{29}{40}$	730	24	50
1760.	171091	264	22	16	1784.	1134645 $\frac{12}{40}$	517	27	30
1761.	560014	333	20	84 $\frac{48}{96}$	1785.	1850733 $\frac{36}{40}$	600	21	43
1762.	219015	405	27	4 $\frac{12}{96}$	1786.	1743068 $\frac{30}{40}$	771	20	1
1763.	402224	499	24	42 $\frac{48}{96}$	1787.	1621193 $\frac{16}{40}$	775	18	8
1764.	454352	421	9	12	1788.	2028691 $\frac{10}{40}$	868	13	31
1765.	531899	575	34	3	1789.	2196539 $\frac{25}{40}$	1050	9	94
1766.	544065	767	14	24	1790.	2177081 $\frac{15}{40}$	1054	33	53 $\frac{72}{96}$
1767.	465576	779	19	52	1791.	1996582 $\frac{25}{40}$	1052	25	14
1768.	542645	741	22	49	1792.	2067079 $\frac{32}{40}$	1022	38	54
1769.	707680	809	18	84	1793.	1886395 $\frac{27}{40}$	1011	22	22
1770.	1111304	1013	11	90	1794.	1912094 $\frac{35}{40}$	1042	6	1
					Total - -	47,377,216 $\frac{39}{40}$	32081	27	43 $\frac{32}{96}$

Mais

Mais le minérai s'eſt appauvri presque de la moitié dans les tems recens; au commencement il fourniſſoit, l'un portant l'autre, 5 à 6 Solotniks d'argent dans le poud; après, & ſurtout depuis 1785, il ne contient que 2 à $2\frac{1}{2}$ ſol. d'où il eſt evident, qu'il faut employer incomparablement plus d'induſtrie, de connoiſſance & d'économie, pour fournir preſentement autant d'argent, (ſans employer beaucoup plus de monde & de depenſe) que dans le temps paſſé, où les mines étoient plus riches & la maineuvre moins chère.

Il y a ici *ſept* fonderies établies pour la fuſion des mines d'argent & de cuivre, ſavoir: à *Barnaoul*, *Pavlovsk*, *Souſounsk*, *Aleïsk*, *Loktevsk*, *Kolyvansk* & *Gavrilovsk*, dont les trois premières ſont les plus conſidérables. *Barnaoul* eſt le Chef-lieu. En 1794 il y eut 85 officiers (outre le Chef) un bataillon de Soldats, 61 bas-officiers dans les Chancelleries, 351 Ecrivains & autres perſonnes attachées à différens ſervices, 6856 Mineurs & ouvriers, en tout 7453 hommes.

En outre il y a 54750 payſans assignés aux mines par la Reviſion de 1782; dont chacun ne travaille par année (comme chez toutes les autres mines de l'Empire) qu'à raiſon de 170 cop. de Capitation, qui leur eſt payée en argent contant; ils ne ſont deſtinés qu'à couper le bois & transporter le charbon.

La totalité des dépenſes monte annuellement à 500000 R. y compris 200000 R. en monnoie de cuivre, qui eſt frappée ſur le lieu même. Le reſte eſt fourni en billets

lets d'assignation, de ſorte que pour 300000 R. en papier on reçoit de ces mines en or & argent la valeur de 1200000 R. & plus.

2. Les mines de Nertſchinsk contiennent de l'or, de l'argent & du plomb & ſe trouvent dans le diſtrict de la rivière d'Argoune vers la frontière de la Chine. Elles furent découvertes en 1704 & exploitées depuis ce tems presque ſans interruption. Elles conſiſtent pour la plûpart en Ocre & en Spath de plomb, & c'eſt principalement le minérai ocracé, qui fournit la plus grande quantité. On en retire chaque année 1, $1\frac{1}{2}$ jusqu'à 2 millions de pouds, qui, étant broyés, entrent aiſement en fuſion, quoique les mines ſont aſſez ferrugineuſes. Le plomb argentin mis à la coupelle donne l'argent après en avoir retiré la litharge.

Voici le tableau de l'exploitation de ces mines depuis leur commencement:

Exploition des mines de Nertſchinsk depuis leur commencement.

Années.	Du minérai.	De l'argent.			Années.	Du minérai.	De l'argent		
	Pouds.	Pds.	liv.	ſol.		Pouds.	Pds.	liv.	ſol.
1704.	Il n'y a point de comptes ſur l'exploitation du minérai pendant ces années.	-	1	24	1727.	4008	–	4	3[illegible]½
1705.		1	22	36	1728.	5422	–	23	15
1706.		3	19	17½	1729.	5115	1	21	81
1707.		5	7	37	1730.	155	–	35	–
1708.		5	26	–	1731.	– –	–	–	–
1709.		2	3	–	1732.	– –	–	–	–
1710.		8	3	62	1733.	560	–	–	–
1711.		8	14	71	1734.	1667	–	28	48
1712.		11	4	6	1735.	2000	1	14	70
1713.		11	26	14	1736.	2680	2	24	–
1714.		11	30	54	1737.	8208	4	4	38
1715.		2	16	39	1738.	8300	3	19	59
1716.		12	3	45	1739.	15161	7	24	78
1717.		15	13	72	1740.	41099	13	17	39
1718.		10	9	3	1741.	39832	12	20	11
1719.		5	6	5	1742.	119608	9	32	90
1720.		4	1	82	1743.	78087	15	–	6
1721.	35296	5	32	84	1744.	91349	14	37	30¼
1722.	46974	10	4	72	1745.	36187	16	39	93½
1723.	47480	7	17	80	1746.	167275	19	3	51¼
1724.	64864	6	10	31	1747.	112429	35	2	67
1725.	21944	3	9	61	1748.	166574	71	6	6
1726.	10852	1	15	48	1749.	189799	82	7	94

An-

Années.	Du minérai.	De l'argent.			Années.	Du minérai.	De l'argent.		
	Pouds.	Pds.	liv.	ſol.		Pouds.	Pds.	liv.	ſol.
1750.	116540	81	32	18	1772.	1699021	503	36	6
1751.	50860	39	27	2	1773.	1843176	523	28	48¾
1752.	77182	51	7	69	1774.	1763980	619	2	½
1753.	3290	100	25	29	1775.	912092	539	14	76
1754.	96000	51	35	86	1776.	914006	398	39	45¾
1755.	115600	139	16	86	1777.	1513771	323	22	32¼
1756.	341894	126	16	4	1778.	1921659	380	39	1
1757.	413000	100	2	9¼	1779.	1977626	349	16	18½
1758.	410450	134	34	21	5780.	1926012	458	1	4½
1759.	463253	173	7	44⅞	1781.	1597273	399	2	85⅞
1760.	606366	149	14	23½	1782.	1919080	470	37	57
1761.	487164	151	27	17	1783.	1831535	507	37	53
1762.	628707	176	2	65¼	1784.	1858457	457	17	66
1763.	765177	322	26	3	1785.	1333406	288	36	36½
1764.	1147450	399	9	12	1786.	1283328	340	31	36½
1765.	1249600	298	1	81	1787.	1269173	320	8	81½
1766.	1110010	314	33	33	1788.	961085	273	2	78
1767.	1007430	435	35	92	1789.	880235	314	6	4
1768.	952640	343	31	53	1790.	912498	213	1	23
1769.	565539	312	30	76½	1791.	975748	278	1	71
1770.	950324	414	26	21	1792.	858001	263	–	34
1771.	1521985	470	6	87	1793.	791889	237	36	58
					1794.	688437	256	35	53
					Total.	46,034,874	1397[illegible]	10	4½

Il

Il y a cinq fonderies pour la fuſion des mines, dont *Staroï-Nertſchinskoï-Savode* eſt le Chef-lieu. Le nombre des mineurs & des ouvriers monte au de là de 2000 têtes, & les payſans aſſignés ſont au nombre de 13792 dont 1963 ſont deſtinés uniquement à l'agriculture de la Couronne, pour fournir du bled aux ouvriers.

Les fraix annuéls de ces mines vont à 200000 Roubles en monnoie de cuivre ou de papier, de manière qu'il en reſulte un profit environ de 100000 R. en comptant la valeur intrinſéque p. ex. de 300 pouds d'argent, avec l'or contenant, à 300000 Roubles.

Mines de Cuivre.

1.) Les plus conſidérables ſe trouvent aux monts d'*Oural*, dont les plus riches y ſont environ 400 verſtes de Catherinebourg au Nord près de la rivière Tourya, lesquelles autrefois appartenoient à la famille de Pocadïaſchin; mais à preſent c'eſt la banque d'aſſignations qui les poſſede.

La Couronne a 7 fonderies de cuivre dans les environs de la Kamma; outre ces mines il y en a encore de conſidérables dans les Gouvernemens de Perme, d'Orenbourg, de Wïatka & de Caſan, appartenantes à différens propriétaires, dont les plus importantes ſont celles de Tourtſchaninov, de Louguinin, de Twerdiſchev, d'Oſſokin, de Demidov & de Yakovlev. Celles de la Banque, de Tourtſchaninov & des Louguinin fondent des mines *à filon*, mais toutes les autres des mines ſabloneuſes & ſchiſteuſes, exploitées dans des *montagnes à couches*.

Comme on ne peut pas ſavoir la totalité de l'exploitation annuelle de chaque fonderie en detail depuis le commencement, je m'en veux donner du moins un tableau de trois époques les plus rémarquables. (voyez la table ci-jointe).

Ex-

Exploit 1779 & 1794.

Noms de Prop	En 1779.			En 1794.	
	ouds.	liv.	ſolot.	Pouds.	liv.
	15678	11			
	— —	—	—		
La Couronne.	— —	—	—	12000	— —
	9447	15	48		
La Banque d'aſſignatio	1006	39	48	35000	— —
[illegible]	8574	20	30	12000	— —
Mr. le Baron Serge d	— —	—	—	— —	— —
	— —	—	—	— —	— —
Mrs. Maſſalov	— —	—	—	— —	— —
	2985	—	—		
	— —	—	—	3000	— —
Mr. Louguinin					
Mr. Klebnikov	4908	14	—	5000	— —
	7609	2	—	6000	— —
Les heretiers de Twe nikov	25983	—	24	25000	— —
Mr. le Comte de Sch					
Mr. Tevkelev	— —	—	—		
Mr. Ritſchkov	743	26	—		
	— —	—	—		
	5070	26	78	127250	— —

Exploitation en *cuivre* aux montagnes Ouraliennes dans les années 1766, 1779 & 1794.

Noms de Propriétaires.	Noms des Fonderies.	En 1766.			En 1779.			En 1794.	
		Pouds.	liv.	ſolot.	Pouds.	liv.	ſolot.	Pouds.	liv.
	Wercneyougovskoï	12640	28	24					
	Niſchneyougovskoï	16796	23	72	15678	11			
	Anninskoï	10192	2						
	Kouſchvinskoï	298	3	—	— —	—	—		
La Couronne.	Préobraſchenskoï	2255	23	72	— —	—	—	12000	— —
	Yagoſchicuinskoï								
	Wiſimskoï	18622	1	—	9447	15	48		
	Piskorskoï								
	Motavilicuinskoï								
La Banque d'aſſignations.	Petropavlovskoï	13682	10	48	51006	39	48	35000	— —
	Bogoslovskoï								
	Siſertskoï								
La famille de Tourtſchaninov.	Polevskoï	18681	—	—	18574	20	30	12000	— —
	Troïtzkoï	708	35						
	Alapaevskoï	4	—	—	352				
La famille de Yakovlev.	Bingovskoï	— —							
	Ouinskoï	1381	36	—	3860	21	24	200	— —
	Schermaïtskoï	2008	18	48					
Mr. le Comte de Stroganov.	Damrianskoï	3234	32	48					
Mr. le Senateur de Wsewolodskï.	Poſchevskoï	— —	—	—	82	26	48		
Le Prince de Gallitzin	Nitwinskoï	1707	9	24	134	7		100	— —
Mr. de Lazarev	Coclovskoï	2838	11	48	25	3	48	— —	— —
Le Prince de Schacovskoï	Yougokamskoï				134	31	—	250	— —
	Soukſounskoï								
Mr. Alexandre de Demidov.	Bümovskoï	16192	31	—	6428	11	—	6000	— —
	Aſchapskoï								
Mr. de Lazarev	Tſchermaskoï	2276	38	48	— —	—	—	— —	— —
	Yougovskoï								
	Kouraſchinskoï	14777	33	—	10284	5	—	8000	— —
	Biſſerskoï								
La famille d'Oſſokin	Meſchinskoï	78	18	—	537	25	—	1500	— —
	Bemiſchevskoï	1421	5	—	1770	35	—		
	Wercnetroïtskoï								
	Niſchnetroïtzskoï	9731	33	—	9130	16	—	8000	— —
	Ouzenivanovskoï								
	Korinskoï	577	9	—	304	33	—	300	— —
Mrs. Kraſſilnikov	Schilvinskoï	254	10	—	33	6	—		
	Arcanguelskoï	439	20	—	558	17	—	500	— —
Mr. Nicolas de Demidov	Wouiskoï	322	35	—	— —	—	—		
Mr. Kovelev.	Nouſchmanskoï	1702	—	—	1518	25	25	1000	— —
Mr. Inozemtzov	Taïſchevskoï	2105	10	24	2889	34	—	1500	— —
	Iſchtarakovskoï								
Mr. Malenkoï	Berſoutskoï	799	33	48	89	10	—	100	— —
Mr. le Baron Alexandre de Stroganov.	Tomanskoï	1813	36	—	— —	—	—	— —	
Mr. le Baron Serge de Stroganov.	Poſchwinskoï	1743	28	12	— —	—	—	— —	— —
	Schourminskoï	1612	10	—	— —	—	—	— —	— —
Mrs. Maſſalov	Konanikolskoï	8425	20	—	2985	—	—	3000	— —
	Slatoouſtovskoï	1955	32	—	— —	—	—		
Mr. Louguinin	Petropavlovsk-Mïaskoï	658	14	—	4908	14	—	5000	— —
	Bogoslovskoï								
Mr. Klebnikov	Blagoweſchtſchentskoi	3190	9	—	7609	2	—	6000	— —
	Woskreſſenskoï								
	Wercotorskoï								
Les heretiers de Twerdiſchev & Mïasnikov	Préobraſchenskoï	30474	25	60	25983	—	24	25000	— —
	Bogoyavlenskoï								
	Arcanguelskoï								
Mr. le Comte de Schouvalov	Pokrovskoï	227	10	—	— —	—	—		
Mr. Tevkelev	Berſino - Alexandrovskoï	95	35	—	743	26	—		
Mr. Ritſchkov	Spaskoï	74	20	—	— —	—	—		
	Total	206723	31	—	175070	26	78	127250	— —

La plus importante de toutes ces mines de cuivre, ſavoir celle de la Banque d'Aſſignations, a fourni en cuivre pur depuis le commencement de ſon exploitation, c'eſt-à-dire de 1764 jusqu'à

1784	-	666012	pouds.	15.	liv.
1785	-	63150	—	—	—
1786	-	59420	—	—	—
1687	-	52450	—	—	—
1788	-	61400	—	—	—
1789	-	50200	—	—	—
1790	-	62530	—	—	—
1791	-	47363	—	24	—
1792	-	49666	—	28	—
1793	-	50118	—	9	—
1794	-	35368	—	18	—
Total	- -	1197679	—	14	—

Depuis 1794 on y exploite annuellement 700,000 pouds de minérai, qui donnent environ 50,000 pouds de cuivre.

2.) Aux monts d'Altaï il y a differentes mines de cuivre, dont la principale s'appelle *Loktewskoï*; en outre on y retire une bonne quantité de cuivre des mines d'argent cuivreuſes.

Voici

Voici la quantité de l'exploitation en cuivre monnoyé de Kolyvan de chaque année depuis le commencement:

Année.	Pouds.	liv.	ſol.	Année.	Pouds.	liv.	ſol.
1766. & 1767.	11246	23	$75\frac{78}{96}$	1781.	11468	6	$76\frac{3}{4}$
1768.	6807	18	84	1782.	20768	30	—
1769.	7947	37	72	1783.	9518	27	48
1770.	9995	32	36	1784.	14432	32	48
1771.	10002	10	36	1785.	17426	22	48
1772.	9997	26	60	1786.	11937	20	—
1773.	10136	17	95	1787.	9096	35	—
1774.	10008	—	—	1788.	10481	10	—
1775.	12000	—	—	1789.	7218	30	—
1776.	12008	—	—	1790.	12500	—	—
1777.	12000	—	—	1791.	12500	—	—
1778.	12000	—	—	1792.	12500	—	—
1779.	12000	—	—	1793.	12500	—	—
1780.	4234	—	—	1794.	12500	—	—
				Total - -	315233	21	$63\frac{45}{96}$

3.) L'exploitation des mines de cuivre dans quelques autres diſtricts de la Ruſſie, p. ex. celles d'Olonetz, ne monte qu'à quelques centaines de pouds. Ainſi la totalité de l'exploitation annuelle de cuivre dans toute l'Empire ne va aujourd'hui beaucoup au de là de 150,000 pouds.

Mines de Fer.

1.) Les mines de fer ſont les plus grandes richeſſes minérales de la Ruſſie. Les plus importantes en ſont dans les monts d'*Oural*, dont voici le tableau de leur exploitation en *fer forgé:* (voyez le tableau ci-joint).

2.)

Ourals

e Pro

Tableau de l'exploitation des mines de fer des monts Ourals en 1766, 1779 & 1794.

Noms de Propriétaires.	Noms des Fonderies.	En 1766. Pouds.	liv.	En 1779. Pouds.	liv.	En 1794. Pouds.
	Catherinebourgskoï	— —	—	283	—	
	Kamenskoï	8345	24	8004	30	
	Pyſchminskoï	— —	—	12274	10	
	Kouſchvinskoï	— —	—	— —	—	
La Couronne.	Tourinskoï	56872	24½	21610	26	420000
	Barantſchinskoï	26647	2	8763	30½	
	Niſchnetourinskoï	1750	5	105977	12	
	Serebrïanskoï	99807	1	94838	25	
	Wotkinskoï	134475	¾	136877	15½	
	Iſchefskoï	100105	26	136891	27	
	Niſchnetaguilskoï	63554	39	8387	—	
	Wouïskoï	32310	14	18701	—	
	Tſchernoïſtotſchinskoï	63671	30	60477	20	
Mr. Nicolas de Demidov	Laïskoï	19405	14	12773	—	300000
	Wiſimoſchaïtanskoï	12457	20	26351	—	
	Niſchneſaldinskoï	79212	5	58908	30	
	Wiſimo - Outkinskoï	— —	—	18555	20	
	Wercneſaldinskoï	— —	—	2355	10	
	Wercnéiſſetskoï	71134	20	57972	35	
	Outkinskoï	— —	—	— —	—	
	Silwinskoï	44013	8	30886	10	
	Newïanskoï	57116	22	121991	—	
	Bingovskoï	99711	20	140145	35	
	Schouralinskoï	18695	—	16289	20	
	Wercnetaguilskoï	40763	—	41470	30	
	Wercneïwinskoï	— —	—	37101	30	
La famille de Yakovlev	Schaïtanskoï	10834	20	757	—	
	Regevskoï	— —	—	33311	30	790000
	Irbitskoï	— —	—	— —	—	
	Alapaeſskoï	12945	6	19442	20	
	Niſchneſinïatſchikinskoï	39428	33	50255	30	
	Niſchneſouſanskoï	17517	32	27119	36	
	Wercneſouſanskoi	17420	17	18984	25	
	Wercneſinïatſchikinskoï	— —	—	32225	38	
	Petrokamenskoï	— —	—	— —	—	
	Siſerskoï	52100	9	57562	20	
La famille de Tourtſchaninov	Polevskoï	— —	—	— —	—	120000
	Severskoï	38854	39	1594	32	
	Rewdinskoï	57034	10	46260	11	
Mr. Pierre de Demidov	Biſerskoï	25382	—	56845	7	160000
	Roſchtſcheswenskoï	29255	20	42710	—	
	Outkinskoï	38484	—	37623	—	
	Aſchapskoï	— —	—	17532	35	
Mr. Alexandre de Demidov	Tiſſovskoï	4673	30	13400	10	130000
	Kambarskoï	— —	—	33852	—	
Mr. Nikita de Demidov	Kaslinskoï	67494	—	113765	—	300000
	Wercne & Niſchnekiſchtimskoï	108577	20	154050	—	
Mr. Ivan de Demidov	Niſchneſerguinskoï	83872	—	88744	—	160000
	Wercneſerguinskoï	44053	—	56086		
	Petropavlovskoï	1371	23½			
La Banque d'aſſignations.	Bogoslovskoï	— —	—	2531	18	30000
	Nicolopavdinskoï	11911	—	8031	—	
	Bilimbaévskoï	— —	—	2551	—	
Mr. le Comte de Stroganov.	Damrïanskoï	24536	6½	17054	30	190000
	Otſcherskoï	64674	35	62956	11	
Mr. Schiraév	Niſchne & Wercneſchaïtanskoï	32263	—	61377	—	60000
	Ouſaléevskoï	13772	37	29225	78	
Mr. Maſſalov	Salafinskoï	— —	—	2102	10	90000
	Schourminskoï	859	—	17530	20	
	Bouïskoï	— —	—	16877	30	
Mr. Petrov	Naſépetrovskoï	17920	—	26023	—	50000
Mr. Wlaslewskoï	Yaſagaſchskoï	2436	36			
Mr. de Wſewolodskoï	Poſchevskoï	— —	—	58051	21	65000
Mr. le Prince de Gallitzin	Nitwinskoï	19761	20	69126	—	65000
Mr. le Prince de Schacovskoï	Yougokamskoï	16926	5	27686	33	60000
Mrs. les Princes de Galitzin & de Schacovskoï	Kouſéalexandrovskoï	6247	12	673	35	20000
Mr. le Baron Gregoire de Stroganov	Künovskoi	37570	11	44224	14	40000
Mr. de Lazarev	Tſchermaskoï	— —	—	37707	9	100000
	Irguinskoï	14025	4	22474	20	
Mr. Oſſokin	Saraninskoï	16457	20	27093	—	125000
	Poudemskoï	6358	38	10336	35	
	Omoutinskoï	— —	—	10328	10	
Mr. Kraſſilnikov	Ildianskoï	180	10			
Mr. Louguinin	Slato - Ouſtovskoï	1913	—	109523	20	180000
	Troïtzoïſatkinskoï	63258	13	31515	20	
	Katawivanovskoï	83469	32	43604	—	
Les heretiers de Mïasnikov & Twerdiſchev	Ouſtkatawskoi	28045	31	47086	20	350000
	Simskoï	61317	1½	47836	—	
	Bevretskoï	— —	—	55750	25	
	Wercne - Abſïanskoï	131519	21	16386	—	
Mr. Evdakime Demidov	Niſchne - Abſianskoï			24839	—	80000
	Kaguinskoï	— —	—	36485	—	
	Ouſianskoï	— —	—	7779	—	
	Total	2334773	7¾	3054781	9	3885000

2.) Outre les fabriques de fer d'Oural il y a 2 fonderies de fer aux monts d'Altaï & de Sayan, appartenantes l'une aux mines de *Kolyvan* & l'autre à celles de *Nertſchinsk*. Il y a auſſi quelques petites forges des particuliers & des payſans aux environs de *Yeniſſeïsk*, de *Krasnoyarsk*, d'*Irkoutsk*, &c. Toutes enſemble ne produiſent annuellement qu'environ 50, 000 pouds de fer forgé.

3.) De reſte il y a encore pluſieurs autres fonderies & forges de fer dans les Gouvernements d'*Olonetz*, de *Wologda*, de *Niſchnegorode*, de *Koſtroma*, de *Kalouga*, de *Toula*, de *Tambow*, de la *nouvelle Ruſſie*, &c. La production peut être evaluée à un demi-million de pouds & plus.

Ainſi toute la Ruſſie produit annuellement plus de 4½ millions de pouds de fer forgé, ſans compter les marchandiſes de fer crud & les canons &c. Cependant les fabriques de la Couronne ne produiſent pas un demi-million de pouds; ce ſont les forges des propriétaires particuliers, qui donnent la principale quantité. Les plus conſidérables ſont celles qui appartiennent aux familles de *Yakoblev*, de *Demidov*, de *Stroganov*, de *Louguinin*, d'*Oſſokin*, de *Twerdiſchev*, de même que celles de *Bataſchev* dans le Gouvernement de *Niſchnegorode*, & de *Demidov* à *Kalouga*. La plûpart & les plus importantes de ces fabriques fondent des minérais, qui ſe trouvent en grandes maſſes & gîtes; les autres employent des mines limoneuſes & marècageuſes.

On peut compter, que dans tout l'Empire il y a préſentement 100 hauts-fourneaux & plus de 800 grands-marteaux. La plûpart du minérai donne au de là de 50 pour

pour cent de fer en gueuſe ou fonte; quelques-uns cependant ſont audeſſous. Selon la manipulation introduite 7 millions de fer de fonte produiſent environ $4\frac{1}{2}$ mill. de pouds de fer forgé; ce produit réquiert pour le moins 15 millions de minérai et 26 millions de pouds de charbon.

Le nombre des mineurs & autres ouvriers, attachés aux mines de *cuivre* & de *fer* en Sibérie, tant de la Couronne que des particuliers, monte à 77000 hommes, & celui des payſans aſſignés au de là de 200000. On peut donc compter, que dans la Sibérie & dans les Gouvernemens ruſſes ſont employés aux mines, fonderies, forges &c. au de là de 100000 ouvriers & plus de 300000 payſans de la Couronne, ſans mêttre en ligne de compte ceux de la Nobleſſe & toutes les ouvriers libres.

Calcul général.

L'Empire de Ruſſie gagne préſentement de ſes mines chaque année:

En Or, environ	30 pouds, evalués à	- -		409600 R.
Argent -	1200	- - - -		1102266 —
Plomb -	30000	- -	à 2 R. -	60000 —
Cuivre -	150000	- -	16 — -	2400000 —
Fer forgé	4,500,000	- - -	$1\frac{1}{2}$ —	6,750,000 —
			Total - -	10,721,866 —

Par un calcul detaillé, que j'ai fait ailleurs, le profit net, que la Couronne tire à préſent de cette production, monte annuellement au de là de 3 Millions de Roubles,

y

y compris le profit de ſes propres mines, le gain ſur la monnoie de cuivre, & les impots ſur l'exploitation des particuliers. Ces impots ſont les ſuivants:

	Roubles.	Cop.
De chaque haut-fourneau de fer annuellement -	200	- —
De chaque fourneau de cuivre - - -	10	- —
De chaque poud de fer de fonte au lieu de dixme -	-	8

Si les mines & les fabriques ſe trouvent ſur le territoire de la Couronne, ayant en même tems des ouvriers & des payſans *aſſignés*; mais dans le cas contraire, & ſi les fabriques ſe trouvent ſur le terrein des propriétaires, on ne paye que - - - - - - 6 Cop.

Le *dixme* double de cuivre *in natura*; c'eſt-à-dire 20 pour cent de toute l'exploitation, ſi les mines & les fonderies ſe trouvent ſur le territoire de la Couronne, comme il eſt dit ci-deſſus; dans le cas contraire on ne donne que 15 pour cent.

Le *dixme* de l'Argent & de l'Or in natura, ſi l'on en produira.

Enfin la moitié du cuivre, qui reſte après avoir deduit le dixme, & laquelle doit être livrée à la cour de monnoie pour le prix de $5\frac{1}{2}$ Roubles le Poud.

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE DE CRYSTALLISER LES RÉGULES D'OR ET D'ARGENT.

Par
M. *le Comte APOLLOS de MOUSSIN POUSCHKIN.*

Préſenté à l'Académie le 6 Juillet 1797.

La cryſtalliſation eſt ſans contredit un des plus beaux phénomènes que la nature préſente au ſcrutateur de ſes travaux. Si la beauté & l'élégance des formes de tant de cryſtaux variés flatte l'oeil ſurpris de l'amateur, la régularité mathématique de ces belles productions, & la multiplicité des méſures exactes que la nature a du y employer, étonnent l'oeil du philoſophe, & lui fourniſſent un champ bien vaſte à de nouvelles obſervations, & par conſéquent auſſi à de nouvelles découvertes.

Pluſieurs ſçavans illuſtres ſe ſont occupés de cette vaſte branche de l'Hiſtoire naturelle, & nous dévons à leurs travaux une infinité de faits nouveaux & de remarques intereſſantes. Mais la plûpart n'ont eu en vue que les cryſtalliſations lithyques ou ſalines, & ce n'eſt à peu près que de nos jours que Meſſieurs Pouget, Grignon, Monges, Rouelle, Morveau & quelques autres, ont commencé à obſerver

ver les cryſtalliſations artificielles des régules métalliques. C'eſt au hazard que les premieres découvertes ont été dues en ce genre, mais des obſervateurs auſſi exercés ont ſçû pourſuivre & analyſer les phenomènes que la nature en ſe jouant leur a préſentés un moment, & nous n'avons pas tardé à leur devoir des méthodes plus on moins faciles de faire cryſtalliſer quelques ſubſtances métalliques. Presque toutes ces méthodes ont eu pour but de produire un vuide dans l'intérieur des régules, en laiſſant couler peu de momens après la fonte, la partie du métal qui n'étoit pas encore refroidie, & en la ſéparant ainſi de celle qui s'étoit déja formée en croute; ce qui ſe faiſoit, ſoit par l'inclinaiſon des vaiſſaux, ſoit auſſi à l'aide d'une, ou de pluſieurs ouvertures, préparées d'avance dans le creuſet, & bouchées d'un mélange de terre des os & de terre réfractaire: & ſi l'opération avoit bien réuſſi, on trouvoit ou les parois des vaiſſaux ou la ſurface intérieure de la croute métallique, couvert de cryſtaux plus ou moins diſtincts. Le volume XIII. du journal de Phyſique Pag. 90. contient quelques figures de régules ainſi cryſtalliſés.

Un travail ſur la platine dont je me ſuis occupé dans le cours de ce printems, m'a fait faire la découverte d'une nouvelle combinaiſon du phoſphore avec quelques chaux métalliques, que j'aurai peut être l'honneur de mêttre un jour ſous les yeux de l'Académie, & c'eſt en répetant une expérience rélative à cet objet, que le hazard m'a préſenté d'abord un régule d'argent cryſtalliſé; quelques nouvelles expériences m'ont enſuite conduit à pluſieurs méthodes d'obtenir à volonté des régules d'or & d'argent très ſenſiblement cryſtalliſés, & en donnant un détail de la plus facile,

 je

je me ſais un devoir de la ſousmettre au jugement de l'A-
Tab. X. cadémie, & un honneur de Lui préſenter deux échantillons de régules ainſi cryſtalliſés.

Triturés dans un mortier de verre, une quantité quelconque de nitrate d'argent ou d'oxide d'or précipité par le carbonate de Potaſſe. Faites diſſoudre à l'aide d'une chaleur un peu forte, du phoſphore dans de l'huile de thérebentine. Verſés ſur le ſel métallique ou ſur le précipité d'or, pendant que vous continuerés la trituration, une quantité ſuffiſante de la diſſolution phoſphorique, pour donner au tout la conſiſtance d'une pâte, & paitriſſés la dans un têſt à rotir; verſés ſur ce mélange aſſés de diſſolution phosphorique pour recouvrir la maſſe d'un bon travers de doigt; placés le têſt ſous le mouffle & entretenés une forte chaleur. Le mélange s'enflamme, répand beaucoup de ſuye, & au bout de quelques minutes vous trouvés un régule plus ou moins bien, mais généralement très diſtinctement cryſtalliſé. La cryſtalliſation paroit être prîsmatique, celle de l'argent vue à la loupe reſſemble beaucoup à l'argent nâtif réticulé du Potoſe. C'eſt à des nouvelles expériences à faire voir, ſi le phosphore ou ſon acide contribue identiquement à cette cryſtalliſation, ou bien ſi c'eſt ſeulement en garantiſſant le métal pendant la réduction & le refroidiſſement du contact de l'air & ſurtout pendant l'inſtant de l'éclair, qui ſans contredit eſt un inſtant de véritable cryſtalliſation, que ce phénomène ſe genère. Je tacherai de m'en aſſurer, & j'aurai l'honneur d'en rendre compte à l'Académie.

NO.

NOTICE D'UN CRYSTAL SPATHIQUE

JAUNE, QUI DOUBLE LES OBJETS, TROUVÉ NOUVELLEMENT EN RUSSIE.

Par

M. le Conſeiller Privé AND. de NARTOF.

Préſenté à l'Académie le 12 Octobre, 1797.

On connoit l'eſpèce de pierre, qui a été nommée cryſtal ſpathique d'Islande, *Spathum Islandicum; Spathum compactum ſubfiſſile, pellucidum, objecta duplicans* de Wallerius. On ſait, qu'il tire ſon nom de l'Isle, ou on l'a trouvé pour la premiere fois, mais qu'il à été trouvé depuis dans pluſieurs autres pays, comme en Saxe, en Suiſſe & même en Ruſſie. Sa propriété remarquable eſt de faire paroître doubles tous les objets, qu'on voit au travers.

Huyghens, Neuton & d'autres célèbres Phyſiciens ont expliqué différement la réfraction extraordinaire de ce cryſtal ſpathique. On a même crû que cette propriété apartient excluſivement au cryſtal de ce nom. C'eſt à la ſagacité & aux obſervations du celèbre Werner, que nous devons

vons actuellement la connoiſſance, que chaque Spath calcaire transparent, qui a perdu ſes faces laterales naturelles, a la propriété de doubler les objets, quand on regarde au travers. Mais on n'a fait mention jusqu'à préſent que du Spath blanc transparent, qui ait cette proprieté ſinguliere: J'en ai trouvé depuis de couleur jaune de citron, comme le Sélenite jaune de Monmartre de Paris.

Pour accomplir la promeſſe, que j'ai faite de fournir à l'Illuſtre Académie des Sciences les minéraux remarquables de Ruſſie avec leurs déſcriptions minéralogiques; j'ai l'honneur de Lui faire parvenir un échantillon de ce Spath jaune mentionné doublant les objets; il à été trouvé dans les fentes d'une roche près du village Sargouba ſur la rive du Lac Jukscha, 20 verſtes de Pétroſawodſk. Son efferveſcence avec les acides, & ſon petillement dans un certain degré de chaleur, avec ſes autres caractères externes lui accordent tout le droit d'être placé parmi les pierres calcaires dans lesquelles la terre calcaire eſt unie à l'acide carbonique, & particulierement parmi les pierres calcaires feuilletées, ou Spaths calcaires, dont il fait une variété transparente de couleur jaune & doublant les objets. Il faut y ajouter, qu'il ſe trouve en maſſes aſſés conſidérables de pluſieurs pouces d'épaiſſeur, & qu'il eſt ſouvent enduit d'une écorce ſpathique opaque & rougeatre, qui doit étre ôtée, & même la maſſe entiere briſée, pour avoir un beau rhombe de Spath jaune avec toutes ſes propriétés mentionées.

ASTRO-

ASTRONOMICA

ET

METEOROLOGICA.

DE
PERTVRBATIONE MOTVS URANI.
DISSERTATIO I.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Conventui Acad. exhib. d. 28 Apr. 1796.

§. 1.

Ephemerides Berolinenſes ad annum 1792 pervolvens, non ſine admiratione ingentem animadverti differentiam inter formulas, a viris celeberrimis *Gerſtner* et *Oriani* (*loc. cit.* pag. 216. 217.), pro motu *Urani* a *Saturno* et *Iove* turbato computatas, quorum prior methodum *Clairaltianam*, alter methodum celeberrimi *de la Place* ſecutus eſt. Res mihi videbatur ſumma attentione digna, et cum perturbationes, quas Uranus ſuffert, ob ſitum eius erga maximos duo ſyſtematis noſtri planetas, non leves ſint, operae pretium duxi, cunctas perturbationes, quas novus iſte planeta ab omnium aliorum planetarum viribus ſufferre poteſt, diligentiſſime computare: idque eo magis, cum auctores ſupra citati aequationes ſeculares penitus omiſerint, ex aequationibus autem periodicis plures neglexerint, inprimis unam a qua-

drato eccentricitatis dependentem, quae aequationi motus medii ſeculari non diſſimilis ad 2′ 30″ pervenit, et ex qua ſimilis pro motu Saturni medio aequatio 34 minutorum ſecundorum oritur, in theoria Saturni non levis momenti et hucusque incognita.

§. 2. In toto hocce calculo ingenioſiſſimam methodum ſecutus ſum, a Cel. *de la Place* excogitatam, qua magnus iſte Geometra tam felici ſucceſſu uſus eſt (*); unde non opus erit, demonſtrationem formularum repetere, formulae autem ipſae, licet compendii cauſa nonnihil immutatae, hic erunt colligendae. Sit itaque per totam hanc diſſertationem, radius orbis telluris $= 1$,

diſtantia Urani a Sole media $= a$,
maſſa eiusdem per ſolis maſſam diviſa $= m$,
eccentricitas $= \gamma$, longitudo Aphelii $= \pi$,
longitudo nodi aſcendentis $= \mathrm{I}$,
inclinationis ad eclipticam tangens $= \theta$,
motus medius annuus $= n$, longitudo media $= ♅$;

denotentque a', m', γ', π', I', θ', n', ♄ ſeu ♃, eadem elementa pro planeta turbante. Sit praeterea $\frac{a}{a'} = \alpha$, et $\frac{n}{n'} = \nu$, ita ut ſit $\nu = \alpha^{-\frac{3}{2}}$ per tertiam *Kepleri* legem.

§. 3. Quantitas irrationalis, per totum perturbationum calculum graviſſimi momenti, ſeu $\frac{a}{a'a'}$ coſ (♄ — ♅)

(*) V. Theorie de Jupiter & de Saturne, par M. de la Place. Hiſt. de l'Ac. Roy. des Sc. de Paris, Année 1785, 1786.

$-[aa + a'a' - 2aa' \cos(♄ - ♂)]^{-\frac{1}{2}}$ appelletur S, ac ponatur elongatio utriusque planetae heliocentrica ſeu $♄ - ♂ = w$, &

$$S = \tfrac{1}{2}A^{(0)} + \tfrac{1}{2}A^{(1)}\cos w + \tfrac{1}{2}A^{(2)}\cos 2w + \ldots\ldots + \tfrac{1}{2}A^{(i)}\cos iw,$$

denotante i omnes numeros integros, tam poſitivos quam negativos, ſive

$$S = \tfrac{1}{2}A^{(0)} + A^{(1)}\cos w + A^{(2)}\cos 2w + \ldots\ldots + A^{(i)}\cos iw,$$

ſi i numeros tantummodo poſitivos ſignificat. Poſito iam $\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \beta$, aſſumtisque ſeriebus

$$g = 1 + \frac{1.3}{4^2}\beta^2 + \frac{1.3.5.7}{4^2.8^2}\beta^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{4^2.8^2.12^2}\beta^6 + \text{cet.}$$

$$h = \frac{\beta}{2} + \frac{3.5}{4^2}.\frac{\beta^3}{4} + \frac{3.5.7.9}{4^2.8^2}.\frac{\beta^5}{6} + \frac{3.5.7.9.11.13}{4^2.8^2.12^2}.\frac{\beta^7}{8} + \text{cet.}$$

$$b^{(0)} = \frac{2g}{\sqrt{(1+\alpha^2)}},\ b^{(1)} = \frac{h}{\sqrt{(1+\alpha^2)}},\ b^{(2)} = \frac{2(1+\alpha^2)}{3\alpha}b^{(1)} - \frac{1}{3}b^{(0)},$$

$$b^{(3)} = \frac{4(1+\alpha^2)}{5\alpha}b^{(2)} - \frac{3}{5}b^{(1)},$$

et generatim

$$b^{(i)} = \frac{2(i-1)(1+\alpha^2)b^{(i-1)} - (2i-3)\alpha b^{(i-2)}}{(2i-1)\alpha},$$

conſtat, coëfficientes g, h, $b^{(i)}$, ex evolutione quantitatis

$(aa + a'a' - 2aa'\cos w)^{-\frac{1}{2}}$ oriri, ideoque eſſe

$$A^{(0)} = -\frac{b^{(0)}}{a'},\ A^{(1)} = \frac{a}{a'a'} - \frac{b^{(1)}}{a'},\ A^{(2)} = -\frac{b^{(2)}}{a'},$$

et in genere $A^{(i)} = -\frac{b^{(i)}}{a'}$, ſeu $aA^{(i)} = -\alpha b^{(i)}$, in ſpecie vero $aA^{(1)} = \alpha^2 - \alpha b^{(1)}$.

§. 4. Simili modo evoluta quantitate

$(aa + a'a' - 2aa'\cos w)^{-\frac{3}{2}} = T$, ac poſita

 T =

$$T = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{A}^{(0)} + \mathfrak{A}^{(1)} \operatorname{coſ} w + \ldots\ldots + \mathfrak{A}^{(i)} \operatorname{coſ} i\,w, \text{ erit}$$

$$\mathfrak{A}^{(0)} = \frac{\varepsilon^{(0)}}{a'^3},\ \mathfrak{A}^{(1)} = \frac{\varepsilon^{(1)}}{a'^3},\ \mathfrak{A}^{(i)} = \frac{\varepsilon^{(i)}}{a'^3}, \text{ ubi eſt}$$

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{(1+\alpha^2)\,b^{(0)} - 2\,\alpha\,b^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2},\ \varepsilon^{(1)} = \frac{3\,(1+\alpha^2)\,b^{(1)} - 6\,\alpha\,b^{(2)}}{(1-\alpha^2)^2},$$

et generatim

$$\varepsilon^{(i)} = \frac{(2\,i+1)\,(1+\alpha^2)\,b^{(i)} - 2\,(2\,i+1)\,\alpha\,b^{(i+1)}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

§. 5. Differentialia denique partialia quantitatum $b^{(i)}$, $A^{(i)}$, $\mathfrak{A}^{(i)}$, ſequente modo determinantur. Reperitur

$$\left(\frac{\partial\,b^{(0)}}{\partial\,\alpha}\right) = c^{(0)} = \frac{\alpha\,b^{(0)} - b^{(1)}}{1-\alpha^2},$$

$$\left(\frac{\partial\,b^{(1)}}{\partial\,\alpha}\right) = c^{(1)} = \frac{c^{(0)}}{\alpha}, \text{ in genere vero}$$

$$\left(\frac{\partial\,b^{(i)}}{\partial\,\alpha}\right) = c^{(i)} = \frac{i + (i+1)\,\alpha^2}{\alpha\,(1-\alpha^2)}\,b^{(i)} - \frac{2\,i+1}{1-\alpha^2}\,b^{(i+1)},$$

et ulterius differentiando

$$\left(\frac{\partial\,c^{(i)}}{\partial\,\alpha}\right) = e^{(i)} = \frac{i + (i+1)\,\alpha^2}{\alpha\,(1-\alpha^2)}\,c^{(i)} + \frac{(i+1)\,\alpha^4 + (4\,i+1)\,\alpha^2 - i}{\alpha^2\,(1-\alpha^2)^2}\,b^{(i)}$$

$$- \frac{2\,i+1}{1-\alpha^2}\,c^{(i+1)} - \frac{2\,(2\,i+1)\,\alpha}{(1-\alpha^2)^2}\,b^{(i+1)}.$$

Unde ſimul habetur

$$\left(\frac{\partial\,A^{(0)}}{\partial\,a}\right) = -\frac{c^{(0)}}{a'\,a'},\ \left(\frac{\partial\,A^{(1)}}{\partial\,a}\right) = \frac{1 - c^{(1)}}{a'\,a'}, \text{ et in genere}$$

$$\left(\frac{\partial\,A^{(i)}}{\partial\,a}\right) = -\frac{c^{(i)}}{a'\,a'}, \text{ ſeu}$$

$$\alpha^2 \left(\frac{\partial\, A^{(i)}}{\partial\, \alpha}\right) = -\, \alpha^2\, c^{(i)},\ \alpha^3 \left(\frac{\partial\, \partial\, A^{(i)}}{\partial\, \alpha^2}\right) = -\, \alpha^3\, e^{(i)},$$

$$\alpha\, \alpha' \left(\frac{\partial\, A^{(i)}}{\partial\, \alpha'}\right) = \alpha\, b^{(i)} + \alpha^2\, c^{(i)},$$

$$\alpha^2\, \alpha' \left(\frac{\partial\, \partial\, A^{(i)}}{\partial\, \alpha\, \partial\, \alpha'}\right) = 2\, \alpha^2\, c^{(i)} + \alpha^3\, e^{(i)},$$

$$\alpha\, \alpha'^2 \left(\frac{\partial\, \partial\, A^{(i)}}{\partial\, \alpha'^2}\right) = -\, 2\, \alpha\, b^{(i)} - 4\, \alpha^2\, c^{(i)} - \alpha^3\, e^{(i)},$$

$$\alpha^4 \left(\frac{\partial\, \mathfrak{A}^{(i)}}{\partial\, \alpha}\right) = \alpha^4 \left(\frac{\partial\, \varepsilon^{(i)}}{\partial\, \alpha}\right),$$

$$\alpha^3\, \alpha' \left(\frac{\partial\, \mathfrak{A}^{(i)}}{\partial\, \alpha'}\right) = -\, 3\, \alpha^3\, \varepsilon^{(i)} - \alpha^4 \left(\frac{\partial\, \varepsilon^{(i)}}{\partial\, \alpha}\right).$$

§. 6. Omnes iam aequationes Urani, quas ope ſuperiorum quantitatum computare licet, diſpertiri iuvabit in variationes elementorum *ſeculares*, et in aequationes diſtantiae longitudinisque *periodicas*, hasque iterum in eas quae ab eccentricitate independentes ſunt, easque quae ab eccentricitate ſimplice dependent. Eas denique, quae ab altiore eccentricitatum poteſtate dependent, infra ſeorſim tractabimus. Ad illas vero ſupputandas, ſequentibus adhuc opus eſt quantitatibus.

Poſito $1 - \nu = \mu$, $\nu + i\, \mu = \sigma$, $\nu - i\, \mu = \tau$, fiat

$$M^{(i)} = \frac{(2\, i^3 - i^2 - 3)\, \nu^2 - 4\, i^2\, (i - 1)\, \nu + 2\, i^3 - 3\, i^2}{2\, \mu\, \sigma\, \tau}\, \nu^3\, \alpha\, b^{(i)}$$
$$-\, \frac{(i^3 + i^2 - 3)\, \nu^2 - i^2\, (2\, i + 1)\, \nu + i^3}{2\, \sigma\, \tau}\, \nu^2\, \alpha^2\, c^{(i)} + \frac{\nu^2}{4}\, \alpha^3\, e^{(i)},$$

$$D^{(i)} = \frac{(3\, i^3 - 2\, i^2 - 1)\, \nu^2 - (6\, i^3 - 7\, i^2)\, \nu + 3\, i^3 - 5\, i^2}{2\, \mu\, \tau\, \sigma^2}\, \nu^2\, \alpha\, b^{(i)}$$
$$-\, \frac{(i^3 + i^2 - 3)\, \nu^2 - (2\, i^3 + i^2)\, \nu + i^3}{4\, i\, \sigma^2}\, \nu\, \alpha^2\, c^{(i)} + \frac{\nu\, \alpha^3\, e^{(i)}}{2\, \sigma},$$

$\mathfrak{M}^{(i)}$

$$\mathfrak{M}^{(i)} = \frac{(i-1)(2i-1)}{2\sigma}\,\nu^3\,\alpha\,b^{(i-1)} + \frac{(i^2-1)\nu - i^2}{2\sigma}\,\nu^2\,\alpha^2\,c^{(i-1)}$$
$$-\frac{\nu^2}{4}\,\alpha^3\,e^{(i-1)},$$
$$\mathfrak{D}^{(i)} = \frac{3(i-1)(2i-1)}{4\sigma^2}\,\nu^2\,\alpha\,b^{(i-1)} + \frac{(4i^2-i-3)\nu - 4i^2}{4\sigma^2}\,\nu\,\alpha^2\,c^{(i-1)}$$
$$-\frac{\nu\,\alpha^3}{2\sigma}\,e^{(i-1)};$$

in quibus formulis i omnes numeros integros, tam poſitivos quam negativos ſignificat.

§. 7. Poſito iam numero, in quem arcus circulares ducti minutis ſecundis exprimuntur, ſive

$$\frac{180.60.60}{\pi} = 206264,8 = \lambda,$$

omnes aequationes ſequentibus formulis definiuntur.

I. Aequationes *ſeculares*.

Incrementum annuum *inclinationis* ad eclipticam

$$= \frac{n}{4}\,m'\,\alpha^2\,\varepsilon^{(1)}\,\theta'\,\text{ſin}\,(I - I') = m'\,\xi.$$

Motus annuus *nodorum* reſpectu fixarum progreſſivus

$$= \frac{n}{4}\,m'\,\alpha^2\,\varepsilon^{(1)}\,[\tfrac{\theta'}{\theta}\,\text{coſ}\,(I - I') - 1] = m'\,\zeta.$$

Incrementum annuum *eccentricitatis*

$$= \frac{n}{4}\,m'\,\alpha\,\gamma'\,[2\,(1 + \alpha^2)\,\varepsilon^{(1)} - 3\,\alpha\,\varepsilon^{(0)}]\,\text{ſin}\,(\pi' - \pi) = m'\,\delta\,\gamma.$$

Motus annuus *apſidum* reſpectu fixarum progreſſivus

$$= \frac{n}{4}m'\,\alpha^2\varepsilon^{(1)} - \frac{n}{4}m'\,\alpha\frac{\gamma'}{\gamma}[2\,(1 + \alpha^2)\,\varepsilon^{(1)} - 3\,\alpha\,\varepsilon^{(0)}]\,\text{coſ}(\pi' - \pi) = m'\,\delta\,\pi.$$

II. Aequationes *periodicae* ab eccentricitate independentes.

Aequatio *radii vectoris* partibus radii orbitae Urani expreſſa

$$= -\frac{m'}{6}\,a\,\alpha^2\,c^{(0)} - \frac{m'\,a}{\sigma\,\tau}\,[\tfrac{2\,\nu 3\,\alpha}{\mu}\,b^{(i)} - \nu^2\alpha^2 c^{(i)}]\,\text{coſ}\,i\,(♄ - ♅) = E.$$

Aequa-

Aequatio *longitudinis* minutis ſecundis expreſſa

$$= \frac{m'\lambda\nu^2\alpha}{i\mu\sigma\tau}\left[\frac{(i^2+3)\nu^2-2i^2\nu+i^2}{\mu}\,b^{(i)} - 2\nu\alpha\,c^{(i)}\right]\text{ſin}\,i\,(\text{♄}-\text{♅}) = \text{F}.$$

III. Aequationes *periodicae* ab eccentricitate ſimplice dependentes.

Aequatio *radii vectoris* =

$$-\frac{2m'a}{i\mu(\nu+\sigma)}\left[\text{M}^{(i)}\gamma\,\text{coſ}\,(i\,\text{♄}-(i-1)\,\text{♅}-\pi) + \mathfrak{M}^{(i)}\gamma'\,\text{coſ}\,(i\,\text{♄}-(i-1)\,\text{♅}-\pi')\right] = \text{G}.$$

Aequatio *longitudinis* =

$$-2m'\lambda\gamma\left[\text{D}^{(i)}-\frac{2\,\text{M}^{(i)}\sigma}{i\nu\mu(\nu+\sigma)}\right]\text{ſin}\,(i\,\text{♄}-(i-1)\,\text{♅}-\pi)$$

$$-2m'\lambda\gamma'\left[\mathfrak{D}^{(i)}-\frac{2\,\mathfrak{M}^{(i)}\sigma}{i\nu\mu(\nu+\sigma)}\right]\text{ſin}\,(i\,\text{♄}-(i-1)\,\text{♅}-\pi') = \text{H}.$$

Meminiſſe hic oportet: 1. in aequationibus E, F, denotare i quemvis numerum poſitivum (§. 3.), in aequationibus G, H, autem omnes numeros integros, cum poſitivos tum negativos (§. 6.); 2. tum in his quam in illis, caſu $i = 1$, loco $b^{(i)}$ ſubſtituendum eſſe $b^{(1)} - \alpha$, loco $c^{(1)}$ vero $c^{(1)} - 1$ (§. 3. 5.).

§. 8. Aequationes $m'\xi$, $m'\zeta$, ex actione planetarum in Uranum oriundae, motum orbitae Urani *realem*, ſeu variationem inclinationis atque nodorum cum ecliptica, quatenus *immobilis* ſtatuitur, continent. Cum autem ecliptica vi actionis planetarum in tellurem exercitae e ſitu ſuo dimoveatur, fieri nequit, quin variatio inclinationis nodorum-

que

que Urani et cuiuscunque alius planetae, ſeu motus orbitae Urani *apparens* hinc oriatur, qui motui reali addendus eſt.

§. 9. Si nempe a' radium orbis, m' maſſam alius cuiuspiam planetae denotat, $\varepsilon^{(1)}$ autem e combinatione huius planetae cum tellure ope formulae

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{3(1+\alpha^2)\,b^{(1)} - 6\,\alpha\,b^{(2)}}{(1-\alpha^2)^2} \;(\S.\ 4.),$$

ubi eſt $\alpha = \frac{1}{a'}$, computatur, vi cuiuslibet planetae m' eclipticae motus oritur, quo puncta interſectionis eclipticae cum orbita huius planetae per arcum $\frac{N}{4}.\frac{m'\,\varepsilon^{(1)}}{a'\,a'} = m'\zeta'$ quotannis regrediuntur, denotante N motum annuum ſolis tellurisve: unde reſultat *retroceſſus nodorum* Urani

$$= m'\,\zeta'\,\tfrac{\theta'}{\theta}\,\text{coſ}\,(I - I') = m'\,\psi',$$

atque *decrementum inclinationis* Urani annuum

$$= m'\,\zeta'\,\theta'\,\text{ſin}\,(I - I') = m'\,\eta.$$

§. 10. Actione ipſius Urani in tellurem, utriusque orbitae inclinatio non mutatur, oritur autem inde motus *nodorum retrogradus* $m\,\psi$, qui ope formulae $m'\zeta$ (§. 7.) reperitur, ſi ibi ſubſtituitur $\theta' = 0$, N loco n, m loco m', & $\frac{1}{a}$ loco α, unde fit $m\,\psi = \frac{N}{4}.\frac{m}{a^2}\,\varepsilon^{(1)}$, ubi in computanda formula $\varepsilon^{(1)}$ (§. 4.) ſtatuere oportet $\alpha = \frac{1}{a}$.

§. 11. Eſt itaque motus annuus *nodorum realis* ſuper plano immobili, quocum ecliptica data epocha coincidit, et quidem directus reſpectu fixarum $= m'\zeta$ (§. 7.), incrementum *verum inclinationis* ad idem planum $= m'\xi$ (§. 7.),

mo-

motus autem integer *apparens nodorum* cum plano mobili, quod ecliptica quovis tempore occupat, reſpectu fixarum $= m' \zeta - m' \psi' - m \psi = m' \delta I$ (§. 9. 10.), ac incrementum *apparens inclinationis* cum eodem plano

$$= m' \xi - m' \eta = m' \delta \theta \text{ (§. 9.)}.$$

§. 12. Elementa orbitarum e recentiſſimis tabulis a Cel. *de la Lande* in tertia *Aſtronomiae* ſuae editione vulgatis deprompta ſunt; maſſae tales aſſumtae, quales Cel. *de la Grange* in *Comment. Acad. Scient. Berolin. ad annum* 1782 adhibuit; maſſam denique *Urani* e motus binorum eius ſatellitum, quatenus iam cognito, ſupputavimus. Omnia haec elementa ſequens tabula continet, in qua motus annuus eſt pro $365\frac{1}{4}$ diebus atque reſpectu fixarum, epochae vero ad annum 1800.

Tabula I.

Elementa in calculo adhibita.

	Maſſa	Radius orbis	Motus annuus	Eccentricitas	Inclinatio	Longitudo Aphelii	Longitudo Nodi aſcend.
⛢	$\frac{1}{20600}$	19,18365	15424″,55	0,046683	0°.46′.16″.	11ˢ.17°.20′.49″.	2ˢ.12°.50′.58″.
♄	$\frac{1}{3358,4}$	9,540724	43996″,72	0,0562226	2. 29. 55.	8. 29. 4. 10.	3. 21. 56. 40.
♃	$\frac{1}{1067,195}$	5,202791	109256″,275	0,0480767	1. 19. 2.	6. 11. 8. 21.	3. 8. 24. 7.
♂	$\frac{1}{1846082}$	1,5236927	689051″	0,09308766	1. 51. 0.	5. 2. 24. 14.	1. 18. 1. 58.
♁	$\frac{1}{365361}$	1,000000	1295977″,35	0,0168021	0	9. 9. 29. 3.	— — —
♀	$\frac{1}{278777}$	0,7233324	2106641″,5	0,0068848	3. 23. 35.	10. 8. 36. 12.	2. 14. 52. 8.
☿	$\frac{1}{2025810}$	0,387099	5381016″,25	0,20551333	7. 0. 0.	8. 14. 20. 51.	1. 15. 56. 48.

§. 13.

§. 13. Omnes aequationes, quia maſſae planetae turbantis ſunt proportionales, duplice modo hic exprimuntur, factore nempe m' iuxta tabulam I. determinato, eodemque indeterminato, quo pro alia maſſarum hypotheſi aequationes in eadem ratione mutari poſſint. Calculum quantitatis $m'\zeta' = \frac{N}{4} \cdot \frac{m'\varepsilon^{(1)}}{a'a'}$ (§. 9.) ſequens tabula continet.

Tabula II.
Motus orbitae telluris, oriundus e perturbatione telluris a planetis

	♅	♄	♃	♂	♀	☿
α	0,0521277	0,1048138	0,1922045	0,6563005	1,3824901	2,5833183
β	0,1039730	0,2073498	0,3707139	0,9174342	0,9497476	0,6733060
g	1,0020390	1,0082567	1,0279091	1,3702496	1,4726119	1,1162630
h	0,0522518	0,105825[illegible]	0,1984983	0,9623682	1,1631164	0,4408697
$b^{(0)}$	2,0013614	2,0055269	2,0188651	2,2911358	1,7261410	0,8059330
$b^{(1)}$	0,0521809	0,1052486	0,1949303	0,8045674	0,6816813	0,1591522
$b^{(2)}$	0,0020402	0,0082775	0,0281441	0,4055889	0,3816194	0,0465212
$\varepsilon^{(1)}$	0,1571832	0,3210239	0,6188153	5,7278960	3,3575190	0,0914196
ζ'	138″,383	1142″,65	7406″,72	799352″,6	2079125″	197666″,5
$m'\zeta'$	0″,00672	0″,34024	6″,94036	0″,43300	7″,45803	0″,09757

§. 14. Ex hoc valore quantitatis $m'\zeta'$, ope formulae (§. [illegible].) computatur $m'\psi'$ et $m'\eta$, qui calculus ſequente tabula continetur.

 Tabu-

Tabula III.

Motus orbitae Urani apparens, ex actione planetarum in tellurem oriundus.

	♁	♄	♃	♂	♀	☿
$I - I'$	0	−39°5′42″	−25°33′9″	+24°49′0″	−2°1′10″	+26°54′10″
ψ'	138″,383	2875″,16	11416″,07	1741161″	9153066″	1608095″
$m'\psi'$	0″,00672	0″,85611	10″,69726	0″,94316	32″,83298	0″,79380
η	0	−31″,4430	−73″,4610	+10836″,6	−4343″,87	+10981″,8
$m'\eta$	0	−0″,00936	−0″,06884	+0″,00587	−0″,01558	+0″,00542

§. 15. Motui huic apparenti motus realis iam eſt addendus, cuius calculus iuxta formulas I (§. 7.) inſtitutus ſequente tabula continetur.

Ta-

Tabula IV.

Motus orbitae Urani realis, oriundus ex actione planetarum

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
α	,010712	3,687184	12,59024	19,18365	26,52121	49,55747
β	0,7974326	0,5052556	0,1578542	0,1039730	0,0753043	0,0403408
g	1,1975568	1,0560088	1,0047369	1,0020390	1,0010666	1,0003054
h	0,6167194	0,2891347	0,0798643	0,0522518	0,0377526	0,0201858
$b^{(0)}$	1,066556	0,5528290	0,1591030	0,1043264	0,0754382	0,0403613
$b^{(1)}$	0,2746280	0,0756822	0,0063234	0,0027201	0,0014225	0,0004072
$b^{(2)}$	0,1036682	0,0154435	0,0003768	0,0001064	0,0000402	0,0000062
$\varepsilon^{(0)}$	0,4615955	0,0473431	0,0010165	0,0002850	0,0001076	0,0000164
$\varepsilon^{(1)}$	0,3136340	0,0187350	0,0001208	0,0000223	0,0000061	0,0000005
$I-I'$	−39°5′42″	−25°33′9″	+24°49′0″	— — — —	−2°1′10″	+26°54′10″
$\pi'-\pi$	−73°16′39″	−156°12′28″	−194°56′35″	−67°51′46″	−38°44′37″	−92°59′58″
ξ	−134″,551	−9″,7415	+1″,00114	0	−0″,02174	+0″,26205
ζ	+7413″,76	+531″,67	+87″,0085	−31″,5957	+56″,1079	+38″,6566
$\delta\gamma$	−161″,720	−6″,39736	+0″,175795	−0″,03204	−0″,00383	−0″,08628
$\delta\pi$	+4170″,8	+1293″,012	+87″,9577	+31″,3165	+16″,4018	+4″,8137
$m'\xi$	−0″,04006	−0″,00913	+0″,00000	0	−0″,00000	+0″,00000
$m'\zeta$	+2″,2075	+0″,49819	+0″,00005	−0″,00009	+0″,00020	+0″,00002
$m'\gamma$	−0″,0481	−0″,00599	+0″,00000	−0″,0000	−0″,00000	−0″,00000
$m'\pi$	+1″,2419	+1″,21160	+0″,00005	+0″,00009	+0″,00006	+0″,00000

§. 16.

§. 16. E tabulis IV et III, maſſis planetarum per ſigna ſua ♁, ♄, ♃, etc. expreſſis, tum vero adhibitis valoribus earum ſupra (Tab. I.) traditis, habentur aequationes Urani *ſeculares*, ut ſequitur.

Incrementum annuum *eccentricitatis* =

$m'\delta\gamma$ = — ♄. 161″, 72 — ♃. 6″, 39736 + ♂. 0″, 1758
— ♁. 0″,032 — ♀. 0″,003 — ☿. 0″,086 = — 0″,05414;

ſeu partibus radii, $m'\delta\gamma$ = — 0, 0000002625.

Motus annuus *apſidum* reſpectu fixarum =

$m'\delta\pi$ = + ♄. 4170″, 8 + ♃. 1293″ + ♂. 87″, 96
+ ♁. 31″, 32 + ♀. 16″, 4 + ☿. 4″, 8 = + 2″, 4537;

reſpectu vero punctorum aequinoctialium, $m'\delta\pi$ = + 52″, 7.

Verum incrementum annuum *inclinationis* orbitae ad planum fixum, quocum orbita telluris anno 1800 coincidet, ſeu

$m'\xi$ = — ♄. 134″, 55 — ♃. 9″, 7415 + ♂. 1″ = — 0″, 0492.

Verus motus annuus *nodorum* cum eodem plano immobili, reſpectu fixarum, ſeu

$m'\zeta$ = + ♄. 7413″, 76 + ♃. 531″, 67 + ♂. 87″
— ♁. 31″, 6 + ♀. 56″, 1 + ☿. 33″, 7 = + 2″, 7059.

Apparens incrementum annuum *inclinationis* ad planum eclipticae mobile,

$m'\delta\theta = m'(\xi-\eta)$ (§. 11.) = — ♄. 103″, 11 + ♃. 63″, 72
— ♂. 10836″ + ♀. 4343″, 85 — ☿. 10981″, 5 = + 0″, 0333.

Appa-

Apparens motus annuus *nodorum* cum plano eclipticae mobili, reſpectu fixarum,

$m'\delta I = m'(\zeta - \psi' - \psi)$ (§. 11.) $= -$ ⛢. 138″,38 + ♄. 4538″,6
— ♃. 10884″,4 — ♂. 1741074″ — ♁. 31″,6
— ♀. 9153010″ — ☿. 1608061″ = — 43″,4241;

reſpectu vero punctorum aequinoctialium, $m'\delta I = +6''{,}83$.

§. 17. Aequationes *periodicas* Urani ſenſibiles noniſi a Jove Saturnove effici poſſe, facile patet, cum vel Jupiter unam tantum aequationem conſideratu dignam producat. Quantitates, quae formulas E, F, (§. 7.) componunt, partim iam ſupra expoſitae ſunt, ut a, m' (Tab. I.), et α, $b^{(0)}$, $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, (Tab. IV.). Ceteras tabula ſequens continet.

Tabula V.

Aequationes Urani periodicae ab eccentricitate independentes.

	Actione ♄	Actione ♃		Actione ♄	Actione ♃
ν	0,3505840	0,1411777	$c^{(2)}$	−0,1683624	−0,0128402
μ	0,6494160	0,8588223	$c^{(3)}$	−0,0919698	−0,0038581
$b^{(3)}$	0,0432272	0,0034957	$c^{(4)}$	−0,0496158	−0,0011427
$b^{(4)}$	0,0189006	0,0008297	$e^{(0)}$	0,7672094	0,0896050
$b^{(5)}$	0,0085155	0,0002004	$e^{(1)}$	0,5335547	0,0356932
$c^{(0)}$	−0,6145017	−0,1558276	$e^{(2)}$	0,3748113	0,0143178
$c^{(1)}$	−0,3056143	−0,0422620	$e^{(3)}$	0,2493277	0,0053418

Hinc

Hinc ſi in formulis E, F, (§. 7.) ſubſtituuntur valores $i = + 1$, $i = + 2$, $i = + 3$, $i = + 4$, reperitur vi *Saturni*,

$$E = + 0{,}002365 + 0{,}003547 \text{ coſ } (♄ - ♅) + 0{,}000407 \text{ coſ } 2 (♄ - ♅)$$
$$+ 0{,}000089 \text{ coſ } 3 (♄ - ♅) + 0{,}000026 \text{ coſ } 4 (♄ - ♅),$$

$$F = + 21'',30 \text{ ſin } (♄ - ♅) - 4'',23 \text{ ſin } 2 (♄ - ♅)$$
$$- 0'',86 \text{ ſin } 3 (♄ - ♅) - 0'',24 \text{ ſin } 4 (♄ - ♅);$$

et vi *Jovis*,

$$E = + 0{,}006347 + 0{,}004889 \text{ coſ } (♃ - ♅)$$
$$+ 0{,}000024 \text{ coſ } 2 (♃ - ♅) + 0{,}000003 \text{ coſ } 3 (♃ - ♅);$$
$$F = + 52'',27 \text{ ſin } (♃ - ♅) - 0'',19 \text{ ſin } 2 (♃ - ♅).$$

§. 18. In aequationibus G, H, (§. 7.) ultra valores $i = \pm 1$, $i = \pm 2$, $i = \pm 3$, progredi haud opus eſt, quod tentamine inſtituto edocti fuimus. Quantitates itaque $M^{(i)}$, $D^{(i)}$, $\mathfrak{M}^{(i)}$, $\mathfrak{D}^{(i)}$, pro hisce literae i valoribus, ope formularum (§. 6.) computatae, ſequente tabula continentur.

Tabula

Tabula VI.

Aequationes Urani periodicae ab eccentricitate ſimplice dependentes.

	Actione ♄	Actione ♃		Actione ♄	Actione ♃
$M^{(+1)}$	−0,1599286	−0,1322036	$D^{(-3)}$	−0,5948146	−0,0181874
$M^{(-1)}$	+0,1019296	+0,0683805	$\mathfrak{M}^{(+1)}$	−0,0389625	−0,0012692
$M^{(+2)}$	+0,0398305	+0,0003356	$\mathfrak{M}^{(-1)}$	−0,3237767	−0,0066702
$M^{(-2)}$	+0,2797072	+0,0080929	$\mathfrak{M}^{(+2)}$	+0,3097336	+0,2325451
$M^{(+3)}$	+0,0010428	−0,0002041	$\mathfrak{M}^{(-2)}$	−0,1629483	−0,0026927
$M^{(-3)}$	+0,1784959	+0,0031958	$\mathfrak{M}^{(+3)}$	+0,0386465	+0,0017567
$D^{(+1)}$	−1,2852570	−1,9792480	$\mathfrak{D}^{(+1)}$	−0,2222722	−0,0179794
$D^{(-1)}$	−2,5446125	−1,6054943	$\mathfrak{D}^{(-1)}$	+5,2822907	+0,1249888
$D^{(+2)}$	+0,1065669	+0,0022057	$\mathfrak{D}^{(+2)}$	+1,2492679	+1,8503285
$D^{(-2)}$	−1,5205775	−0,0705158	$\mathfrak{D}^{(-2)}$	+0,8976425	+0,0234941
$D^{(+3)}$	−0,0019440	−0,0010817	$\mathfrak{D}^{(+3)}$	+0,0917003	+0,0090089

Per aequationes III (§. 7.) hinc reperitur vi *Saturni*,

$$
\begin{aligned}
G = & + 0{,}000097 \cos(\text{♄} - \pi) + 0{,}000029 \cos(\text{♄} - \pi') \\
& + 0{,}001617 \cos(2\,\text{♅} - \text{♄} - \pi) - 0{,}006188 \cos(2\,\text{♅} - \text{♄} - \pi') \\
& - 0{,}000008 \cos(2\,\text{♄} - \text{♅} - \pi) - 0{,}000077 \cos(2\,\text{♄} - \text{♅} - \pi') \\
& - 0{,}000192 \cos(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄} - \pi) + 0{,}000135 \cos(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄} - \pi') \\
& - 0{,}000005 \cos(3\,\text{♄} - 2\,\text{♅} - \pi') - 0{,}000039 \cos(4\,\text{♅} - 3\,\text{♄} - \pi),
\end{aligned}
$$

$$H = +1'',41\,\text{ſin}(\text{♄}-\pi) - 0'',22\,\text{ſin}(\text{♄}-\pi') + 44'',24\,\text{ſin}(2\,\text{♅}-\text{♄}-\pi)$$
$$-149'',90\,\text{ſin}(2\,\text{♅}-\text{♄}-\pi) + 0'',22\,\text{ſin}(2\,\text{♄}-\text{♅}-\pi)$$
$$-0'',88\,\text{ſin}(2\,\text{♄}-\text{♅}-\pi') - 2'',46\,\text{ſin}(3\,\text{♅}-2\,\text{♄}-\pi)$$
$$+1'',64\,\text{ſin}(3\,\text{♅}-2\,\text{♄}-\pi') + 0'',03\,\text{ſin}(3\,\text{♄}-2\,\text{♅}-\pi)$$
$$+0'',04\,\text{ſin}(3\,\text{♄}-2\,\text{♅}-\pi') - 0'',43\,\text{ſin}(4\,\text{♅}-3\,\text{♄}-\pi);$$

et actione *Jovis*,

$$G = +0,000226\,\text{coſ}(\text{♃}-\pi) + 0,000002\,\text{coſ}(\text{♃}-\pi'')$$
$$-0,000232\,\text{coſ}(2\,\text{♅}-\text{♃}-\pi) + 0,000023\,\text{coſ}(2\,\text{♅}-\text{♃}-\pi'')$$
$$-0,000117\,\text{coſ}(2\,\text{♃}-\text{♅}-\pi'') - 0,000001\,\text{coſ}(3\,\text{♅}-2\,\text{♃}-\pi)$$
$$+0,000002\,\text{coſ}(3\,\text{♅}-2\,\text{♃}-\pi'') - 0,000001\,\text{coſ}(4\,\text{♅}-3\,\text{♃}-\pi),$$

$$H = +1'',23\,\text{ſin}(\text{♃}-\pi) - 0'',01\,\text{ſin}(\text{♃}-\pi'')$$
$$+3'',65\,\text{ſin}(2\,\text{♅}-\text{♃}-\pi) + 0'',22\,\text{ſin}(2\,\text{♅}-\text{♃}-\pi'')$$
$$+0'',01\,\text{ſin}(2\,\text{♃}-\text{♅}-\pi) - 1'',26\,\text{ſin}(2\,\text{♃}-\text{♅}-\pi'')$$
$$-0'',05\,\text{ſin}(3\,\text{♅}-2\,\text{♃}-\pi) + 0'',02\,\text{ſin}(3\,\text{♅}-2\,\text{♃}-\pi'');$$

ubi π, π', π'', ſunt longitudines Apheliorum Urani, Saturni atque Jovis.

§. 19. Aequationes periodicae modo inventae duplice modo adhiberi poſſunt, tanquam correctiones longitudinis *mediae* aut longitudinis *verae*. Priore caſu longitudo media ope earum correcta, in formando argumento *aequationis centri*, ſcilicet *anomalia media*, eſt adhibenda, atque haec methodus omnino videtur praeferenda. Sin autem anomalia media more ſolito e data epocha Urani eiusque Aphelii et ex utriusque motu medio determinatur, ex quavis aequatione longitudinis Urani, qua eius anomalia mutatur, correctionem *aequationis centri* ſeu *ellipticae* oriri ſequitur.

Quae

Quae vero correctio cum in eccentricitatem Urani ducta ſit, facile patet, maiores duntaxat aequationes eiusmodi effectum ſenſibilem producere valere: unde hic nonniſi aequationis

$$H = + 44'', 24 \,\text{ſin}\,(2♅ - ♄ - \pi) - 149'', 9 \,\text{ſin}\,(2♅ - ♄ - \pi') \quad (\S.\ 18.)$$

et aequationis

$$F = + 52'', 27 \,\text{ſin}\,(♃ - ♅) \quad (\S.\ 17.),$$

ratio habenda eſt.

§. 20. Prioris H binos terminos in unum formae $c \,\text{coſ}\,(2♅ - ♄ + C)$ ſequente modo redigere licet. Poſito

$$2♅ - ♄ = \eta,\ 44'', 24 = a,\ 149'', 9 = b,$$

habemus

$$H = + a \,\text{ſin}\,(\eta - \pi) - b \,\text{ſin}\,(\eta - \pi') = c \,\text{coſ}\,(\eta + C), \text{ h. e.}$$

$$a \,\text{coſ}\,\pi \,\text{ſin}\,\eta - a \,\text{ſin}\,\pi \,\text{coſ}\,\eta - b \,\text{coſ}\,\pi' \,\text{ſin}\,\eta$$
$$+ b \,\text{ſin}\,\pi' \,\text{coſ}\,\eta = c \,\text{coſ}\,C \,\text{coſ}\,\eta - c \,\text{ſin}\,C \,\text{ſin}\,\eta,$$

unde ſequitur

$$c \,\text{ſin}\,C = b \,\text{coſ}\,\pi' - a \,\text{coſ}\,\pi, \text{ et } c \,\text{coſ}\,C = b \,\text{ſin}\,\pi' - a \,\text{ſin}\,\pi,$$

ideoque

$$\text{tang}\,C = \frac{b \,\text{coſ}\,\pi' - a \,\text{coſ}\,\pi}{b \,\text{ſin}\,\pi' - a \,\text{ſin}\,\pi}, \text{ et } c = \frac{b \,\text{coſ}\,\pi' - a \,\text{coſ}\,\pi}{\text{ſin}\,C}.$$

Quare cum ſit $\pi = 360° - 12°\ 39'\ 11''$ et $\pi' = 180° + 89°\ 4'\ 10''$ (Tab. I. §. 12.), reperitur $C = 18°\ 1'$, $c = - 147'', 42$; et

$$H = - 147'', 42 \,\text{coſ}\,(2♅ - ♄ + 18°\ 1').$$

§. 21. Si iam in *aequationis centri* termino primo, puta $v = - 2\gamma \,\text{ſin}\,(♅ - \pi)$, loco ♅ ſubſtituatur ♅ + H, fiet

Mmm 2 $v =$

$$v = -2\gamma\,\text{ſin}(\text{⛢} - \pi) - 2\gamma\,\text{H}\,\text{coſ}(\text{⛢} - \pi),$$

proinde correctio aequationis centri,

$$\delta v = +147'',42.\,\gamma\,[\text{coſ}(\text{⛢} - \text{♄} + \pi + 18^\circ\,1')$$
$$+ \text{coſ}(3\,\text{⛢} - \text{♄} - \pi + 18^\circ\,1')].$$

Quare cum ſit $\gamma = 0{,}046683$ (§. 12.), ideoque $147'',42.\,\gamma = 6'',882 = \varepsilon$, poſito $3\text{⛢} - \text{♄} = \Phi$, $\text{♄} - \text{⛢} = \psi$, reperitur

$$\delta v = \varepsilon\,\text{coſ}(30^\circ\,40' + \Phi) + \varepsilon\,\text{coſ}(5^\circ\,22' - \psi),$$

ſive

$$\delta v = \varepsilon\,\text{coſ}(30^\circ\,40' + \Phi) + \varepsilon\,\text{coſ}\,5^\circ\,22'\,\text{coſ}\,\psi$$
$$+ \varepsilon\,\text{ſin}\,5^\circ\,22'\,\text{ſin}\,\psi, \text{ h. e.}$$

$$\delta v = +6'',88\,\text{coſ}(3\,\text{⛢} - \text{♄} + 30^\circ\,40')$$
$$+ 6'',85\,\text{coſ}(\text{♄} - \text{⛢}) + 0'',65\,\text{ſin}(\text{♄} - \text{⛢}).$$

§. 22. Poſteriores bini termini cum primo aequationis F (§. 17.) termino $= +21'',3\,\text{ſin}(\text{♄} - \text{⛢})$ iuncti dant aequationem

$$F = +21'',95\,\text{ſin}(\text{♄} - \text{⛢}) + 6'',85\,\text{coſ}(\text{♄} - \text{⛢}),$$

cui quoque haec forma tribui poteſt, $F = c\,\text{ſin}(\text{♄} - \text{⛢} + C)$. Hinc enim fit

$$F = c\,\text{coſ}\,C\,\text{ſin}(\text{♄} - \text{⛢}) + c\,\text{ſin}\,C\,\text{coſ}(\text{♄} - \text{⛢}),$$

conſequenter $c\,\text{ſin}\,C = 6'',85$; $c\,\text{coſ}\,C = 21'',95$;

$$\text{tang}\,C = \tfrac{685}{2195} \text{ et } c = \tfrac{6'',85}{\text{ſin}\,C}, \text{ h. e.}$$

$C = 17^\circ\,20'$, $c = +22'',99$; et

$$F = +23''\,\text{ſin}(\text{♄} - \text{⛢} + 17^\circ\,20').$$

§. 23. Similis aequationis centri $v = -2\gamma\,\text{ſin}(\text{⛢} - \pi)$ correctio naſcitur e termino

F =

$$F = +52'', 27 \text{ ſin} (♃ - ♁) \text{ (§. 19.)}.$$

Hinc enim fit

$$\delta v = -2 F \gamma \text{coſ}(♁ - \pi) = -2\gamma . 52'', 27 \text{ coſ}(♁ - \pi) \text{ ſin}(♃ - ♁),$$

ſeu ob $\gamma . 52'', 27 = 2'', 44$,

$$\delta v = -2'', 44 \text{ ſin} (♃ - \pi) - 2'', 44 \text{ ſin} (♃ - 2♁ + \pi),$$

quae terminis aequationis

$$H = +1'', 23 \text{ ſin} (♃ - \pi) + 3'', 63 \text{ ſin} (2♁ - ♃ - \pi)$$

(§. 18.) iuncta praebet

$$H = -1'', 21 \text{ ſin} (♃ - \pi) - 6'', 07 \text{ ſin} (♃ - 2♁ + \pi).$$

§. 24. *Aequatio centri elliptica* eſt

$$v = -(2\gamma - \tfrac{1}{4}\gamma^3) \text{ ſin} (♁ - \pi) + (\tfrac{5}{4}\gamma^2 - \tfrac{11}{24}\gamma^4) \text{ ſin } 2 (♁ - \pi)$$
$$- \tfrac{13}{12}\gamma^3 \text{ ſin } 3 (♁ - \pi) + \tfrac{103}{96}\gamma^4 \text{ ſin } 4 (♁ - \pi).$$

Poſito itaque $\gamma = 0, 046683$ (§. 13.), fit $\gamma = 2^0\, 40'\, 29'', 1$; $\gamma^2 = 7'\, 29'', 5$; $\gamma^3 = 21''$, $\gamma^4 = 1'', 2$; ideoque

$$v = -5^0\, 20'\, 53'' \text{ ſin} (♁ - \pi) + 9'\, 21'', 3 \text{ ſin } 2 (♁ - \pi)$$
$$- 22'', 75 \text{ ſin } 3 (♁ - \pi) + 1'', 3 \text{ ſin } 4 (♁ - \pi).$$

Aequatio *radii vectoris elliptica* eſt

$$r = a(1 + \tfrac{1}{2}\gamma^2) + (\gamma - \tfrac{3}{8}\gamma^3) \text{coſ}(♁ - \pi) - (\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{3}\gamma^4) \text{coſ} (♁ - \pi)$$
$$+ \tfrac{3}{8}\gamma^3 \text{ coſ } 3 (♁ - \pi) - \tfrac{1}{3}\gamma^4 \text{ coſ } 4 (♁ - \pi), \text{ ſive}$$

$$r = a + 0, 020903 + 0, 894818 \text{ coſ} (♁ - \pi)$$
$$- 0, 020873 \text{ coſ } 2 (♁ - \pi) + 0, 000732 \text{ coſ } 3 (♁ - \pi)$$
$$- 0, 000030 \text{ coſ } 4 (♁ - \pi).$$

§. 25. Cunctis aequationibus periodicis in ſummam redactis prodit

Radi-

Radius vector Urani = 19, 213265 (§. 12. 17. 24.)
+ 0, 894818 coſ (♅ − π) − 0, 020873 coſ 2 (♅ − π)
+ 0, 000732 coſ 3 (♅ − π) − 0, 000030 coſ 4 (♅ − π) (§. 24.)
+ 0, 003547 coſ (♄ − ♅) + 0, 000[illegible]07 coſ 2 (♄ − ♅)
+ 0, 000089 coſ 3 (♄ − ♅) + 0, 000026 coſ 4 (♄ − ♅)
+ 0, 004889 coſ (♃ − ♅) + 0, 000024 coſ 2 (♃ − ♅) (§. 17.)
+ 0, 000097 coſ (♄ − π) + 0, 000029 coſ (♄ − π′)
+ 0, 001617 coſ (2 ♅ − ♄ − π) − 0, 006188 coſ (2 ♅ − ♄ − π′)
− 0, 000077 coſ (2 ♄ − ♅ − π′)
− 0, 000192 coſ (3 ♅ − 2 ♄ − π) + 0, 000135 coſ (3 ♅ − 2 ♄ − π′)
− 0, 000039 coſ (4 ♅ − 3 ♄ − π)
+ 0, 000226 coſ (♃ − π)
− 0, 000232 coſ (2 ♅ − ♃ − π) + 0, 000023 coſ (2 ♅ − ♃ − π″)
− 0, 000117 coſ (2 ♃ − ♅ − π″) (§. 18.).

Longitudo vera Urani in orbita = Long. media
− 5° 20′ 53″ ſin (♅ − π) + 9′ 21″, 3 ſin 2 (♅ − π)
− 22″, 75 ſin 3 (♅ − π) + 1″, 3 ſin 4 (♅ − π) (§. 24.)
+ 23″ ſin (♄ − ♅ + 17° 20′) (§. 22.)
− 4″, 23 ſin 2 (♄ − ♅) − 0″, 86 ſin 3 (♄ − ♅)
+ 52″, 27 ſin (♃ − ♅) (§. 17.)
+ 1″, 41 ſin (♄ − π) (§. 18.)
− 147″, 42 coſ (2 ♅ − ♄ + 18° 1′) (§. 20.)
+ 2″, 46 ſin (2 ♄ − 3 ♅ + π) − 1″, 64 ſin (♄ − 3 ♅ + π′) (§. 18.)
− 1″, 21 ſin (♃ − π) − 6″, 07 ſin (♃ − 2 ♅ + π) (§. 23.)

—

— 1″,26 ſin (2 ♃ — ♅ — π″) (§. 18.)
+ 6″,88 coſ (3 ♅ — ♄ + 30° 40′) (§. 21.).

§. 26. Hiſce formulis omnes Urani perturbationes continentur, quatenus altiorum maſſae atque eccentricitatis poteſtatum ratio non habetur. Cum aequationum hucusque evolutarum maxima ad $\frac{1}{2}'$ vix perveniat, veriſimile eſt, aequationes a quadrato eccentricitatis dependentes fore leviſſimas. Veruntamen cum maxima iſta aequatio

= 150″ ſin (♄ — 2 ♅ + π′) (§. 18.)

ab eccentricitate dependens, multo maior ſit omnibus aequationibus F ab eccentricitate independentibus (§. 17.), concludere licet, ex aequationibus a quadrato eccentricitatis dependentibus unam quoque alteramve, factore per integrationem ingreſſo, tantam evadere poſſe, ut negligi hic nequeat. Talis aequatio eſt ea, quae a ſecunda eccentricitatum dimenſione et ab argumento (3 ♅ — ♄) dependet, cuius evolutionem et calculum alia occaſione cum Academia communicabo.

DE

DE PERTVRBATIONE MOTVS URANI.

DISSERTATIO II.

Auctore
F. T. SCHVBERT.

Conv. Acad. exhib. die 3 Octobris 1796.

§. 27.

Haec aequatio a priori eodem modo inveſtigari poteſt, quo Cel. *de la Place* magnam aequationem ſecularem longitudinis Saturni Jovisque invenit, quem in finem analyſis calculi perturbationum ſollertius eſt conſideranda Quando ſcilicet orbitae tanquam circuli tractantur, turbationes nonniſi ab elongatione utriusque planetae heliocentrica, ſeu ab argumento (♄ — ♅), 2 (♄ — ♅), etc. dependent. Simul autem ut eccentricitatis vel aequationis ellipticae ratio habetur, loco longitudinis *mediae* ♄ et ♅, longitudo *elliptica*

$$♄ - 2\,\gamma' \text{ſin}\,(♄ - \pi') + \tfrac{5}{4}\,\gamma'^2 \text{ſin}\,2\,(♄ - \pi') - \text{cet. et}$$

$$♅ - 2\,\gamma\,\text{ſin}\,(♅ - \pi) + \tfrac{5}{4}\,\gamma^2\,\text{ſin}\,2\,(♅ - \pi) - \text{cet.}$$

in calculum ingreditur. Prioris termini argumentum ♄—π′, ♅ — π, cum argumento aequationum circularium generali

i ♄ —

i ♄ — i ♅ iunctum, nonniſi argumenta ſequentis formae producere valet,

$$(i \pm 1)\,♄ - i\,♅ \mp \pi' \text{ et } i\,♄ - (i \mp 1)\,♅ \mp \pi,$$

qui eſt terminus generalis aequationis H (§. 7.). Sin autem eccentricitatis quadratum etiam in calculo adhibetur, ex argumento $2(♄ - \pi')$, $2(♅ - \pi)$, cum argumento $i(♄ - ♅)$ iuncto, termini huius formae oriuntur,

$$(i \pm 2)\,♄ - i\,♅ \mp 2\pi' = K', \text{ et } i\,♄ - (i \mp 2)\,♅ \mp 2\pi = K.$$

§. 28. E calculo perturbationum generali conſtat, aequationes fundamentales differentio — differentiales bis integratas diviſore quadrato affici, qui rationem differentialis ∂K, $\partial K'$, ad differentiale pro conſtanti aſſumtum, quod hic motus medius inſtantaneus $n \partial t$ aut $n' \partial t$ eſt, definit: unde ſequitur, integrale quaeſitum, ſeu aequationem ab argumento K vel K′ dependentem, factore $\frac{n^2}{[(i \pm 2)n' - i n]^2}$ ſeu $\frac{n^2}{[i n' - (i \mp 2)n]^2}$ affectum iri. Quo minor evadit $(i \pm 2)\,n' - i n$ ratione n, tanto maior fiet aequatio, unde ex data relatione motus medii n et n', numerus i eſt determinandus, qui diviſori $(i \pm 2)\,n' - i\,n = \frac{\partial K'}{\partial t}$, vel $in' - (i \mp 2)n = \frac{\partial K}{\partial t}$ valorem tribuit valde exiguum.

§. 29. Cum motus Saturni medius triplus fere ſit motus Urani, ſeu $n' = 3\,n$ (§. 12. Tab. I.), factor $(\frac{n}{3n - n'})^2$, per duplicem integrationem ingreſſus, aequationi ab argumento $3\,♅ - ♄$ dependenti ingentem dabit valorem. Patet autem, $K = i\,♄ - (i - 2)\,♅ - 2\pi$ caſu $i = -1$, et $-K' = i\,♅ - (i - 2)\,♄ - 2\pi'$ caſu $i = +3$, hanc formam induere: unde, cum K, K′, e ſecunda eccentricitatum dimen-

 ſione

ione originem trahant (§. 27.), perſpicimus, ad aequationem quaeſitam, quam litera Æ deſignabimus, perventum iri, ſi in calculo ii tantummodo termini retineantur, qui factores γ^2, γ'^2, $\gamma\gamma'$, $\frac{n^2}{(3n-n')^2}$, et angulum 3 ♁ — ♄ continent.

§. 30. Quia motus annui ſunt $n = 15424'', 55$ et $n' = 43996'', 72$ (§. 12.), argumentum 3 ♁ — ♄ angulo $46273'', 65 - 43996'', 72 = 2276'', 93$ quotannis augetur, ſpatioque 569 annorum incrementum 360 graduum capit, quod itaque tempus aequationis Æ periodus erit. Ingente hacce periodo id efficitur, ut aequatio Æ ſpeciem aequationis *ſecularis* mentiatur, ſiquidem per plurium ſeculorum intervallum, inſtar aequationis ſecularis, continuo creſcere aut decreſcere obſervatoribus videbitur. Perfecte itaque ſimilis eſt magnae Saturni Jovisque aequationi a Cel. *de la Place* detectae, quae a tertia eccentricitatum dimenſione et a periodo 919 annorum dependet.

§. 31. Expreſſio generalis, quam illuſtris ille Geometra in diſſertatione ſupra allegata pro hac aequatione invenit, eſt Æ $= 3\, m' n\, a \int \partial t \int \partial R$,

ubi, poſito radio vectore Urani ſeu planetae turbati $= r$, longitudine vera $= v$, radio vectore Saturni ſeu planetae turbantis $= r'$, longitudine vera $= v'$, latitudine a plano orbitae Urani computata $= \beta'$, eiusque coſinu $= s'$, eſt

$$R = \frac{r s'}{r' r'} \operatorname{coſ}(v' - v) - [r r + r' r' - 2 r r' s' \operatorname{coſ}(v' - v)]^{-\frac{1}{2}}$$

ac differentiale ∂R ita capitur, ut nonniſi elementa planetae turbati, r, v, variabilia ſtatuantur.

§. 32.

§. 32. Ponamus

$$\frac{r s'}{r' r'} \operatorname{coſ}(v'-v) = P, \text{ et } rr + r'r' - 2rr's' \operatorname{coſ}(v'-v) = Q,$$

ut ſit $R = P - Q^{-\frac{1}{2}}$. Cum itaque Æ ſeu $\int \partial t \int \partial R$ formam ſin. coſ. $(3\,\text{♅} - \text{♄})$ habere ſupponatur, evidens eſt, etiam ∂R et R eandem formam involvere debere, ideoque ex quantitatibus P et $Q^{-\frac{1}{2}}$ eos duntaxat terminos hic retinendos eſſe, qui in quadratum eccentricitatis ducti ſunt, habentque hanc formam, ut ſit

$$R = k \operatorname{ſin}(3\,\text{♅} - \text{♄}) - h \operatorname{coſ}(3\,\text{♅} - \text{♄}).$$

Quare cum hic nonniſi ♅ variabilis ſtatuatur (§. 31.), ſitque $\partial\,\text{♅} = n\,\partial t$, $\partial\,\text{♄} = n'\,\partial t$, habetur

$$\partial R = 3n\,\partial t\,[k \operatorname{coſ}(3\,\text{♅} - \text{♄}) + h \operatorname{ſin}(3\,\text{♅} - \text{♄})], \text{ et}$$

$$Æ = 9m'n^2 a \int \partial t \int [k \operatorname{coſ}(3\,\text{♅} - \text{♄}) + h \operatorname{ſin}(3\,\text{♅} - \text{♄})]\,\partial t.$$

§. 33. Quantitates k, h, elementorum utriusque planetae functiones, ob aequationes eorum ſeculares, per 569 annorum ſpatium (§. 30.) pro conſtantibus haberi nequeunt, ſed prima earum differentialia ſaltem in calculum ingredi debent. Quare poſitis $\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)$, conſtantibus,

$$\int \partial t \operatorname{coſ}(3\,\text{♅} - \text{♄}) = x, \int \partial t \operatorname{ſin}(3\,\text{♅} - \text{♄}) = y,$$

$$\int x\,\partial t = X, \int y\,\partial t = Y,$$

e principiis calculi integralis conſtat eſſe

$$\int k\,\partial t \operatorname{coſ}(3\,\text{♅} - \text{♄}) = kx - \int x\,\partial k = kx - \frac{\partial k}{\partial t}\int x\,\partial t,$$

ideoque

$$\int \partial t \int k\,\partial t \operatorname{coſ}(3\,\text{♅} - \text{♄}) = \int kx\,\partial t - \int \partial k \int x\,\partial t =$$

$$kX - 2\int X\,\partial k = kX - \frac{2\,\partial k}{\partial t}\int X\,\partial t:$$

eodemque modo reperitur

$$\int \partial t \int h\, \partial t\, \text{ſin}\,(3\,♁ - ♄) = h\,Y - \tfrac{2\,\partial h}{\partial t} \int Y\, \partial t.$$

Quare cum ſit

$$x = \tfrac{\text{ſin}\,(3\,♁ - ♄)}{3\,n - n'},\ y = - \tfrac{\text{coſ}\,(3\,♁ - ♄)}{3\,n - n'},$$

ideoque

$$X = - \tfrac{\text{coſ}\,(3\,♁ - ♄)}{(3\,n - n')^2},\ Y = - \tfrac{\text{ſin}\,(3\,♁ - ♄)}{(3\,n - n')^2},$$

$$\int X\,\partial t = - \tfrac{\text{ſin}\,(3\,♁ - ♄)}{(3\,n - n')^3},\ \int Y\,\partial t = + \tfrac{\text{coſ}\,(3\,♁ - ♄)}{(3\,n - n')^3},$$

nanciſcimur (§. 32.) aequationem in $\lambda = 206264,8$ (§. 7.) ductam, ſeu minutis ſecundis expreſſam

$$Æ = - \frac{9\,m'\,n^2\,a\,\lambda}{(3\,n - n')^2} \left[\left(h - \frac{2\,(\frac{\partial k}{\partial t})}{3\,n - n'} \right) \text{ſin}\,(3\,♁ - ♄) + \left(k + \frac{2\,(\frac{\partial h}{\partial t})}{3\,n - n'} \right) \text{coſ}\,(3\,♁ - ♄) \right].$$

§. 34. Similis aequatio Saturni Æ′ ſecularis, ſive eiusdem periodi 569 annorum, eiusdemque argumenti $3\,♁ - ♄$, quae ex actione reciproca Urani originem ducit, facili negotio hinc deducitur. Pro hac etenim in formando differentiali ∂R ſeu $\partial R'$ nonniſi ♄ variabilem aſſumere oportet, literasque m, n', a', loco m', n, a, ſubſtituere: unde ſit

$$Æ' = 3\,m\,n'\,a' \int \partial t \int \partial R'\ \text{(§. 31.), et}$$

$$\partial R' = - n'\,\partial t\,[k\,\text{coſ}\,(3\,♁ - ♄) + h\,\text{ſin}\,(3\,♁ - ♄)]\ \text{(§. 32.)}$$

ita ut ſit

$$\partial R' = - \tfrac{n'\,\partial R}{3\,n}\ \text{(§. 32.), et}\ Æ' = - \tfrac{m\,n'\,a'}{m'\,n\,a} \cdot \tfrac{n'}{3\,n} \cdot Æ,$$

ſeu ob $\frac{n'\,n'}{n\,n} = \frac{a^3}{a'^3}$ per tertiam *Kepleri* legem,

$$Æ' = - \tfrac{m\,a\,a}{3\,m'\,a'\,a'}\,Æ.$$

§. 35.

§. 35. Rationes differentiales $(\frac{\partial k}{\partial t})$, $(\frac{\partial h}{\partial t})$, exprimunt *celeritatem*, qua valores k, h, mutantur, cuius loco variationem annuam ponere licet. Quodſi itaque k, h, denotant valores data epocha 1800, k', h', vero valores, quos T annis elapſis induunt, erit

$$\left(\frac{\partial k}{\partial t}\right) = \frac{k' - k}{T}, \quad \frac{(\frac{\partial k}{\partial t})}{3n - n'} = \frac{k' - k}{(3n - n)T},$$

ubi eſt $(3n - n')$T triplus motus Urani medius demto motu Saturni ſpatio T annorum. Quare cum ſit $3n - n' = 2276'', 93$ (§. 30.), poſito T = 100, ſit

$$(3n - n')T = 227693'' = 1,1038568,$$

et ope valorum $m' = \frac{1}{3358,4}$, $n = 15424'',55$, $a = 19,18365$ (§. 12. Tab. I.), reperitur

$$\frac{9m'n^2\lambda}{(3n - n')^2} = 25366'',5, \text{ et } \frac{m a a^{\natural}}{3m' a' a'} = 0,219707;$$

proinde

$$Æ = -25366'',5\left[\left(ah + \frac{ak - ak'}{0,5519434}\right)\text{ſin}(3\,♁ - ♄)\right.$$
$$\left.+\left(ak + \frac{ah' - ah}{0,5519434}\right)\text{coſ}(3\,♁ - ♄)\right] \text{ (§. 33.), et}$$
$$Æ' = -0,219707\,Æ \text{ (§. 34.).}$$

§. 36. Nihil iam reſtat, niſi ut quantitates k, h, ad duas ſeculo ab invicem remotas epochas determinentur. Quem in finem, poſita longitudine nodi aſcendentis orbitae Saturni cum orbita Urani $= \Pi$, inclinatione utriusque orbitae ad invicem $= \nu$, eiusque tangente $= \delta$, longitudine denique Saturni in orbita ſua $= v''$, eademque ad orbitam Urani reducta $= v'$, et longitudine Urani in orbita ſua $= v$, erit (§. 31.),

ſin β'

$\text{ſin}\,\beta' = \text{ſin}\,\nu\,\text{ſin}(v''-\Pi)$, $\text{tang}\,\beta' = \text{tang}\,\nu\,\text{ſin}(v'-\Pi)$, h. e.

$\text{ſin}\,\beta' = \delta\,(1 - \tfrac{1}{2}\delta^2)\,\text{ſin}\,(v''-\Pi)$,

$\text{coſ}\,\beta' = s' = \frac{\text{ſin}\,\beta'}{\text{tang}\,\beta'} = (1-\tfrac{1}{2}\delta^2)\frac{\text{ſin}\,(v''-\Pi)}{\text{ſin}\,(v'-\Pi)} = \surd[1-\delta^2\,\text{ſin}^2(v''-\Pi)]$,

proinde

$$\text{ſin}(v'-\Pi) = (1-\tfrac{1}{2}\delta^2)\,\text{ſin}\,(v''-\Pi)\,[1-\delta^2\,\text{ſin}^2\,(v''-\Pi)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= (1-\tfrac{1}{2}\delta^2)\,\text{ſin}\,(v''-\Pi)\,[1+\tfrac{1}{4}\delta^2-\tfrac{1}{4}\delta^2\,\text{coſ}\,2\,(v''-\Pi)]$$
$$= (1-\tfrac{1}{8}\delta^2)\,\text{ſin}\,(v''-\Pi) - \tfrac{1}{8}\delta^2\,\text{ſin}\,3\,(v''-\Pi),$$

vnde ſequitur

$$v' = v'' - \tfrac{1}{4}\delta^2\,\text{ſin}\,2\,(v''-\Pi).$$

Hinc enim fit

$$\text{ſin}(v'-\Pi) = \text{ſin}(v''-\Pi) - \tfrac{1}{4}\delta^2\,\text{coſ}(v''-\Pi)\,\text{ſin}\,2\,(v''-\Pi)$$
$$= (1-\tfrac{1}{8}\delta^2)\,\text{ſin}\,(v''-\Pi) - \tfrac{1}{8}\delta^2\,\text{ſin}\,3\,(v''-\Pi),$$

uti requiritur.

§. 37. Hoc valore loco v' ſubſtituto, nanciſcimur

$$\text{coſ}(v'-v) = \text{coſ}(v''-v) + \tfrac{\delta^2}{4}\,\text{ſin}\,(v''-v)\,\text{ſin}\,2\,(v''-\Pi) =$$
$$\text{coſ}(v''-v) + \tfrac{\delta^2}{8}\,\text{coſ}(v''+v-2\,\Pi) - \tfrac{\delta^2}{8}\,\text{coſ}(3\,v''-v-2\,\Pi),$$

atque

$$s' = \surd[1-\delta^2\,\text{ſin}^2(v''-\Pi)]\ (\S.\ 36.) = 1 - \tfrac{\delta^2}{4} + \tfrac{\delta^2}{4}\,\text{coſ}\,2\,(v''-\Pi).$$

Hinc poſito

$$r\,r + r'\,r' - 2\,r\,r'\,\text{coſ}\,(v''-v) = p,\ \&$$
$$\tfrac{1}{2}\,r\,r'\,[\text{coſ}\,(v''-v) - \text{coſ}\,(v''+v-2\,\Pi)] = q,\ \text{fit}$$
$$Q = p + q\,\delta^2,\ Q^{-\frac{1}{2}} = p^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\,p^{-\frac{3}{2}}\,q\,\delta^2,\ \text{et}$$
$$R = P - p^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\,p^{-\frac{3}{2}}\,q\,\delta^2\ (\S.\ 32.).$$

In toto nempe hocce calculo ad ſecundam tantummodo dimenſionem quantitatum γ, γ', (§. 29.), ideoque et δ, progredi

gredi oportet, quia inclinationes planetarum eccentricitatibus fere ſunt aequales.

§. 38. Pro evolvendis quantitatibus P, p, habemus valores ellipticos

$$r = a\,[1 + \gamma \operatorname{coſ}(♃ - \pi) - \tfrac{\gamma^2}{2} \operatorname{coſ} 2\,(♃ - \pi)] = a + \Delta r,$$

$$r' = a'\,[1 + \gamma' \operatorname{coſ}(♄ - \pi') - \tfrac{\gamma'^2}{2} \operatorname{coſ} 2\,(♄ - \pi')] = a' + \Delta r',$$

$$v = ♃ - 2\gamma \operatorname{ſin}(♃ - \pi) + \tfrac{5}{4}\gamma^2 \operatorname{ſin} 2\,(♃ - \pi) = ♃ + \Delta v,$$

$$v'' = ♄ - 2\gamma' \operatorname{ſin}(♄ - \pi') + \tfrac{5}{4}\gamma'^2 \operatorname{ſin} 2\,(♄ - \pi') = ♄ + \Delta v''.$$

§. 39. Poſito iam

$$[a\,a + a'\,a' - 2\,a\,a' \operatorname{coſ}(♄ - ♃)]^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{B},$$

et $p^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{B} + \Delta \mathrm{B}$, cum p ex quantitatibus r, r', v, v'', conſtet, per theoriam differentiarum partialium habemus

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{B} = {} & \Delta r \left(\tfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial a}\right) + \Delta r' \left(\tfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial a'}\right) + \Delta v \left(\tfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial ♃}\right) + \Delta v'' \left(\tfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial ♄}\right) \\ & + \tfrac{\Delta r^2}{2} \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial a^2}\right) + \tfrac{\Delta r'^2}{2} \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial a'^2}\right) + \tfrac{\Delta v^2}{2} \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial ♃^2}\right) + \tfrac{\Delta v''^2}{2} \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial ♄^2}\right) \\ & + \Delta r\, \Delta r' \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial a\, \partial a'}\right) + \Delta r\, \Delta v \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial a\, \partial ♃}\right) + \Delta r\, \Delta v'' \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial a\, \partial ♄}\right) \\ & + \Delta r'\, \Delta v \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial a'\, \partial ♃}\right) + \Delta r'\, \Delta v'' \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial a'\, \partial ♄}\right) + \Delta v\, \Delta v'' \left(\tfrac{\partial \partial \mathrm{B}}{\partial ♃\, \partial ♄}\right),\end{aligned}$$

quoniam ultra ſecundam eccentricitatis dimenſionem non proceditur.

§. 40. Cum itaque ſit (§. 3.)

$$\mathrm{B} = \tfrac{a}{a'a'} \operatorname{coſ}(♄ - ♃) - \mathrm{S} = - \mathrm{A}^{(i)} \operatorname{coſ} i\,(♄ - ♃),$$

denotante i numerum quemcunque poſitivum, ſit

$$\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial a}\right) = -\left(\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a}\right) \operatorname{coſ} i\,(♄ - ♃),$$

$\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial a'}\right)$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial a'}\right) = -\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}\right) \text{coſ}\, i\,(\text{♄} - \text{♅}),$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \text{♅}}\right) = -i\,A^{(i)} \text{ſin}\, i\,(\text{♄} - \text{♅}),\ \left(\frac{\partial B}{\partial \text{♄}}\right) = +i\,A^{(i)} \text{ſin}\, i\,(\text{♄} - \text{♅}),$$

$$\left(\frac{\partial\partial B}{\partial \text{♅}^2}\right) = +i^2 A^{i} \text{coſ}\, i\,(\text{♄} - \text{♅}),\ \left(\frac{\partial\partial B}{\partial \text{♄}^2}\right) = +i^2 A^{(i)} \text{coſ}\, i\,(\text{♄} - \text{♅}),$$

$$\left(\frac{\partial\partial B}{\partial \text{♅}\, \partial \text{♄}}\right) = -i^2 A^{(i)} \text{coſ}\, i\,(\text{♄} - \text{♅}), \text{ etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis nanciſcimur

$$\Delta B = \Big[-\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\Delta r - \left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}\right)\Delta r' - \left(\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right)\frac{\Delta r^2}{2} - \left(\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a'^2}\right)\frac{\Delta r'^2}{2}$$

$$+\frac{i^2}{2}A^{(i)}\Delta v^2 + \frac{i^2}{2}A^{(1)}\Delta v''^2 - \left(\frac{\partial\partial A^{(i)}}{\partial a\, \partial a'}\right)\Delta r \Delta r' - i^2 A^{(i)} \Delta v \Delta v''\Big] \text{coſ}\, i\,(\text{♄} - \text{♅})$$

$$+\Big[-i\,A^{(i)}\Delta v + i\,A^{(i)}\Delta v'' - i\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\Delta r\,\Delta v + i\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right)\Delta r\,\Delta v''$$

$$- i\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}\right)\Delta r'\,\Delta v + i\left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}\right)\Delta r\,\Delta v''\Big] \text{ſin}\, i\,(\text{♄} - \text{♅}).$$

§. 41. Erat autem (§. 38.)

$$\Delta r = a\,\gamma\, \text{coſ}\,(\text{♅} - \pi) - \tfrac{a}{2}\gamma^2 \text{coſ}\, 2\,(\text{♅} - \pi),$$

$$\Delta r' = a'\,\gamma'\, \text{coſ}\,(\text{♄} - \pi') - \tfrac{a'}{2}\gamma'^2 \text{coſ}\, 2\,(\text{♄} - \pi'),$$

$$\Delta v = -2\,\gamma\, \text{ſin}\,(\text{♅} - \pi) + \tfrac{5}{4}\gamma^2 \text{ſin}\, 2\,(\text{♅} - \pi),$$

$$\Delta v'' = -2\,\gamma'\, \text{ſin}\,(\text{♄} - \pi') + \tfrac{5}{4}\gamma'^2 \text{ſin}\, 2\,(\text{♄} - \pi'),$$

ideoque

$$\Delta r^2 = \tfrac{a^2}{2}\gamma^2\,[1 + \text{coſ}\, 2\,(\text{♅} - \pi)],$$

$$\Delta r'^2 = \tfrac{a'^2}{2}\gamma'^2\,(1 + \text{coſ}\, 2\,(\text{♄} - \pi')],$$

$$\Delta v^2 = 2\,\gamma^2\,[1 - \text{coſ}\, 2\,(\text{♅} - \pi)],$$

$$\Delta v''^2 = 2\,\gamma'^2\,(1 - \text{coſ}\, 2\,(\text{♄} - \pi')],$$

$$\Delta r \Delta r' = \tfrac{1}{2} a a' \gamma \gamma' [\mathrm{coſ}(♄ - ♁ + \pi - \pi') + \mathrm{coſ}(♄ + ♁ - \pi - \pi')],$$
$$\Delta r \Delta v = - a \gamma^2 \mathrm{ſin}\, 2 (♁ - \pi),$$
$$\Delta r \Delta v'' = - a \gamma \gamma' [\mathrm{ſin}(♄ - ♁ + \pi - \pi') + \mathrm{ſin}(♄ + ♁ - \pi - \pi')],$$
$$\Delta r' \Delta v = a' \gamma \gamma' [\mathrm{ſin}(♄ - ♁ + \pi - \pi') - \mathrm{ſin}(♄ + ♁ - \pi - \pi')],$$
$$\Delta r' \Delta v'' = - a' \gamma'^2 \mathrm{ſin}\, 2 (♄ - \pi'),$$
$$\Delta v \Delta v'' = 2 \gamma \gamma' [\mathrm{coſ}(♄ - ♁ + \pi - \pi') - \mathrm{coſ}(♄ + ♁ - \pi - \pi')]:$$

unde angulo duntaxat $3 ♁ - ♄$ retento, numeriſque i convenienter determinatis, reperitur

$$\Delta B = [-(\tfrac{i^2}{2} + \tfrac{5}{8} i) A^{(i)} + (\tfrac{i}{2} + \tfrac{1}{4}) a \left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) - \tfrac{a^2}{8} \left(\frac{\partial \partial A^{(i)}}{\partial a^2}\right)] \times$$
$$\times \gamma^2 \mathrm{coſ}(3 ♁ - ♄ - 2\pi)$$
$$+ [i^2 A^{(i)} - \tfrac{i}{2} a \left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a}\right) + \tfrac{i}{2} a' \left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}\right) - \tfrac{a a'}{4} \left(\frac{\partial \partial A^{(i)}}{\partial a \partial a'}\right)] \times$$
$$\times \gamma \gamma' \mathrm{coſ}(3 ♁ - ♄ - \pi - \pi')$$
$$+ [(\tfrac{5}{8} i - \tfrac{i^2}{2}) A^{(i)} + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{i}{2}) a' \left(\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}\right) - \tfrac{a'^2}{8} \left(\frac{\partial \partial A^{(i)}}{\partial a'^2}\right)] \times$$
$$\times \gamma'^2 \mathrm{coſ}(3 ♁ - ♄ - 2\pi'),$$

ubi in priore termino eſt $i = 1$, in ſecundo $i = 2$, in tertio $i = 3$.

§. 42. Subſtitutis iam $a A^{(i)} = - \alpha b^{(i)}$ (§. 3.), valoribusque differentialium ſupra (§. 5.) evolutis, reperitur

$$a \Delta B = [\tfrac{9}{8} \alpha b^{(1)} - \tfrac{3}{4} \alpha^2 c^{(1)} + \tfrac{\alpha^3}{8} e^{(1)}] \gamma^2 \mathrm{coſ}(3 ♁ - ♄ - 2\pi)$$
$$+ [-3 \alpha b^{(2)} + \tfrac{3}{2} \alpha^2 c^{(2)} - \tfrac{\alpha^3}{4} e^{(2)}] \gamma \gamma' \mathrm{coſ}(3 ♁ - ♄ - \pi - \pi')$$
$$+ [\tfrac{13}{8} \alpha b^{(3)} - \tfrac{3}{4} \alpha^2 c^{(3)} + \tfrac{\alpha^3}{8} e^{(3)}] \gamma'^2 \mathrm{coſ}(3 ♁ - ♄ - 2\pi').$$

§. 43. In termino ipſius $R = \frac{1}{2} p^{-\frac{3}{2}} q\, \delta^2$ (§. 37.), quia iam in δ^2 ductus eſt, eccentricitas prórſus eſt negligenda: unde fit (§. 37.)

$$q = \frac{a\,a'}{2} \mathrm{coſ}\,(\text{♄} - \text{♅}) - \frac{a\,a'}{2} \mathrm{coſ}\,(\text{♄} + \text{♅} - 2\,\Pi),$$

$$p^{-\frac{3}{2}} = [a\,a + a'\,a' - 2\,a\,a' \mathrm{coſ}\,(\text{♄} - \text{♅})]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= T\ (\text{§. } 4.) = \frac{\varepsilon^{(i)}}{a'^3} \mathrm{coſ}\, i\,(\text{♄} - \text{♅}), \text{ et}$$

$$\frac{a}{2} p^{-\frac{3}{2}} q\, \delta^2 = - \frac{\alpha^2}{8} \delta^2 \varepsilon^{(2)} \mathrm{coſ}\,(3\,\text{♅} - \text{♄} - 2\,\Pi).$$

§. 44. Reperitur denique (§. 32.)

$$P = \frac{a}{a'\,a'} [1 + \gamma \,\mathrm{coſ}\,(\text{♅} - \pi) \quad \frac{\gamma^2}{2} \mathrm{coſ}\, 2\,(\text{♅} - \pi)] \times$$
$$[1 - 2\,\gamma' \mathrm{coſ}\,(\text{♄} - \pi') + \frac{5}{2} \gamma'^2 \mathrm{coſ}\, 2\,(\text{♄} - \pi')] \times$$
$$[1 - \frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4} \mathrm{coſ}\, 2\,(\text{♄} - \Pi)] \times$$
$$[\mathrm{coſ}\,(v'' - v) + \frac{\delta^2}{8} \mathrm{coſ}(\text{♄} + \text{♅} - 2\,\Pi) - \frac{\delta^2}{8} \mathrm{coſ}(3\,\text{♄} - \text{♅} - 2\,\Pi)]$$

(§. 37. 38.),

ſive reiectis terminis, qui formam requiſitam $3\,\text{♅} - \text{♄}$ producere nequeunt,

$$a\,P = \alpha^2 \mathrm{coſ}\,(v'' - v) + \frac{\alpha^2}{2} \gamma \,\mathrm{coſ}\,(v'' - v - \text{♅} + \pi)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2} \gamma \,\mathrm{coſ}\,(v'' - v + \text{♅} - \pi) - \frac{\alpha^2}{4} \gamma^2 \mathrm{coſ}\,(3\,\text{♅} - \text{♄} - 2\,\pi)$$
$$- \alpha^2 \gamma' \mathrm{coſ}\,(v'' - v - \text{♄} + \pi') - \alpha^2 \gamma' \mathrm{coſ}\,(v'' - v + \text{♄} - \pi').$$

Quare cum ſit

$$\mathrm{coſ}(v'' - v) = \mathrm{coſ}(\text{♄} - \text{♅}) - \gamma \,\mathrm{coſ}(2\,\text{♅} - \text{♄} - \pi)$$
$$9\,\tfrac{9}{8} \gamma^2 \mathrm{coſ}(3\,\text{♅} - \text{♄} - 2\,\pi),$$

termini in γ' ducti angulum $3\,\text{♅} - \text{♄}$ producere nequeunt, duorum vero terminorum in γ ductorum ſumma ſit

$= \gamma$

$$= \gamma \cos(v'' - v) \cos(\text{♅} - \pi) = -\gamma^2 \cos(2\,\text{♅} - \text{♄} - \pi) \cos(\text{♅} - \pi)$$
$$= -\tfrac{1}{2} \gamma^2 \cos(3\,\text{♅} - \text{♄} - 2\,\pi):$$

unde reſultat

$$a\,P = \alpha^2 \left(\tfrac{9}{8} \gamma^2 - \tfrac{\gamma^2}{2} - \tfrac{\gamma^2}{4}\right) \cos(3\,\text{♅} - \text{♄} - 2\,\pi)$$
$$= \tfrac{3}{8} \alpha^2 \gamma^2 \cos(3\,\text{♅} - \text{♄} - 2\,\pi).$$

§. 45. Quantitas B (§. 39.) nonniſi angulum $\text{♄} - \text{♅}$ eiusque multipla continet, quare cunctis quantitatibus hucusque evolutis in ſummam collectis, nanciſcimur,

$p^{-\frac{1}{2}} = \Delta B$ (§. 39.), et $a R = a P - a \Delta B + \frac{a}{2} p^{-\frac{3}{2}} q'^2$ (§. 37.), h. e.

$$a R = \left[\tfrac{3}{8}\alpha - \tfrac{9}{8} b^{(1)} + \tfrac{3}{4}\alpha c^{(1)} - \tfrac{\alpha^2}{8} e^{(1)}\right] \alpha \gamma^2 \cos(3\,\text{♅} - \text{♄} - 2\,\pi)$$
$$+ \left[3\, b^{(2)} - \tfrac{3}{2}\alpha c^{(2)} + \tfrac{\alpha^2}{4} e^{(2)}\right] \alpha \gamma \gamma' \cos(3\,\text{♅} - \text{♄} - \pi - \pi')$$
$$+ \left[-\tfrac{13}{8} b^{(3)} + \tfrac{3}{4}\alpha c^{(3)} - \tfrac{\alpha^2}{8} e^{(3)}\right] \alpha \gamma'^2 \cos(3\,\text{♅} - \text{♄} - 2\,\pi')$$
$$- \tfrac{\alpha^2}{8} \mathfrak{J}^2 \varepsilon^{(2)} \cos(3\,\text{♅} - \text{♄} - 2\,\Pi).$$

§. 46. Poſito $3\,\text{♅} - \text{♄} = \Phi$, et

$$a R = K \gamma^2 \cos(\Phi - 2\,\pi) + L \gamma \gamma' \cos(\Phi - \pi - \pi')$$
$$+ M \gamma'^2 \cos(\Phi - 2\,\pi') + N \mathfrak{J}^2 \cos(\Phi - 2\,\Pi),$$

e valoribus α, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, $e^{(i)}$, ſupra (Tab. IV. V.) computatis, nempe $\alpha = 2{,}010712$,

$b^{(1)} = 0{,}274628$, $b^{(2)} = 0{,}1036682$, $b^{(3)} = 0{,}0432272$,
$c^{(1)} = -0{,}3056143$, $c^{(2)} = -0{,}1683624$, $c^{(3)} = -0{,}0919698$,
$e^{(1)} = 0{,}5335547$, $e^{(2)} = 0{,}3748113$, $e^{(3)} = 0{,}2493277$, et

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{5(1 + \alpha^2) b^{(2)} - 10\,\alpha b^{(3)}}{(1 - \alpha^2)^2} \text{ (§. 4.)} = 0{,}188431;$$

reperitur

$$K = -0{,}573976,\quad L = +2{,}408098,$$
$$M = -0{,}6734694,\quad N = -0{,}0952274.$$

§. 47. Expreſſione hacce quantitatis $a\,R$ comparata cum forma aſſumta (§. 32.) $a\,R = a\,k\,\text{ſin}\,\Phi - a\,h\,\text{coſ}\,\Phi$, ſequitur

$$a\,k = K\gamma^2\,\text{ſin}\,2\pi + L\gamma\gamma'\,\text{ſin}(\pi + \pi') + M\gamma'^2\,\text{ſin}\,2\pi' + N\delta^2\,\text{ſin}\,2\Pi, \text{ et}$$
$$a\,h = -K\gamma^2\,\text{coſ}\,2\pi - L\gamma\gamma'\,\text{coſ}(\pi + \pi') - M\gamma'^2\,\text{coſ}\,2\pi' - N\delta^2\,\text{coſ}\,2\Pi.$$

Quare cum ſit

$$\gamma = 0{,}046683,\quad \gamma' = 0{,}0562226,$$
$$2\pi = 360° - 25°\,18'\,22'',\quad \pi + \pi' = 180° + 76°\,24'\,59'',$$
$$2\pi' = 180° - 1°\,51'\,40'',\quad I' - I = 39°\,5'\,42'',$$
$$\theta = 46'\,16'',\quad \theta' = 2°\,29'\,55''\ \text{(Tab. I.), et}$$
$$\text{tang}\,(\Pi - I) = \frac{\theta'\,\text{ſin}\,(I' - I)}{\theta'\,\text{coſ}\,(I' - I) - \theta},$$
$$\text{coſ}\,\nu = \theta\theta'\,\text{coſ}(I' - I) - \text{coſ}\,46'\,16''\,\text{coſ}\,2°\,29'\,55''\ (§.\ 36.),$$

ideoque

$$\Pi - I = 53°\,26'\,30'',\quad \nu = 1°\,57'\,40'',\ \text{ſeu}$$
$$\Pi = 4^s\,6°\,17'\,28'',\quad 2\Pi = 180° + 72°\,34'\,56'',\ \text{et}$$
$$\delta = 0{,}0342412;\ \text{reperitur}$$
$$a\,k = -0{,}005571512,\quad a\,h = +0{,}000454141.$$

§. 48. Valoribus k', h', (§. 35.) determinandis inſerviunt motus ſeculares ſupra (§. 16.) reperti,

$\delta\gamma =$

$\delta\gamma = -0,000026$, $\delta\pi = +1^\circ\, 27'\, 50''$,
$\delta\theta = +3\tfrac{1}{3}''$, $\delta I = +11'\, 23''$,

calculoque ſimili pro Saturno inſtituto invenimus

$\delta\gamma' = -0,000262$, $\delta\pi' = +1^\circ\, 50'\, 37''$,
$\delta\theta' = -23''$, $\delta I' = +48'\, 24''$,

unde fit ad annum 1900,

$\gamma = 0,046657$, $\pi = 11^s\, 18^\circ\, 48'\, 39''$,
$\theta = 46'\, 19\tfrac{1}{3}''$, $I = 2^s\, 13^\circ\, 2'\, 21''$,
$\gamma' = 0,0559606$, $\pi' = 9^s\, 0^\circ\, 54'\, 47''$,
$\theta' = 2^\circ\, 29'\, 32''$, $I' = 3^s\, 22^\circ\, 45'\, 4''$,

ideoque

$2\pi = 360^\circ - 22^\circ\, 22'\, 42''$, $\pi + \pi' = 180^\circ + 79^\circ\, 43'\, 26''$,
$2\pi' = 180^\circ + 1^\circ\, 49'\, 34''$, $I' - I = 39^\circ\, 42'\, 43''$,

unde reperitur (§. 47.)

$\Pi - I = 54^\circ\, 16'\, 12''$, $\nu = 1^\circ\, 57'\, 40''$, ſeu
$\Pi = 4^s\, 7^\circ\, 18'\, 33''$, $2\Pi = 180^\circ + 74^\circ\, 37'\, 6''$, et
$\delta = 0,0342412$: proinde
$ak' = -0,00553602$, $ah' = +0,00013943$.

§. 49. Habetur hinc (§. 35.)

$\frac{ak - ak'}{0,5519434} = -0,0000643037$,
$\frac{ah' - ah}{0,5519434} = -0,0005701871$;

unde fit (§. 35.)

Æ $= -25366'',5 \cdot 0,00038984$ ſin $(3\,♁ - ♄)$
$+ 25366'',5 \cdot 0,0061417$ coſ $(3\,♁ - ♄)$, h. e.

Æ $=$

$$Æ = -9'',89 \,\text{ſin}(3\,♅ - ♄) + 155'',8 \,\text{coſ}(3\,♅ - ♄), \text{ et}$$
$$Æ' = +2'',17 \,\text{ſin}(3\,♅ - ♄) - 34'',23 \,\text{coſ}(3\,♅ - ♄).$$

§. 50. Poſito $Æ = -\alpha \,\text{ſin}\, \Phi + \beta \,\text{coſ}\, \Phi = c \,\text{coſ}(C + \Phi) = c \,\text{coſ}\, C \,\text{coſ}\, \Phi - c \,\text{ſin}\, C \,\text{ſin}\, \Phi$, nanciſcimur

$$c \,\text{ſin}\, C = \alpha, \; c \,\text{coſ}\, C = \beta, \; \text{tang}\, C = \frac{989}{15580}, \; c = \frac{9'',89}{\text{ſin}\, C},$$

ideoque

$$Æ = +156'',11 \,\text{coſ}(3^\circ 37' 55'' + 3\,♅ - ♄), \text{ et}$$
$$Æ' = -34'',3 \,\text{coſ}(3^\circ 37' 55'' + 3\,♅ - ♄).$$

§. 51. Haec aequatio 34 minutorum ſecundorum in theoria Saturni minime eſt negligenda, non ſolum quia per ſe maioribus Saturni aequationibus eſt annumeranda, ſed potiſſimum, quoniam ob longam periodum in determinando Saturni motu medio non nullius eſt momenti. Notatu quoque dignum eſt, omnium Urani aequationum maximam 156'' a ſecunda eccentricitatum dimenſione dependere, unde ſuſpicari licet, idem in ceteris planetis evenire poſſe, ſi inter motus eorum medios ſimilis obtinuerit relatio, ideoque altiores eccentricitatum dignitates in computandis eorum perturbationibus non tuto eſſe negligendas. Eiusmodi relatio locum habet inter duplicem motum Martis ac ſimplicem telluris, inter quintuplum Veneris et duplicem Mercurii (Tab. I.). Prior relatio ad aequationem perduceret ab eccentricitate ſimplice, altera ad aequationem a tertia eccentricitatum dimenſione dependentem, utramque ob longam periodum aequationi motus medii ſeculari non diſſimilem: quapropter in eas alia occaſione inquirere haud inutile erit.

§. 52.

§. 52. Cum aequatione Æ longitudo Urani, ideoque et argumentum aequationis centri, vehementer immutetur, nova exinde orietur correctio, quae methodo ſupra (§. 19.) tradita inveniri poteſt. Cum autem aequationes Æ, Æ′, ingentem periodum 569 annorum habeant, qua argumentum $3°37'55'' + 3♅ - ♄$, ſeu angulus $3♅ - ♄$ incrementum 360 graduum capit (§. 30.), eae tanquam aequationes motus *medii* ſunt conſiderandae, quibus longitudo media correcta ♅ + Æ et ♄ + Æ′ in argumentis aequationis centri et reliquarum aequationum eſt adhibenda.

§. 53. Evaneſcunt Æ, Æ′, caſu $3°37'55'' + 3♅ - ♄ = 90°$ aut $= 270°$, h. e. caſu $3♅ = ♄ + 86°22'$ aut $3♅ = ♄ + 266°22'$; induit autem Æ valorem maximum $= +156''$, Æ′ minimum $= -34''$, caſu $3♅ = ♄ - 3°38'$; Æ minimum $= -156''$, Æ′ maximum $= +34''$, caſu $3♅ = ♄ + 176°22'$. E noviſſimis Urani tabulis reperimus, conditiones haſce ſequentibus epochis locum habere. Æ, Æ′ evaneſcunt annis 1590, 1874, 2158; Æ eſt $= +156''$, Æ′ $= -34''$, annis 1163, 1732, 2301; eſt denique Æ $= -156''$, Æ′ $= +34''$, annis 1447, 2016, etc.

§. 54. Poſito Æ $= \alpha \cos \Phi$, Æ′ $= -\beta \cos \Phi$, fit

$$\partial \text{Æ} = -\alpha \partial \Phi \sin \Phi, \quad \partial \text{Æ}' = +\beta \partial \Phi \sin \Phi,$$

ſeu quoniam eſt quotannis $3\partial ♅ - \partial ♄ = \partial \Phi = 2276'',93 = 0,011039$ (§. 30.),

$$\partial \text{Æ} = -1'',72 \sin \Phi, \quad \partial \text{Æ}' = +0'',38 \sin \Phi.$$

Si iam duo longitudines Urani obſervatae ope aequationis centri correctae, M′, N′, pro mediis M N habeantur, quemadmodum in theoria planetarum ex obſervationibus conſtruenda

enda fieri ſolet, reperitur modus medius apparens $N' - M' = L'$, qui revera eſt $= N - M = L$, ſeu cum ſit, obſervationibus non nimis remotis, $M' - M + Æ$, $N' = N + Æ + \partial Æ$, $L' = L + \partial Æ$. Error itaque $\partial Æ$ in definiendo motu medio commiſſus, iam poſitivus iam negativus eſſe poteſt, unde motus medius modo accelerari modo retardari videbitur.

§. 55. Eſt nempe valor $\partial Æ$ negativus, ſeu motus tardior videtur medio, quamdiu ſin Φ eſt poſitivus, h. e. a $\Phi = 3^\circ 37' 55'' + 3 ♁ - ♄ = 0$ usque ad $\Phi = 180^\circ$, ideoque ab anno 1447 ad annum 1732, et a 2016 inde ad 2301 (§. 53.). Tardiſſimus videtur motus, quando $\partial Æ = -1'',72$ ſeu $\Phi = 90^\circ$, h. e. annis 1305, 1874; velociſſimus annis 1589, 2158. Motus itaque medius accelerari videtur ab anno 1305 ad annum 1589 et a 1874 ad 2158, retardari vero ab anno 1589 ad annum 1874, etc. ideoque noſtro quoque tempore. Motus denique apparens medio eſt aequalis, quando $\partial Æ = 0$, h. e. $\Phi = 0$ et $\Phi = 180^\circ$, conſequenter annis 1163, 1447, 1732, 2016, 2301, etc.

§. 56. Calculi huius utilitas et diligentia optime diiudicari poteſt, ſi cum aliorum circa idem obiectum disquiſitionibus comparatur. Quem in finem Urani perturbationes ab Aſtronomis computatae, quotcunque nobis innotuerunt, ſub uno aſpectu ponere hic iuvabit, ubi iisdem denominationibus utemur, quae in hac Diſſertatione adhibitae ſunt.

Cel. *Gerſtner* (*), aequationibus ſecularibus omiſſis, ſequentem longitudinis aequationem reperit:

$+22''$,

(*) Ephem. Berol. ad Annum 1792. pag. 216.

$$\pm 22'',5 \sin(\text{♄}-\text{♅})+53''\sin(\text{♃}-\text{♅})-430''\sin(2\text{♄}-\text{♅}-\pi')$$
$$+797''\sin(2\text{♃}-\text{♅}-\pi'')-14'',8\sin(3\text{♄}-2\text{♅}-\pi')$$
$$+28''\sin(2\text{♃}-\pi-\pi'')+72''\sin(3\text{♄}-\text{♅}-\pi-\pi')$$
$$+8''\sin(3\text{♄}-2\pi-\pi'),$$

quae a noſtra (§. 17. 18.) enormiter differt.

Cel. *Oriani* (*), aequationibus ſecularibus itidem omiſſis, longitudinis aequationem hanc invenit:

$$+21'',3\sin(\text{♄}-\text{♅})-4'',2\sin 2(\text{♄}-\text{♅})+52'',2\sin(\text{♃}-\text{♅})$$
$$+44'',2\sin(2\text{♅}-\text{♄}-\pi)-149'',7\sin(2\text{♅}-\text{♄}-\pi'),$$

quae cum aequationis noſtrae terminis eiusdem argumenti (§. 17. 18.) exactiſſime convenit. Idem doctiſſimus auctor, ſine calculo, ſolis ex obſervationibus reperit (**) motum aphelii Urani annuum $= +52'',87$ quod cum calculo noſtro (§. 16.) perfecte congruit.

Cel. *du Val le Roi* (***) ex aequationibus periodicis duas tantummodo priores ab eccentricitate independentes

$$+21'',72\sin(\text{♄}-\text{♅})+52'',6\sin(\text{♃}-\text{♅})$$

computavit; aequationes autem ſeculares ſequente modo determinavit:

$$m'\delta\pi = +52'',96;\; m'\delta\gamma = -0'',055;\; m'\xi = -0'',05;$$
$$m'\zeta = +2'',807;\; m'\delta\theta = +0'',03;\; m'\delta I = +7'',28;$$

quod vix ſenſibiliter a noſtro calculo differt (§. 16.).

Mag-

(*) Ephemer. Berol. ad annum 1792. pag. 217.

(**) Ibid. pag. 219.

(***) Ephemer. Berolin. ad A. 1793. pag. 116.

Magnus denique Aſtronomus *de Lambre*, teſte celeberrimo *de la Lande* (*), ſequentes ſupputavit aequationes:

$$E = +0{,}0087132 + 0{,}0035435\ \text{coſ}(\text{♄} - \text{♅}) + 0{,}000407\ \text{coſ}\ 2(\text{♄} - \text{♅}) + 0{,}0000889\ \text{coſ}\ 3(\text{♄} - \text{♅}) + 0{,}0000256\ \text{coſ}\ 4(\text{♄} - \text{♅}) + 0{,}004899\ \text{coſ}(\text{♃} - \text{♅});$$

$$F = +21^{\prime\prime}{,}91\ \text{ſin}(\text{♄} - \text{♅}) + 8^{\prime\prime}{,}4\ \text{coſ}(\text{♄} - \text{♅}) - 4^{\prime\prime}{,}23\ \text{ſin}\ 2(\text{♄} - \text{♅}) - 0^{\prime\prime}{,}86\ \text{ſin}\ 3(\text{♄} - \text{♅}) - 0^{\prime\prime}{,}24\ \text{ſin}\ 4(\text{♄} - \text{♅}) + 52^{\prime\prime}{,}5\ \text{ſin}(\text{♃} - \text{♅}) - 0^{\prime\prime}{,}17\ \text{ſin}\ 2(\text{♃} - \text{♄});$$

$$G = +0{,}001641\ \text{coſ}(2\,\text{♅} - \text{♄} - \pi) - 0{,}00624\ \text{coſ}(2\,\text{♅} - \text{♄} - \pi');$$

$$H = +44^{\prime\prime}{,}19\ \text{ſin}(2\,\text{♅} - \text{♄} - \pi') - 150^{\prime\prime}\ \text{ſin}(2\,\text{♅} - \text{♄} - \pi') - 2^{\prime\prime}{,}66\ \text{ſin}(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄}) - 1^{\prime\prime}{,}54\ \text{coſ}(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄}) + 3^{\prime\prime}{,}7\ \text{ſin}(2\,\text{♄} - \text{♃} - \pi);$$

$$Æ = +133^{\prime\prime}{,}14\ \text{coſ}(3\,\text{♅} - \text{♄}) - 5^{\prime\prime}{,}43\ \text{ſin}(3\,\text{♅} - \text{♄}).$$

Aequationes E, F, cum noſtris (§. 17.) accuratiſſime conveniunt, neque ſenſibile diſcrimen obtinet in aequationibus G, H, (§. 18.) modo notetur, minores quasdam aequationes praeterea a nobis eſſe computatas, terminosque

$$H = -2^{\prime\prime}{,}66\ \text{ſin}(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄}) - 1^{\prime\prime}{,}54\ \text{coſ}(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄}),$$

e noſtris

$$H = -2^{\prime\prime}{,}46\ \text{ſin}(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄} - \pi) + 1^{\prime\prime}{,}64\ \text{ſin}(3\,\text{♅} - 2\,\text{♄} - \pi')$$

(§. 18.) oriri, ſi methodo ſupra (§. 20.) tradita anguli π, π', ceu quantitates conſtantes tractentur.

Ae-

(*) Aſtronomie, Tom. III. §. 3671. ed. 3.

Aequatio Æ a noſtra (§. 49.) parte ſua ſeptima differt: quod diſcrimen ſatis leve quam facile oriri poſſit, ſi vel tantisper immutentur elementa in calculo adhibita, analyſis ſupra evoluta luculenter docet. E periodo 549 annorum, quam aequationi Æ tribuit Cel. *de la Lande*, concludi poſſet, Cel. *de Lambre* loco motus medii n, n', alios valores adhibuiſſe, ſiquidem e noſtris periodus ſequitur 569 annorum (§. 30.), niſi merito ſuſpicaremur, in numerum 549 errorem typographicum irrepſiſſe. Aequatio denique Saturni Æ′ (§. 50.) a nemine animadverſa erat. Ceterum magno nobis honori ducimus, cunctas noſtras aequationes cum calculo tanti Aſtronomi tam exacte convenire; atque eiusmodi conſenſus, ob errores calculi fere inevitabiles, in Aſtronomia non parvi eſt momenti.

OCCVLTATIONES TRIVM STELLARVM FIXARVM A LVNA,

PETROPOLI ANNO 1796 IN SPECVLA DOMESTICA OBSERVATAE.

A

P. INOCHODZOW.

Conv. Acad. exhib. d. 6 Oct. 1796.

De ſitu huius ſpeculae ex obſervationibus anni ſuperioris iam conſtat: anno etiam currente ex 90 altitudinibus Solis meridianis, quas ſingulas hic exponere ſuperfluum duco, reperi latitudinem intra limites 30 circiter ſecundorum mediam $59^{0}. 54'. 54''\frac{2}{3}$.

Quotiescunque tempeſtas coeli obſervationibus aſtronomicis notatu dignis favebat, non praetermiſi occaſionem illas inſtituendi; at clima noſtrum haud raro impedivit conatus curasque vigiles irritas reddidit. Hieme quamvis coelum aliquando ſit ſereniſſimum et totum colluceat ſtellis; aſperum et vix tolerabile frigus plurimum affert incommodi: motus horologiorum in obſervatorio ſit inae-

inaequabilis imo etiam ceſſat, vitra teleſcopiorum halitu oris inquinantur, obſervator ipſe algore vexatur ac concutitur. Aeſtate noctes perbreves et nimium lucidae ſtellas praeſertim minores et Iovis comites videre non ſinunt. Per totum fere triſtem autumnum admodum rari ſunt dies noctesque innubes, ſed plerumque turbidi, ventoſi, pluvioſi et nivoſi. Quod ſi his in regionibus primam originem et ſtabilem ſedem Aſtronomia habuiſſet, eam ad hodiernum perfectionis gradum, etiamſi ſolertiſſimi fuiſſent eius cultores, neutiquam perveniſſe credibile eſt: nam ſeries continuarum et accuratarum obſervationum ſaepiſſime interrupta fuiſſet: ſed ne nimis multa de re certiſſima, redeo illuc, unde abii. Accidit interdum uranophilis, ut accurata obſervatione quadam inſtituta, ſtatus horologii, ad quod momenta ſunt ſignata, ob inclementiam coeli non ſatis exploratus habeatur, et reductiones ad tempora vera ſint aliquantum dubiae; et viciſſim motu penduli bene perſpecto, ipſa obſervatio propter nubes vel aliud obſtaculum, aut plane non ſuccedit, aut ſaltem dubia evadit; quod nobis Europae borealis incolis non raro contingit, ut ex ſequentibus patebit.

Menſibus Ianuario ac Februario horologium in ſpecula propter magnum gelu motu ſuo non ferebatur, et nullas obſervationes facere licuit ad Martium usque.

Primo loco occurrunt occultationes fixarum 1 δ et 2 δ in conſtellatione Tauri die $\frac{3}{14}$ Martii hunc in modum a me obſervatae

Occul-

Occultatio prioris - -	IX^h.	16′.	30$\frac{1}{2}$	T. v.
Emerſio - - - -	X.	7.	46$\frac{1}{2}$	—
Vnde duratio occultationis -	0.	51.	16	—
Occultatio poſterioris -	IX.	39.	59	—
Emerſio - - - -	X.	38.	4	—
Adeoque duratio - - -	0.	58.	5	—

Ingreſſus harum ſtellarum ſub Lunam, cum ad limbum eius obſcurum fierent, bene obſervare potui; egreſſus vero ad marginem lucidum, quamvis diligenter attenderem, non prius conſpexi, quam notabiliter iam a limbo Lunae disceſſiſſent ſtellae; hinc iuſto ſerius notati ſunt, quod etiam partim oculis fatigatis adſcribendum eſſe puto.

Praeterea in determinatione temporis veri dubium paucorum ſecundorum ineſſe poteſt; nam non niſi per interruptos dies, nempe $\frac{4}{15}$ et $\frac{8}{19}$ in ſtatum horologii per altitudines Solis correſpondentes inquirere mihi licuit, quo temporis intervallo ſtatus atmoſphaerae ſenſibiliter mutabatur, unde motum penduli primis poſt longam eius quietem diebus non exacte uniformem fuiſſe ſuſpicor. Hanc ob cauſam obſervatio haec inter ſubdubias cenſenda eſt.

Sequens occultatio eiusdem 1 ♉ Tauri die $\frac{14}{25}$ Auguſti hoc incommodo non laborat, et de illa non habeo quod dubitem, utrumque momentum bene obſervare mihi videbar, ac motus horologii ſatis exploratus erat.

In-

Ingreſſus huius fixae ſub marginem Lunae lucidum paulo infra Grimaldum notatus - - - - - -	XI^{h}.	45′.	33″½	T. V.
Egreſſus ad limbum obſcurum - -	XII.	34.	50	——
Adeoque duratio occultationis -	0.	49.	16½	——

Circa tempus emerſionis fixa 2 δ erat in coniunctione cum Luna biſecta ſeu dichotoma, parum diſtans a margine auſtrali verſus confinium lucis et umbrae. Obſervationes hae factae ſunt teleſcopio Schorti triginta pollicum.

Hoc interim ſpatio temporis obſervavi etiam nonnullas eclipſes ſatellitum Iovis, et ſpero exeunte anno adhuc quasdam me obſervaturum; eas omnes ſimul alia occaſione Illuſtriſſimae Academiae exhibebo.

ECLIP

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS,

PETROPOLI ANNO 1796

IN SPECVLA DOMESTICA OBSERVATAE.

A

P. INOCHODZOW.

Conv. Acad. exhib. d. 27 Febr. 1797.

Die $\frac{16}{27}$ Iunii Immerſio 1^{mi} ſatellitis

$12^h\ 34'\ 31''$	lumen ſatellitis imminutum.
34 53	ſatelles vix videtur.
34 59	immerſus coelo vaporoſo, Iove humili. Faſciae difficulter videbantur.

$\frac{9}{20}$ Iulii Immerſio 1^{mi}.

$12^h\ 39'\ 50''$	lumen debilitatur.
41 25	ſatelles difficulter conſpicitur.
41 40	occultatus. Coelo poſt pluviam non nihil vaporoſo; Luna plena.

$\frac{16}{27}$ Iuli Imm. 1^{mi}

$14^h\ 35'\ 9''$ ſatelles occultari videtur.
35 14 adhuc conſpicitur
35 34 Immerſus diluculo iam intenſo, faſciae pallidae, alt. planetae. 12° 50′

$\frac{20}{31}$ Aug. Imm. 2^{di}

11 31 45 Immergi videtur
32 4 Immerſus; coelo poſt pluviam vaporoſo, et nubeculae circumſtabant; faſciae valde dubie videbantur et ipſe ♃ non bene terminatus. Obſerv. dubia.

$\frac{8}{19}$ Aug. Imm. 1^{mi}

14 50 3 Coelo vaporoſo ♃ pallidus. Luna plena et vicina. Obſerv. dubia.

$\frac{10}{21}$ Aug. Imm. 1^{mi}

11 17 40 ſatelles vix videtur.
18 22 Immerſus prope diſcum Iovis coelo ſereno ſed vaporoſo; alt. planet 10° 56′ 30″ obſerv. ſubdubia.

$\frac{17}{28}$ Aug. Imm. 1^{mi}

11 12 25 lumen ſatell. debilitatur.
14 27 vix videtur prope diſcum Iovis.
14 52 ultima vice ſatell. vidi. Obſerv. dub.

$\frac{2}{13}$ Septembr. Emerſ. 1^{mi}

11 54 46 ſatellitem primum agnoſco.
55 5 bene video. Nubeculae Iovem circumdabant; bona tamen obſervatio videbatur.

15/26 Septembr. Emerſ. 2^{di}

$11^h\ 29'\ 41''$ ſatelles primum apparet
52 certus ſum de emerſione. Iupiter intra nubeculas et per intervalla apparebat et diſparebat obſervatio nihilo minus bona videbatur.

18/29 Septembr. Emerſ. 1^{mi}

$10^h\ 19'\ 12''$ non procul a Iove; obſervatio bona.
21 17 ſatelles clare micat. alt. Iov. $18^\circ\ 59'\ 12''$.

3/14 Octobr. Emerſio 2^{di}

6 5 55 prope alium ſatellitem vix diſcernebatur, Iove humili, crepuſculo intenſo et aëre vaporoſo; faſciae nimis pallidae conſpiciebantur, ipſe planeta non bene terminatus. Obſerv. dubia.

4/15 Octobr. Emerſ. 1^{mi}

8 43 8 Coelo vaporoſo et nubeculis circumſtantibus, quibus Iupiter et ſatellites tegebantur et apparebant, planeta pallidus, faſciae vix videbantur.

17/28 Octobr. Emerſ. 2^{di}

11 19 25 primum ſatell. indicium.
19 32 de emerſione certus ſum. Coelo ſereno, faſciae ob humilem ſitum planetae dubie videbantur; alt. ♃ $8^\circ\ 43'$.

$\frac{11}{22}$ Novembr. Emerſ. 2^{di}

$8^h\ 22'\ 10''$ Coelo ſereno et aëre frigido, faſciae dubie videbantur.

In reductione temporis veri quatuor ultimarum obſervationum adeſt dubium paucorum ſecundorum, quia in motum penduli ob inclementiam coeli exacte inquirere non licuit; ubi vero altitudo planetae poſt obſervationem indicata eſt, ſubtrahenda ſunt $2\frac{3}{4}'$ pro errore quadrantis.

OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE DU SOLEIL,

du 3 Avril 1791, faite à l'Obſervatoire du College académique de Mitau en Courlande;

avec

la Détermination de la Longitude Géographique du dit Obſervatoire, réſultante de différentes obſervations.

Par

M. BEITLER.

Préſenté à l'Académie le 12 Janv. 1797.

Cette Éclipſe du Soleil eſt une de celles, que je me flatte d'avoir très-bien obſervées. Mes horloges furent exactement réglées; le temps vrai, determiné par un grand nombre de hauteurs correſpondantes, me fut connu à moins d'une demi-ſeconde près, & je me ſervis pour cette obſervation d'une très bonne Lunette achromatique de *Dollond*, à triple objectif, de trois pieds et demi, à grande ouverture, & groſſiſſant 80 fois. Ayant d'alleurs, par un ciel ſerein, fixé l'oeil au point du limbe du Soleil, ou ſon diſque dévoit

voit être entamé par la Lune, je fus aſſés heureux pour remarquer la premiere Phaſe du commencement, ſi difficile à bien ſaiſir, à $2^h\ 28'\ 1'',4$. au quel inſtant elle étoit encore doûteuſe & prèsqu'imperceptible. Le ciel m'ayant été également favorable par rapport à l'Obſervation de la fin de l'Éclipſe, je crus, que ſans craindre une erreur de plus de deux ſecondes, je pouvois fixer le moment du contact des bords au commencement à $2^h\ 27'\ 58'',4$ & celui du contact des bords à la fin de l'Eclipſe à $4^h 55'\ 44'',1$ *temps vrai ou apparent de Mitau.*

La difficulté d'acquérir alors les nouvelles Tables lunaires de M. *de Lambre,* que je n'obtins enfin qu'avec beaucoup de peine dans la troiſieme année aprés leur publication, me fit d'abord différer de quelques années le calcul rigoureux de mon obſervation et ſa comparaiſon avec celle de *Paris,* ou *M. de la Lande,* en employant les nouveaux élémens de l'applatiſſement de la terre & de la parallaxe diminuée, avoit trouvé le moment de la Conjontion à $0^h\ 51'\ 22'',0$ dans $0^s\ 13^\circ\ 41'\ 54''$. Me voyant enfin en 1795 en poſſeſſion de ces nouvelles Tables lunaires, je fis auſſi de ma part avec le dernier ſoin le calcul rigoureux du moment de la Conjonction pour le Meridien de *Mitau*, en ſuppoſant le demi-diametre du Soleil corrigé de l'irradiation $= 15'\ 56'',9$, l'infléxion de $2''$, & en employant les Tables ſolaires de *M. de Zach*, qui au reſte conſpirent pour ce jour de l'obſervation avec celles de *M. de Lambre* à une ſeconde près. Je trouvai le dit moment.

par

par l'Obſervation du commencement à	2^h	$16'$	$54''$, 8	
par celle de la fin à - - -	2	16	52, 8	
En prenant le milieu à	2	16	53, 8	t. vr.

en 0^s 13° 41 $54''$, 9, & la latitude obſervée au moment de la Conjonction = $45'$ $6''$, 4.

En comparant ce moment de la Conjonction, trouvé pour le Méridien de *Mitau*, avec celui pour le Méridien de *Paris*, calculé par *M. de la Lande*, je trouvai la différence des Longitudes = 1^h $25'$ $31''$, 8, quantité, qui approche de très-près de celle, que j'avois précédemment déterminée à 1^h $25'$ $32''$, 5 (*Memoires de l'Acad. Royale des Sciences & Belles lettres de Berlin, Année 1786 & 1787. pag. 313*). Mais rencontrant, il y a quelque temps, dans les Éphémerides de *M. Bode* pour 1795 pag. 190 l'obſervation de cette même Eclipſe du Soleil, faite à *Manheim* par Mſrs. *Henry* et *Barry*, qui par leurs calculs trouverent le lieu de la Conjonction de $23''$, 1 plus avancé que *M. de la Lande* par les ſiens, & la Latitude de $20''$, 7 plus petite que celle, que j'avois moi-même déterminée; je crus dévoir vérifier le moment de la Conjonction pour le Méridien de *Paris*, & examiner par moi même ces réſultats differens par rapport à la latitude de la Lune. En conſéquence je fis encore avec la derniere éxactitude & en employant la même méthode dont *M. de la Lande* ſe ſert, le calcul de cette obſervation de *Paris* avec les mêmes élémens & ſur les mêmes tables ſolaires & lunaires, dont je m'étois ſervi pour trouver le moment de la Conjonction au Méridien de *Mitau*. Mon réſultat fut

Lon-

	Par le Commencement. à $0^h\ 33'\ 37'',9$ t. v.	Par la fin. à $3^h\ 17'\ 37'',2$ t. v.
Longitude vraie du Soleil & de la Lune en Conj. - - -	$0^s\ 13^\circ\ 41'\ 54'',9$	$0^s\ 13^\circ\ 41'\ 54'',9$
Temps vrai de la Conj vr. au Merid. de Paris	$0^h\ 51'\ 25'',3$	$0^h\ 51\ 25'',1$
Latitude vraie obſervée de la Lune en Conj. vr.	$45'\ 7'',0$	$45\ 6'',6$
Erreur des tables en longitude, qui ſe trouve en retranchant la longitude obſervée de la longitude calculée -	$+ 30'',6$	$+ 30'',6$
Erreur des tables en latitude, en retranchant la latitude obſervée de la latitude calculée -	$- 9'',4$	$- 9'',2$

La différence des Méridiens des obſervatoires de *Paris* & de *Mitau*, qui réſulte de mes propres calculs, eſt donc de $1^h\ 25'\ 28'',6$ ou plus petite de $3'',2$ que celle que je trouvai ci-deſſus. Puiſque cette petite différence pourroit bien avoir ſa ſource en ce que j'ai peut-être, en me conformant aux préceptes de feu *M. du Sejour*, employé les quantités des Élémens de l'Irradition & de l'Inflexion différentes de celles dont *M. de la Lande* fit uſage; & que d'ail-

d'ailleurs je puis répondre de l'éxactitude rigoureuſe de mes calculs; je crois que je pourrai m'en tenir au réſultat, qui en découle par rapport à la longitude géographique de mon Obſervatoire, en l'inſérant dans le Tableau, que je joindrai ici, pour préſenter l'enſemble de mes différentes recherches à cet égard. Le voici:

I. Par la comparaiſon de mon Obſervation de l'Eclipſe du Soleil du 15 Juin 1787 avec celle de *Marſeille*, M. *de la Lande* trouva la longitude de *Mitau* = 1^h 25′ 29″ orient. (Hiſtoire de l'Acad. des Sciences année 1787. page 206.) en ſuppoſant, comme il me le marqua dans une lettre, la différence des Meridiens entre *Paris* & *Marſeille* = 12′ 7″. Mais ſuivant les réſultats des récherches de trois célébres Aſtronomes, il paroit que cette différence des Meridiens doit être augmentée. En effêt, par les calculs de feu *M. de Wargentin* elle monte à 12′ 11″ (*Ephemer. Mediol.* 1778. p. 196.) par ceux de *M. de Rumovski* à 12′ 12″ *(Acta Acad. Imper. Petrop. 1782. p. 350.)* par ceux de *M. Cagnoli* à 12′ 13″ *Memor. della ſocieta ital. p. 83. & Aſtronom. Jahrb. de M. Bode, 1796. p. 185.)* & enfin par mes propres calculs des obſervations de cette même Eclipſe du Soleil en 1787, faites dans les deux Obſervatoires de *Paris* & de *Marſeille*, elle ſeroit de 12′ 10″, 3. Je prendrai donc entre ces quatre déterminations le milieu, qui eſt = 12′ 11″, 6, & en corrigeant ainſi la longitude de *Marſeille*, les calculs de *M. de la Lande* donneront

la

la Longitude géographique de *Mitau* - - - - - - -	1^h. 25′. 33″, 6

Enſuite mes propres calculs me fourniſſent cette même différence des Meridiens entre les Obſervatoires de *Paris* & de *Mitau*.

II.	Par l'Eclipſe du Soleil du 4 Juin 1788 - - - - - - -	1^h. 25′. 32″, 6
III.	Par l'Eclipſe du Soleil du 3 Avril 1791 - - - - - - - -	1. 25. 28, 6
IV.	Par l'Occultation d'Electra du 13 Dec. 1785. - - - - - -	1. 25. 32, 2
V.	Par l'Occultation de Jupiter du 14 Mars 1788 - - - - - - - -	1. 25. 33, 2
VI.	Par les Eclipſes des Satellites de Jupiter - - - - - - -	1. 25. 32, 0
	Le Milieu eſt =	1. 25. 32, 0

C'eſt à ce milieu que je m'arreterai, jusqu'à ce que de nouvelles obſervations correſpondantes me mettent à même, d'examiner par de nouveaux calculs, ſi la parallaxe diminuée des nouvelles tables, jointe à la ſuppoſition de l'applatiſſement $= \frac{1}{300}$ me donnera la Longitude de *Mitau* moindre que celle, qui réſulte de la ſuppoſition de la parallaxe des Tables plus anciennes, avec l'hypotheſe du rapport des axes comme 229 : 230, tel que je l'avois employé dans tous les calculs des Eclipſes & occultations du

 tableau

tableau précédent, à l'exception de ceux de l'Eclipſe du Soleil obſervée le 3 Avril 1791, qui dans la détermination de la différence des Méridiens, m'ont conduit à un réſultat un peu différent de ceux, qui furent tirés de mes autres Obſervations, calculées dans les hypotheſes des Tables que *M. de la Lande* publia dans la ſeconde Edition de ſon Astronomie. Il me paroit au moins bien plus vraiſemble, que cette différence dans les réſultats a ſa ſource dans la différence des élémens employés, que dans le plus ou moins d'exactitude, ſoit de mes Obſervations, ſoit de mes calculs.

OB-

OBSERVATION
DE
L'OBILIQVITE DE L'ECLIPTIQUE,
DANS LE SOLSTICE D'ÉTÉ 1796,
faite à l'Obſervatoire du College académique de Mitau en Courlande.

Par

M. BEITLER.

Préſenté à l'Académie le 12 Janvier, 1797.

Il eſt aſſez ſurprenant de voir, que dans l'état actuel de l'Aſtronomie pratique, ou il ſemble que l'art a épuiſé toutes ſes reſſources pour donner aux Inſtrumens à diviſions le dernier dégré de perfection, qu'on puiſſe ſouhaiter, les Aſtronomes les plus habiles & les mieux exercés, munis des Inſtrumens les plus excellens, ſont encore ſi peu d'accord, tant par rapport à la quantité actuelle de l'Obliquité de l'Ecliptique, qu'à l'égard de la diminution ſéculaire de cet angle, quantités qui forment des élemens ſi importants dans la ſcience des mouvemens des aſtres. Curieux d'éxaminer par moi même cet objet intéreſſant,

j'employai au ſolſtice d'été paſſé tous mes ſoins les plus ſcrupuleux, pour déterminer la dite obliquité avec la derniere exactitude, dont mon Inſtrument fût ſuſceptible.

Ce fut un Quart-de-cercle mobile de trois pieds de rayon, conſtruit par *Jon. Siſſon*, muni d'un Micrometre extérieur, dont je me ſervis pour faire cette obſervation délicate. J'examinai préalablement avec ſoin ſon erreur de collimation, & je tins compte de l'inégalité des diviſions, que je découvris à la hauteur du Soleil ſolſticial, à l'aide du dit Micrometre extérieur. Enfin par ma maniere d'obſerver je fis diſparoitre les petites incertitudes, rélativement à l'épaiſſeur du fil horizontal, & du demi-diamètre apparent du Soleil, affecté d'une irradiation plus ou moins grande, & dépendante tant de l'état variable de l'Atmoſphere, que de la perfection ou imperfection des Lunettes qu'on employe, & de la conſtitution actuelle de l'oeil de l'Obſervateur. Cette maniere conſiſte en ce que dans les douze ou treize minutes, qui précedent & ſuivent le moment du vrai midi, je prends trois, quatre ou cinq hauteurs du bord inférieur du Soleil, en faiſant d'abord le fil horizontal de ma lunette tangente exterieure au dit limbe; enſuite j'obſerve autant de hauteurs au même bord, mais en faiſant maintenant le fil horizontal tangente interieure; il eſt évident, que le milieu entre ces obſervations réduites au moment du midi vrai, me donne la hauteur méridienne du bord obſervé, indépendament de l'épaiſſeur du fil. Faiſant la même opération au bord ſupérieur du Soleil, j'obtiens un ſecond réſultat également dégagé de cette même correction; enfin le milieu entre ces deux réſultats me fournit la hauteur méridienne du centre du

Soleil,

Soleil, indépendante de la meſure du diametre apparent, de l'irradiation du diſque ſolaire, & de la dite épaiſſeur du fil horizontal. Pour ce qui regarde la ſuppoſition de la Hauteur de l'Equateur à mon Obſervatoire, que jai déterminée à 33°. 20′.53″, 3. elle ne ſauroit être défectueuſe de plus d'une ſeule ſeconde. Il ne reſte donc plus que la pétite incertitude au ſujet de la réfraction, & des petites inégalités dans les diviſions, qui peuvent avoir échappé à mes recherches, mais qui, vu le nombre de mes obſervations, faites en pluſieurs points du limbe de mon Quart-de-cercle, doivent ſe détruire mutuellement en partie. Ayant ainſi, comme je me flatte, obtenu dans mon obſervation toute l'exactitude, à laquelle on peut eſpérer d'atteindre avec mon Inſtrument, en le maniant avec la circonſpection néceſſaire & les précautions requiſes, je la préſente à l'Illuſtre Académie Impériale des Sciences avec d'autant plus de confiance, que les réſultats de mes opérations en trois jours différens étoient auſſi bien d'accord, qu'on pouvoit le ſouhaiter; comme il paroit par la Tableau qui ſuit:

Jour de l'Obſervat. en 1796. n. ſt.	Hauteur méridienne corrigée du Centre du Soleil.	Réduction.	Obliquité vraie ou apparente de l'Ecliptique.	Nombre des Obſervations.	Barometre.	Thermometre de Réaum.
Juin 18.	56°.47′.42″,3	1′.8″,2	23°.27′.57″,2	XIII.	28″2‴	+24° 2
19.	56. 48. 26,6	22,4	23. 27. 55,7	XIII.	28 1	+24,5
21.	56. 48. 43,9	5,3	23. 27. 55,9	XVII.	27 9½	+24,2

Le Milieu = 23. 27. 56,3

Puiſ-

Puisque ſuivent les Tables ſolaires de *M. de Zach* les deux parties de la Nutation, pour réduire l'Obliquité vraie ou apparente à l'Obliquité moyenne, ſont = + 1″,90 — 1″, 96, elles s'entredétruiſent ſenſiblement, & l'Obliquité obſervée de l'Ecliptique eſt en même temps l'Obliquité moyenne. On trouveroit la derniere plus grande de 1″, 9 ou = 23°. 27′. 58″, 2, ſi l'on négligeoit la ſeconde partie de la Nutation, dépendante de la longitude du Périgée de la Lune, qui fut introduite dans le calcul par feu *M. Ximenès*, mais qui n'a point été inſérée dans les Tables ſolaires de *M. de Lambre*. En ſuppoſant maintenant, que l'Obliquité moyenne de l'Ecliptique fut en 1750 de 23°. 28′. 18″, laquelle quantité paroit aſſés bien conſtatée, il s'enſuit de mon Obſervation, que cet angle a diminué de 21″, 7 en 46 ans; d'ou il réſulte pour cent ans une diminution de 47″ dans le ſiècle actuel.

OB-

OBSERVATIONS DES ECLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER,

FAITES EN 1796. À MITAU EN COURLANDE À L'OBSERVATOIRE DU COLLEGE ACADÉMIQUE.

Par

M. BEITLER.

Préſenté à l'Académie le 12 Janvier, 1797.

Pour obſerver ces Eclipſes je me ſers toujours d'une Lunette achromatique de *Dollond*, longue de $3\frac{1}{2}$ pieds, à triple objectif, & a grande ouverture de $3\frac{1}{2}$ pouces, en lui adaptant un tuyau oculaire, qui groſſit les objets céleſtes 80 fois. Je crois cet équipage plus propre pour cette ſorte d'Obſervations, que celui qui groſſit 150 fois; vu qu'en employant le dernier on perd plus rélativement à la clarté qu'on ne gagne par rapport au groſſiſſement. La colonne A du Tableau ſuivant marque le moment de l'Immerſion ou de l'Emerſion du centre du Satellite, calculé ſur les Tables de *M. de Lambre*, en ſuppoſant la Longitude de mon Obſervatoire à $1^h. 25'. 33''.$ à l'orient de celui

de

de Paris. La colonne B indique la différence entre le dit moment calculé, & celui de l'apparition de la premiere étincelle de lumiere d'un ſatellite dans ſon Emerſion, ou de la derniere trace de cette même lumiere dans ſon Immerſion. Enſuite j'ai mis dans la colonne C la meſure en lignes duodécimales du diametre de l'ouverture du diaphragme, qui placé ſur l'objectif quelques minutes avant le commencement de l'Immerſion, ou peu de momens aprés l'Emerſion entiere affoibliſſoit la clarté du Satellite au point, que je ne pouvois plus le diſtinguer qu'avec quelque peine; ou qu'il n'avoit plus que le même foible & prèsqu' imperceptible dégré de lumiere, qu'il me parut avoir aux momens de ſa premiere apparition dans les Emerſions, ou de ſa diſparition entiere dans les Immerſions. Enfin la derniere colonne fait connoitre les différentes circonſtances, qui peuvent influer ſur le jugement qu'on doit porter, par rapport à la qualité de l'obſervation, & ſur le plus ou moins de confiance qu'elle peut mériter. Au reſte j'ai obſervé pluſieurs autres Eclipſes de ces Satellites, en profitant de quelques inſtans favorables, dans les deux derniers mois de l'année. Mais puisque les variations ſubites de l'atmoſphère traverſèrent toutes les opérations, que j'entrepris pendant ces deux mois pour déterminer le temps vrai avec l'éxactitude néceſſaire; j'aime mieux les paſſer tout-a-fait ſous ſilence, que de les produire avec cette circonſtance, qui les rend ſi douteuſes.

Jour

Jo

ſeirconſtances.

ncement, de l'Immerſion du I. Satellite.
avec certitude le I. Satellite.
I. Satellit. Hauteur de ♃ $4^{\circ}\frac{1}{2}$. Les
mais pas bien diſtinctes. L'air pa-

II. Satellite.
clarté. Les bandes confuſes, le bord
idi. Hauteur de ♃ = $6^{\circ}\frac{1}{2}$.

bandes très belles, & le bord de la
oupé. Le ciel très ſerein Obſervation
nne.

ſa clarté. En me préparant a cette
perçus avec grand plaiſir l'ombre du
ſous la forme d'une tache ronde d'un
dans ſon mouvement vers l'Oueſt raſa
le côté auſtral de la bande méridio-
de Jupiter.

te.
s toute ſa lumiere. Le ciel ſerein,
s bien viſibles, mais le diſque de Ju-
bien terminé. Cette obſervation m'a
très bonne.

Oite. Le bord de Jupiter étoit médio-
, & les bandes viſibles mais pas bien
iverture du diaphragme étoit varia-
s vapeurs nageantes dans l'atmoſphère
des nuages. D'ailleurs la proximité
rendit pareillement le moment de
un peu douteux.

Jour de l'Obſerv. en 1796. n. ſt.	Temps vrai aſtronom. de l'Obſervat.	A.	B.	C.	Circonſtances.
Juin 27.	12^{h}. 7$'$. 58$''$, 3 8. 45, 3 8. 51, 3	12^{h}. 9$'$. 3$''$, 3	+ 12$''$, c	13$'''$.	Je ſoupçonne le Commencement, de l'Immerſion du I. Satellite. Je ne diſtingue plus avec certitude le I. Satellite. Immerſion certaine du I. Satellit. Hauteur de ♃ 4°½. Les bandes viſibles, mais pas bien diſtinctes. L'air paroiſſoit très ſerein, mais le bord de ♃ n'étoit pas parfaitement bien arrondi.
Juill. 6.	13. 57. 35, 6 59. 41, 6 59. 44, 6	13. 58. 56, 1	— 48, 5	8.	Premier ſoupçon du commencement de l'Immerſ. du II. Sat. Le Satellite ſemble diſporoitre. Immerſion certaine du II. Satellite. Les bandes diſtinctes, mais le diſque de ♃ pas trop bien coupé. Ciel ſerein. Crépuſcule. Aſſés bonne obſervation.
Juill. 31.	11. 6. 38. 40.	11. 6. 28, 9	— 11, 1	—	Je ne diſtingue plus qu'avec peine une trace évanouiſſante du II. Satellite. Immerſion certaine du II. Satellite. Le ciel, qui quelques minutes au paravant avoit été couvert de nuages, étoit en ce moment aſſés ſerein dans la région de ♃, les bandes très diſtinctes, & le bord de la Planéte très bien arrondi. Bonne obſervation.
Août 6.	11. 53. 39. 50.	11. 51. 31, 2	— 138, 8	8½	Le III. Satellite ne ſe diſtingue plus qu'avec bien de la peine. Immerſion certaine du III. Satellite. Les bandes médiocrement diſtinctes, le bord de ♃ pas tout à fait bien terminé. Peu de minutes après l'obſervation tout le ciel fut couvert de nuages.
Août 12.	12. 27. 28.	12. 27. 29, 2	+ 1, 2	9.	Je n'entrevois plus que d'une maniere douteuſe le I. Satellite: mais 22$''$ après je ſoupçonne d'avoir encore une fois entrevu une trace presqu' imperceptible de ſa Lumiere. Le premier moment me paroit pourtant le plus probable. Le bord de ♃ aſſés bien coupé, & les bandes diſtinctes.
Août 21.	8. 52. 26. 38.	8. 53. 1, 8	+ 23, 8	12.	Le I. Satellite ſemble diſparoitre. Immerſion certaine du I. Satellite. Le ciel ſerein & les bandes bien viſibles. Hauteur de ♃ = 8°½. Obſervation douteuſe, la Planete étant trop près de l'oppoſition.
Sept. 6.	9. 31. 11, 8	9. 30. 25, 5	— 46, 3	13.	Ce n'étoit que dans cet inſtant, que je pouvois m'aſſurer avec certitude de l'Emerſion du I. Satellite. Le ciel fut clair, les bandes médiocrement viſibles, mais le bord de ♃ pas trop bien terminé. La proximité de l'Oppoſition rend cette obſervation pareillement douteuſe.
Sept. 19.	8. 24. 7, 4	8. 25. 6, 1	+ 58, 7	9.	Emerſion du II. Satellite. Les bandes bien diſtinctes & le bord de ♃ bien arrondi. Je juge cette obſervation très bonne.
Sept. 20.	13. 25. 48, 2	13. 25. 25, 7	— 22, 5	—	Emerſion du I Satellite derriere un nuage. Obſervation douteuſe.
Sept. 26.	11. 2. 50, 4 4. 53.	11. 3. 45, 8	+ 55, 4	5½.	Emerſion du II. Satellite. Les bandes viſibles, mais pas bien diſtinctes, & le bord de la Planete médiocrement bien terminé. Vapeurs dans l'atmoſphere. Obſervation aſſés bonne non obſtant ces circonſtances. Le Satellite a toute ſa clarté
Octob. 3.	13. 41. 35, 3 40, 3 42. 57, 3	13. 42. 7, 4	+ 27, 1	14½.	Je ſoupçonne d'avoir entrevu une foible trace de l'Emerſion du II. Satellite. Emerſion certaine du II. Satellite. Le ſatellite a toute ſa clarté. Les bandes confuſes, le bord de ♃ mal arrondi. Hauteur de ♃ = 6°½.
Octob. 6.	11. 50. 3. 51. 10.	11. 50. 6, 2	+ 5, 2	9.	Emerſion du I. Les bandes très belles, & le bord de la Planete bien coupé. Le ciel très ſerein Obſervation parfaitement bonne. Le I. Satellite a toute ſa clarté. En me préparant a cette obſervation j'apperçus avec grand plaiſir l'ombre du III. Satellite, ſous la forme d'une tache ronde d'un noir foncé, qui dans ſon mouvement vers l'Oueſt raſa extérieurement le côté auſtral de la bande méridionale du diſque de Jupiter.
Octob. 8.	6. 19. 28, 1 20. 26, 1	6. 19. 32, 2	+ 4, 1	9½.	Emerſion du I. Satellite. Le I. Satellite a repris toute ſa lumiere. Le ciel ſerein, les bandes aſſés bien viſibles, mais le diſque de Jupiter pas trop bien terminé. Cette obſervation m'a pourtant paru très bonne.
Octob. 21.	8. 16. 0, 4	8 16. 22, 7	+ 22, 3	11 à 15.	Emerſion du II. Satellite. Le bord de Jupiter étoit médiocrement arrondi, & les bandes viſibles mais pas bien diſtinctes L'ouverture du diaphragme étoit variable, à cauſe des vapeurs nageantes dans l'atmoſphère & du voiſinage des nuages. D'ailleurs la proximité du I. Satellite rendit pareillement le moment de cette Emerſion un peu douteux.

Je ſouhaiterois pouvoir auſſi préſenter à l'Illuſtre Académie Impériale des Sciences, des Obſervations d'occultations d'étoiles par la Lune, ſi intéreſſantes pour la Théorie de ce Satellite de la terre, & pour la détermination des Longitudes géographiques. Mais l'inclémence du ciel de l'année paſſée a rendues inutiles à cet égard toutes mes veilles, en me fruſtrant de toutes les peines que je me ſuis données pour obſerver ces occultations. Je n'ai obtenue qu'une ſeule obſervation de cette ſorte, encore a-t-elle été incomplette. C'étoit l'immerſion de l'Etoile 1. δ. *du Taureau* au bord éclairé de la Lune, qui arriva le 25. Août à $11^h. 14'. 48''$, 4. *t. vr. de Mitau*, lequel moment doit être exact à 2″ près. L'émerſion de cette étoile au bord obſcur de la Lune ſe fit derriere un nuage, & ne pouvoit être obſervée.

J'ajouterai encore ici l'obſervation de l'Eclipſe d'*Algol*, que je fis le 2. Nov. 1796. Toutes mes autres obſervations des Eclipſes de cette étoile ont été traverſées par des nuages, ce qui les rendit incomplettes, & peu propres à en tirer quelque réſultat rélativement a la Période du retour de ce Phènomene ſingulier.

Le 2. Nov. 1796. Temps moyen de Mitau.

$6^h. 10'$. Le Ciel couvert de Nuages s'éclaircit dans la région de l'Étoile *Algol*, que j'apperçois ſenſiblement moins lumineuſe que δ, mais plus claire que ϱ *de Perſée*.

30. *Algol* tant ſoit peu plus claire que l'étoile ϱ.

32. Des Nuages couvrent de nouveau tout le ciel.

6^h. 42′. J'apperçois *Algol* à travers d'épaiſſes vapeurs. Sa lumiere eſt prèsqu' imperceptiblement plus claire que celle de la dite étoile ϱ.

58. *Algol* eſt encore moins lumineuſe que δ, mais ſenſiblement plus claire que ϱ de *Perſée*.

7. 15. *Algol* égale prèsqu' en clarté l'étoile δ *de Perſée*.

35. *Algol* auſſi claire que δ de *Perſée*, mais ſa clarté eſt moindre que celle d'*Alamac*.

50. De même.

8. 10. De même.

42. *Algol* prèsqu' auſſi laiſante qu' *Alamac*, & ſurpasſant par la vivacité de ſa lumiere les étoiles γ & δ de *Perſée*.

Je crus pouvoir ſuppoſer le moment de la plus grande phaſe à 6^h. 40′. t. moy. de *Mitau*. L'erreur de cette ſuppoſition ne ſauroit être conſidérable par rapport à une Obſervation, qui par ſa nature n'eſt pas ſuſceptible de beaucoup de préciſion. Les Tables de M. Wurm fixent le dit moment à 5^h. 40′. 45″ t. moy. de *Tubingen*, qui repondent à 6^h. 39′. 14″. t. m. de *Mitau*; ce qui s'accorde exactement avec mon obſervation, & fournit une preuve de l'exactitude de la Période de 2 Jours 20 Heures 48 Min. 59 Sec. qui ſert de fondement aux dites tables.

OC-

OCCULTATION DE ε DU CAPRICORNE,

OBSERVÉE À L'OBSERVATOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST. PÉTERSBOURG LE 7 AOUST 1797.

Par

M. l'Abbé HENRY.

Préſenté à l'Académie le 14 Décembr 1797.

Cette obſervation à été faite par un ciel très pur & très ſerein & qui reſta tel jusques vers onze heures. Mais environ cinq a ſix minutes avant la ſortie de l'Étoile il s'éléva, presque tout a coup, ſur la Neva un brouillard fort épais & de bien mauvaiſe odeur, qui en me cachant entierement la Lune, némpechoit cependant pas de voir ſa lumiere réfléchie ſur la ſurface de l'eau. Peu à peu ce brouillard s'étendit & m'empecha non ſeulement de voir l'émerſion de l'Étoile mais encore d'obſerver le paſſage au méridien de lÉtoile & de la Lune qui devoit arriver peu de tems après ce qui aroit rendu mon obſervation plus complette on me fourniſſant deux moyens différens pour déterminer les différences de longitude & de latitude de la Lune & de l'Étoile.

Voici le réſultat de l'Immerſion ſur le tems de la quelle il n'y a pas un quart de ſeconde d'incertitude. L'aſcenſion droite de l'Etoile a été tirée du catalogue de Mr. de Zach & la déclinaiſon de celui de Mayer, j'en ai conclu. la longitude & la latitude. La longitude de la Lune, ſa latitude, ſon mouvement horaire, ſa parallaxe horiſontale & ſon diamètre horiſontal ont été tirés des Ephémérides de Berlin.

Tems	ſidéral	de l'Immerſion	20^h.	19'.	51'',6
	moyen		11	12	26, 9
	vrai.		11	7	11, 8.

Poſition apparente de ε du Capricorne.

Aſcenſion droite — — —	321°.	26'.	5'', 7
Déclinaiſon auſtrale — —	20	20	37, 2
Obliquité apparente de l'écliptique -	23	28	7, 3
Longitude — — — —	317	23	41, 9
Latitude auſtrale — — —	4	56	17, 2

Poſition du Zenith de Pétersbourg.

Tems moyen en dégrés — —	168°.	6'.	43''5
Longitude moyenne du Soleil —	136	51	9,0
Aſcenſion droite du zenith —	804	57	52,5
Déclinaiſon du zenith — —	59	56	23,0
Angle de la verticale — — —		9	58,6
Délinaiſon corrigée — — —	59	46	24,4
Longitude du zenith — —	353	12	38,5
Latitude du zenith — —	73	6	45,8

Lieu

Lieu vrai de la Lune.

Longitude - - - -	10^s. 17°. 22′. 10″,7.
Latitude auſtrale - - -	4. 13. 41, 0.
Parallaxe horiſontale - -	54. 6, 5.
Diametre horiſontal - - -	29. 29, 9.
Mouvement horaire en longitude	29. 41, 9.
Mouvement horaire en latitude	1. 22, 7.

Lieu apparent de la Lune.

Longitude vraie - - -	10^s. 17°. 22′. 10″,7
Parrallaxe de longitude -	— 9. 15, 3
Longitude apparente - -	10^s. 17°. 12′. 55, 4.
Latitude auſtrale apparente -	5. 6. 21, 7
Demi-diametre apparent inflexion	44. 43, 1

Avec ces Elémens on conclue pour l'inſtant de l'Immerſion de l'Étoile.

Differ. Longitud. appar. dans la région de l'Etoile - - - - -	10′. 43″,8
Differ. longit. appar. ſur. l'Ecliptique - -	10. 46, 2
Parallaxe de longitude - - - -	9. 15, 3
Différence de longitude vraie - - -	1. 30, 9
Diſtance a la conjonction en tems - -	3. 3, 8
Tems moyen de l'Immerſion - -	11^s. 12′. 26″,9
Tems moyen de la conjonction - -	11^h. 15. 30, 7

Lon-

Longitude des deux aſtres en conjonction		317°. 22′. 10″7
Latitude de la Lune en conjonction	-	4. 13. 46, 3
Différence de longitude vraie tirée des tables	- - - - - -	1. 31, 2

Lérreur des tables en longitude n'étoit donc a cette époque que de 0″3 en ſuppoſant la poſition de l'étoile bien déterminée. Or il ne peut y avoir qu'une incertitude de quelques ſecondes ſur la déclinaiſon ce qui influe peu ſur la longitude.

DE-

DETERMINATIO
DIFFERENTIAE MERIDIANORVM
PETROPOLIS, GOTHAE, ET LILIENTHAL EX OCCVLTATIONE A LVNA BINARVM STELLARVM δ TAVRI.

Auctore
STEPH. RVMOVSKI.

Conventui exhibuit die 2 Martii 1797.

Anno 1796 die $\frac{3}{14}$ Martii obſervare mihi licuit occultationes binarum ſtellarum ſibi invicem proximarum δ′ et δ″ Tauri a Luna, et cum eaedem occultationes obſervatae fuerint a Viris Celeberrimis *Zach* et *Schröter* non ingratam rem Aſtronomiae cultoribus facturum me exiſtimavi, ſi ex comparatione harum obſervationum differentiam meridianorum Petropolis, Gothae et Lilienthal deduxero. Inter omnes enim obſervationes, quae pro Longitudine definienda inſtitui poſſunt, nullae ſunt certiores prae occultationibus ſtellarum fixarum a Luna. Vt vero computationi meae maior fides concilieretur e re eſſe iudicavi expoſitis obſervationum momentis ſubiungere Elementa ex Tabulis Maieri elicita, quibus calculus hic ſuperſtructus eſt.

Ob-

Obſervatio Petropoli habita.

Die $\frac{3}{14}$ Mart.	merid. verus ex alt. ☉ correſp.			$23^h. 28'. 22'',8$
$\frac{4}{15}$	- - - - - - -			23. 31. 41,1
Die $\frac{3}{14}$ Mart.	Immerſio	δ′ ♉	8. 46. 10. t. h.	9. 16. 31. t. v.
	Immerſio	δ″	9. 9. 33.	9. 39. 51.
	Emerſio	δ′	9. 39. 14.	10. 6. 28.
	Emerſio	δ″	10. 6. 45.	10. 36. 54.

Vltima obſervatio non aeque certa eſt ac reliquae; nam momento allato ſtellam exiguo iam intervallo a limbo Lunae remotam conſpexi.

Obſervatio Gothae inſtituta.

Immerſio	δ′	$8^h. 1'. 40'',8$. t. m.	$7^h. 52'. 33'',8$ t. v.
——	δ²	8. 39. 0,7	8. 29. 53,7
Emerſio	δ′	9. 6. 5,3	8. 56. 58,3

Obſervatio in Lilienthal habita.

Immerſio	δ′ ♉	$7^h. 41'. 24'',2$ t. v.
——	δ″	8. 16. 28,2
Emerſio	δ′	8. 46. 14,7

Elementa aſtronomica e Tabuli Maieri deducta.

Die $\frac{3}{14}$ Martii 1796.

Tempore medio $8^h. 7'. 50''$ ſive $7^h. 58'. 43''$ vero Grenovicenſi eſt

Longitudo ☉lis media	$11^s. 23°. 9'. 2'',2$
vera	11. 25. 0. 23,1
Motus horarius ☉lis	2. 29,1
Obliquitas Eclipticae	23. 28. 3

Lon-

Longitudo ☽ vera	$2^s. 4^\circ. 48'. 33'',5$
Latitudo ☽ Auſtralis	3. 25. 54,7
Parallaxis ☽ aequatorea	59. 33,9
½ Diameter ☽	16. 11,9
Motus horarius ☽ in Longit.	35. 36,0
- - - - - in Latit.	2. 18,8
Longitudo δ' ♉	2. 4. 1. 7.
Latitudo eiusdem Auſtr.	3. 59. 44,0
Longitudo δ² ♉	2. 4. 16. 37
Latitudo	4. 8. 14,0

Suppoſita Longitudine obſervatorii Petropolitani a Grenovico $2^h. 1'. 16''$, obſervatorii Viri Celeber. Zach $42'. 55''$. et Longitudine Lilienthal $35'. 38''$. prodibit Petropoli

	Longit. ☉ med.	Longit. ☽.	Lat. ☾.
Pro Immerſ. δ' ♉	$11^s. 23^\circ. 7'. 15'',1$	$2^s. 4^\circ. 22'. 46'',1$	$3^\circ. 27'. 35'',3$
δ''	11. 23. 8. 13,0	2. 4. 36. 36,2	3. 26. 41,3
pro Emerſ. δ'	11. 23. 9. 33,0	2. 4. 52. 24,3	3. 25. 39,8
—— δ''	11. 23. 10. 32,0	2. 5. 10. 27,7	3. 24. 31,3

Gothae

Pro Immerſ. δ' ♉	11. 23. 7. 1,0	2. 4. 19. 26,6	3. 27. 48,2
—— δ²	11. 23. 8. 37,8	2. 4. 41. 35,7	3. 26. 21,8
pro Emerſ. δ'	11. 23. 9. 40	2. 4. 57. 39,5	3. 25. 19,3

Lilienthal

Pro Immerſ. δ' ♉	11. 23. 6. 51	2. 4. 17. 8,5	3. 27. 57,1
—— δ''	11. 23. 8. 18	2. 4. 37. 57,0	3. 26. 36,0
Emerſ. δ' ♉	11. 23. 9. 31	2. 4. 55. 37,0	3. 25. 27,2

Porro aſſumta ratione diametri aequatoris ad axem Telluris 230 : 229 reperitur diſtantia Zenith apparentis a Zenith geocentrico pro Petropoli 13′. 1″, pro Gotha 14′. 41″, pro Hilienthal 14′. 24″. ac calculo parallaxium expedito invenitur.

Petropoli	Parall. Long.	Par. Lat.	½ Diam. ☽ appar.
pro Immerſ. δ′ ♉	2193,0	2423,0	978,8
Immerſ. δ²	2244,5	2465,6	978,1
Emerſ.	2282,6	2620,3	977,7
Emerſ. δ″	2297,4	2586,7	976,2
Gothae pro Imm. δ′ ♉	2138″,0	1862″,0	982″,4
— — δ″	2347,4	1912,2	981,1
pro Emerſ. δ′	2471,0	1960,0	980,0
Lilienthal pro Imm. δ′	2002,7	1967,0	982,5
— — δ″	2203,0	2006,0	981,4
pro Emerſ. δ′	2343,6	2033,0	980,4

Vt appareat, qua ratione momenta coniunctionis pro qualibet obſervatione hinc elicuerim, iuvabit ſaltem pro una obſervatione proceſſum calculi hic expoſuiſſe. Hunc in finem eligo Immerſionem δ′ Petropoli obſervatam.

Referat igitur ♈ ♋ Eclipticam, Π polum eius boreum,
Tab. IV. et Π S arcum ex polo Π ad ſtellam S eductum; Arcus sS
Fig. 6. referet Latitudinem ſtellae, cuius Immerſio eſt obſervata.
Cum Longitudo Lunae vera ſuperet Longitudinem ſtellae,
La-

Latitudo vero minor ſit Latitudine Lunae, ſit ☽ locus Lunae verus, atque cum ob parallaxim Longitudo Lunae minuatur, Latitudo vero augeatur, ſit Λ locus eius apparens, erit igitur $s\,S = 3^\circ.\ 59'.\ 44''$. et $m\,\Lambda =$ Latitudini Lunae + parallixi Latitudinis $= 4^\circ.\ 7'.\ 58'',3$, proinde $L\,\Lambda = m\,\Lambda - s\,S = 2'.\ 14'',3$, et reſolvendo triangulum $S\,L\,\Lambda$, in quo $S\,\Lambda = 978'',8$ reperitur $S\,L = 844'',8$ et

$$s\,m = \frac{S\,L}{cof.\,s\,S} = 847'',0,$$

unde diſtantia Lunae a ſtella ſecundum Elipticam $l\,s = l\,m - s\,m = 1346''$, quae in tempus converſa dat $2268'',6 = 37'.\ 48'',6$ et a momento Immerſionis hoc caſu ſubtracta praebet momentum coniunctionis $8^h.\ 38'.\ 41'',4$.

Tempus Coniunctionis hoc modo inventum veritati exacte conſentaneum eſſe nequit, niſi Elementa, quibus illud ſuperſtruitur, rite ſe habeant, cuiusmodi ſunt ſemidiameter Lunae, Latitudo et parallaxis aequatorea. Ut ex variatione eorum colligatur mutatio, quam ſubit expreſſio pro tempore coniunctionis, ſit correctio ſemidiametri Lunae δ, correctio Latitudinis Lunae y et parallaxis aequotoreae π. Deſignet inſuper p parallaxin Longitudinis et p' parallaxin Latitudinis Lunae, erit correctio parallaxis in Longitudinem $\frac{\pi\,p}{p}$, in Latitudinem $\frac{p'\,\pi}{\Pi}$ denotante Π parallaxin Lunae aequatoream. Sit porro $\frac{1}{2}$ Diameter Lunae $= \Delta$, Latitudo ſtellae $= L$, Latitudo Lunae vera $= \lambda$, fiet pro Immerſione Petropoli obſervata

$$L\,\Lambda = \lambda + p' - L \text{ et } S\,L^2 = \Delta\,\Delta - (\lambda + p' - L)^2$$

unde differentiando habebitur

$$S\,L\,\partial\,S\,L = \Delta\,\partial\,\Delta - (\lambda + p' - L)\,\partial\,\lambda - (\lambda + p' - L)\,\partial\,p'.$$

 Hinc

Hinc $\partial . SL = \frac{\Delta \partial \Delta}{SL} - \frac{(\lambda + p' - L)\partial\lambda}{SL} - \frac{(\lambda + p' - L)\partial p'}{SL}$,
iam vero poſito angulo LSΛ = Φ et in locum $\partial\Delta$, $\partial\lambda$ et $\partial p'$ ſubſtitutis ſupra allatis denominationibus fiet incrementum ipſius SL ſive

$$\partial . SL = \delta \text{ ſec. } \Phi - y \text{ tang. } \Phi - \frac{p' \pi \text{ tang. } \Phi}{\Pi},$$

atque

$$\partial . sm = \frac{\partial \text{ ſec. } \Phi}{\text{coſ. } s\,S} - \frac{y \text{ tang. } \Phi}{\text{coſ. } S\,s} - \frac{p' \pi \text{ tang. } \Phi}{\Pi \text{ coſ. } S\,s},$$

proinde tota correctio diſtantiae Lunae a ſtella ſecundum Longitudinem fiet

$$\frac{p\pi}{\Pi} - \frac{\delta \text{ ſec. } \Phi}{\text{coſ. } S\,s} + \frac{y \text{ tang. } \Phi}{\text{coſ. } S\,s} + \frac{p' \pi \text{ tang. } \Phi}{\Pi \text{ coſ. } S\,s},$$

quae in tempus converſa, et a momento coniunctionis in noſtro caſu ſubtracta, dabit momentum coniunctionis involvens variationem ipſorum $\delta . y$ et π. Ad hanc normam calculo peracto et habita ratione ſignorum, quibus membra correctionem continentia afficiuntur, obtinui momentum coniunctionis

Petrop. ex Imm. δ'. ♉		8^h.	$38'$.	$41''$,4	$+ 1,95\,\delta - 0,98\,y - 1,70\,\pi$
ex Emerſ.		8.	38.	15,7	$- 1,93\,\delta + 0,94\,y - 0,43\,\pi$
Hinc	I.			25,7	$+ 3,88\,\delta - 1,92\,y - 1,27\,\pi = 0$
ex Imm. δ''		9.	4.	21	$+ 1,69\,\delta + 0,05\,y - 1,02\,\pi$
ex Emerſ.		9.	4.	51	$- 1,69\,\delta - 0,06\,y - 1,03\,\pi$
	II.			30	$+ 3,38\,\delta + 0,11\,y + 0,01\,\pi = 0$
Gothae ex Imm. δ'. ♉		7.	20.	7,7	$+ 1,69\,\delta + 0,09\,y - 0,96\,\pi$
ex Em.		7.	20.	6,3	$- 1,70\,\delta - 0,18\,y - 1,01\,\pi$
	III.			1,4	$+ 3,39\,\delta + 0,27\,y + 0,05\,\pi = 0$

Lilien-

Lilienthal	ex Im. ☌'. ♉	$7^h. 12'. 46''$	$+1,69\delta - 0,10y - 0,90\pi$
	ex Em.	7. 12. 49	$-1,69\delta - 0,05y - 1,12\pi$
	IV.	— 3	$+3,37\delta - 0,05y + 0,13\pi = 0$

Si perpendamus aequationes modo elicitas apparet ſecundam minime cum reliquis conſiſtere poſſe, non aliter enim illi ſatisfieri poteſt niſi tribuendo enormem ipſi y valorem; expreſſiones vero pro momento coniunctionis ex obſervationibus in Gotha et Lilienthal inſtitutis elicitae ita ſunt comparatae, ut ob exiguos coefficientes ipſi y praefixos ad definiendam correctionem y tuto adhiberi nequeant. Reſtat igitur aequatio 1, ex qua de valore ipſius y aliquid certi ſtatuere licebit. In occultationibus etenim ſtellarum fixarum a Luna correctio ipſius δ ex variis aliorum diſquiſitionibus intra limites -2 et -3 contineri eſt deprehenſa. Poſito igitur $\delta = 2$ et $\pi = 0$ aquatio prima dat $y = 9'',4$, poſito vero $\delta = -2$ et $\pi = -1$ fit $y = 10'',7$ ac denique ſi ponatur $\delta = -2,5$ et $\pi = -2$ oritur $y = 9'',2$; unde concludere licet ſine ſenſibile errore aſſumi poſſe $\delta = -2$, $y = 10$ et $\pi = -1$, ſubſtitutis his valoribus prodibit

		Moment. coniunct.
Petropoli	ex Immerſ. ☌'. ♉	$8^h. 38'. 29''$
	ex Emerſ.	8. 38. 29
Gothae	ex Immerſ. ☌'. ♉	7. 20. 6
	ex Emerſ.	7. 20. 8
Lilienthal	ex Immerſ. ☌'. ♉	7. 12. 43
	ex Emerſ.	7. 12. 53.

Quodſi

Quodſi expreſſionum pro coniunctione inventarum ſumatur medium, prodibit momentum coniunctionis ex occultatione δ' Tauri

Petropoli	$8^h. 38'. 28'',8$	$+ 0{,}01\delta$	$- 0{,}02y - 1{,}06\pi$
Gothae	$7. 20. 7{,}0$		$- 0{,}05y - 0{,}99\pi$
Lilienthal	$7. 12. 47{,}5$		$- 0{,}08y - 1{,}06\pi$.

Vbi cum coefficiens ipſius y ſit admodum exiguus, coefficiens autem ipſius π utrobique ad aequalitatem accedat, ſine praevia eorum cognitione habebitur Longitudo obſervatorii Gothae a meridiano Petropolitano verſus occaſum computata $1^h. 18'. 22''$ et Lilienthal $1^h. 25'. 41''$.

Pro momentis Immerſionum δ'' calculo eodem modo expedito prodibit tempus coniunctionis

Petropoli	$9^h. 4'. 21''$	$+ 1{,}69\delta$	$+ 0{,}05y$	$- 1{,}02\pi$
Gothae	$7. 45. 45$	$+ 2{,}14\delta$	$+ 1{,}31y$	$- 0{,}40\pi$
Lilienthal	$7. 38. 30$	$+ 1{,}95\delta$	$+ 0{,}97y$	$- 0{,}49\pi$

atque pro δ, y et π aſſumtis iisdem valoribus, quos ſupra adhibuimus prodit momentum coniunctionis pro Petropoli $9^h. 4'. 16''$, pro Gotha $7^h. 45'. 54''$, pro Lilienthal $7^h. 38'. 36''$, unde Longitudo Gothae a meridiano Petropolitani ſit $1^h. 18'. 22''$ et Longitudo Lilienthal $1^h. 25'. 40''$.

Ope differentiae meridianorum Grenovicum inter et Petropolim $2^h. 1'. 16''$. momentis coniunctionum ad meridianum Grenovicenſem reductis reperitur Longitudo Lunae

pro

pro tempore coniunctionis δ' ♉ $1^s. 4^\circ. 0'. 12''$ et δ'' ♉ $1^s. 4^\circ. 15'. 30''$, et cum Longitudo prioris praeceſſione, aberratione et nutatione correcta ſit $1^s. 4^\circ. 1'. 7''$, poſterioris vero $1^s. 4^\circ. 16'. 37''$ ex momento coniunctionis priori ſequitur correctio Tabularum Maieri in Longitudinem $+ 55''$, ex poſteriori vero $+ 67''$. Tam exiguo temporis intervallo Tabulis tam diverſam correctionem adſcribere minime probabile eſt, veroſimilius videtur Longitudinem alterutrius ſtellae egere aliqua correctione.

RE-

CONJONCTION
DE SATURNE ET DE LA LUNE,
DÉDUITE DE L'OCCULTATION, DE CETTE PLANETE PAR LA LUNE, OBSERVÉE A LA TOUR ASTRONOMIQUE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT PÉTERSBOURG LE 2 AVRIL 1797.

Par

M. L'Abbé HENRY.

Préſenté à l'Académie le 15 Juin 1797.

Le 2 Avril le ciel fut entierement couvert toute la journée, & en grande partie, toute la nuit; deſorte qu'il y avoit peu d'apparence qu'on put voir l'occultation de Saturne, par la Lune, qui devoit avoir lieu. Cependant comme cela ne dépend que d'un moment, & que de tems-a-autre la Lune ſe montroit pendant quelques inſtans, je ne perdis pas toute espérance, & a tout haſard, je me préparai a l'obſerver. Heureuſement vers les dix heures du ſoir, un petit vent ſud oueſt

oueſt qui regnoit, commencea a chaſſer peu - a - peu les nuages de cette partie vers l'oppoſée, & un quart-d'heure avant l'arrivée du phènomene la Lune parut belle & claire & l'on diſtingua très bien Saturne, quoi qu'il fut déja un peu bas. Enfin, a $12^h. 36'. 59''$, 3 de tems moyen, j'obſervai l'immerſion du centre de Saturne, aſſez exactement, & l'émerſion a $13^h. 21'. 58''$, 8 tems moyen, mais la difficulté qu'il y avoit de bien voir Saturne rend l'obſervation de l'émerſion, beaucoup moins certaine que celle de l'immerſion, & il eſt poſſible qu'il y ait quelques ſecondes a retrancher du tems de cette derniere phaſe, qui n'arriva que neuf a dix minutes avant le coucher de Saturne. Quoi qu'il en ſoit, je l'ai fait concourir comme l'autre a la détermination de l'inſtant de la conjonction des deux aſtres. En voici les élémens & le réſultat.

On avoit à l'inſtant de

	l'Immerſion.	l'Emerſion.
Tems ſidéral - - -	$13^h.24'.17'',8$	$14^h.\ 9'.24'',8$
Tems moyen - - -	12. 36. 59, 3	13. 21. 58, 8
Tems moyen en dégrés -	$6^s.\ 9^\circ.14'.49'',5$	$6^s.20^\circ.29'.42'',0$
Longitude moyenne du Soleil	0. 11. 44. 16, 7	0. 11. 46. 7, 5
Ascenſion droite du méridien	6. 20. 59. 6, 2	7. 2. 15. 49, 5
Longitude vraie de la Lune	2. 22. 15. 18, 1	2. 23. 11. 26, 1
Latit. vraie auſtr. de la Lune	0. 11. 6, 0	0. 13. 23, 8
Mouvem. horaire en longit.	34. 51, 3	34. 51, 7
Mouvem. horaire en latit.	+ 3. 3, 7	+ 3. 3, 8
Parall. horizont. a St. Pétersb.	58. 48, 0	58. 48, 4
Demi - diametre horiſontal	16. 4, 1	16. 4, 3
Longitude vraie de Saturne	2. 22. 32. 59, 6	2. 22. 33. 2, 8
Latit. vraie auſtr. de Saturne	0. 57. 37, 6	0. 57. 37, 2
Mouvem. horaire en longit.	+ 4'', 2 direct.	
Mouvem. horaire en latit.	— 0, 42	
Parallaxe horiſontale - - - -	0, 94	
Demi - diametre horiſontal - - -	9, 41	
Mouvem. relatif en longit.	$34'.47'',1$	$34'.47'',5$
Mouvem. relatif en latit.	3. 4, 1	3. 4, 2

On avoit encore.

Latitude de l'Obſervatoire de St. Pétersbourg	$59^\circ.56'.23'',0$
Angle de la verticale correspondant - -	— 9. 58, 2
Latitude corrigée - - - - - - -	59. 46. 24, 8
Obliquité apparente de l'écliptique - -	23. 28. 6, 7

D'où

D'où l'on tire pour l'inſtant de

	l'Immerſion.	l'Emerſion.
Parallaxe de longit. Lune	0°.28′.51″,9	0°.25′.32″,6
Latitude appar. de la Lune	1. 2. 2, 1	1. 6. 19, 5
Demi-diam. appar. - infl.	16. 2, 6	16. 1, 5
Longit. appar. de la Lune	2^s.22°.16′.26″,2	2^s.22°.45′.54″,5
Mouvem. appar. en longit.	29′. 26″, 2	
Mouvem. appar. en latit.	4. 17, 4	
Inclin. de l'orbite appar.	8°. 17′.16″,8	
Différence de longit. appar.	15′.34″,7	13′.51″,4
Différence de latit. appar.	3. 44, 7	8. 3, 4
Différence de longit. vraie	13. 17, 2	39. 24, 3
Diſtance en tems à la conjonct.	22. 56, 6	1^h. 7′.56″,1
Tems moyen de l'obſervation	12^h.36′.39″,3	13. 21. 58, 5
Tems moyen de la conjonction	12. 14. 2, 7	12. 14. 2, 7
Longit. de Saturne en conjonct.	2^s.22°.32′.58″,2	2^s.22°.32′.58″,2
Latit. de Saturne en conjonct.	57. 37, 7	57. 37, 7
Somme des erreurs des Tables de Saturne & de la Lune		
En longitude - - - -	59″, 8	59″, 9
En latitude - - - -	39″, 8	39″, 9

ESSAIS
SVR LA
DÉTERMINATION DE LA LONGUEUR DU PENDULE SIMPLE SOUS LA LATITUDE DE SAINT PÉTERSBOURG.

Par

M. l'Abbé HENRY.

Préſenté à l'Académie le 14 Décembre, 1797.

Avant d'expoſer le réſultat de ces eſſais je crois devoir dire un mot des précautions que j'ai employées pour en aſſurer le ſuccès. Comme toute la difficulté conſiſte à connoître éxactement la longueur du pendule d'épreuve & le nombre d'oſcillations qu'il fait dans un tems connu, c'eſt principalement vers ces deux objets que j'ai dirigé toute mon attention. Un fil de pite chargé d'un poids ſphérique de cuivre eſt le pendule dont j'ai fait uſage. La pince qui ſoutenoit le pendule d'épreuve étoit fixée à la boëte même de l'horloge, de maniere que ce pendule & celui de l'horologe fuſſent tout-a-côte l'un de l'autre & à-peuprès à la même hauteur; par ce moyen il étoit aiſé de ſaiſir des yeux, en même tems que de l'oreille, l'inſtant de chaque concourt des deux pendules. J'ai jugé apropos, pour plus

plus de ſureté, d'employer ce deux moyens à-la-fois, d'autant plus que le même dégré d'attention ſuffiſoit pour tous les deux que pour chacun en particulier.

Avant d'entreprendre l'expérience, j'avois ſuspendu, le fil chargé de ſon poids, a un mur, & l'avois l'aiſſé dans cet état pendant environ dix jours, croyant qu'alors il auroit pris toute l'extenſion qu'il pouvoit prendre. Mais dès le premier eſſai que je fis je m'apperçus que le pendule d'épreuve étoit ſenſiblement plus long aprés avoir été mis en mouvement, qu'avant; je pris donc le parti de le faire osciller tous les jours pendant pluſieurs heures, jusqu'a ce que je me fuſſe aſſuré par pluſieurs épreuves ſucceſſives qu'il n'y avoit plus aucune différence dans ſa longueur avant & aprés avoir été mu. En même tems j'obſervois, par forme d'éxercice, chaque concourt des deux pendules pour m'habituer à en bien ſaiſir l'inſtant, lorsqu'il s'agiroit de faire l'expérience définitive, car le ſuccès de cette expérience depend beaucoup de l'exactitude à bien ſaiſir cet inſtant, ce qu'on ne ſauroit guères ſa promettre, ſi on ne s'y eſt éxercé auparavant, comme il m'a paru néceſſaire de le faire, un grand nombre de fois.

La longueur du pendule d'épreuve étoit de 35 pouces du pied de France, depuis le point de ſuspenſion jusqu'au bas de la boule. J'ai adopté cette longueur de préference a toute autre, a-cauſe de la facilité que j'avois de la méſurer au moyen d'une verge de fer de pareille longueur. Cette verge eſt arrondie par ſes deux extrémités. Elle ſe place dabord entre la pince qui ſoutient le pendule d'épreuve & une tête de vis très bien polie qui répond perpendicu-

culairement au deſſous du point de ſuſpenſion, elle eſt ſoutenue dans cette poſition par une piece qui, au moyen d'une vis, a un mouvement vertical très doux qui ſert a la hauſſer jusqu'a ce qu'elle touche légèrement la pince. La tête de vis qui répond à l'autre extrémité a un mouvement ſemblable, on la hauſſe jusqu'a ce qu'elle touche l'autre bout de la verge. Après avoir ôté cette verge, on ajuſte le fil de manière que la tête de vis ſoit tangente au globle, ce qu'il eſt aiſé de remarquer à l'aide d'une bonne loupe. On éloigne cette tête devis avant de faire osciller le pendule & aprés on la ramène à la même place, au moyen d'une vis de rappel qui la ſait mouvoir horiſontalement. De cette maniere il eſt aiſé de s'aſſurer ſi, aprés l'obſervation, le pendule a la même longueur, qu'avant. Je n'ai regardées comme bonnes que les expériences après les quelles cela s'eſt conſtantement rencontré. Je ſuis cependant porté à croire, que s'il étoit poſſible de méſurer le pendule en mouvement, on le trouveroit quelque-peu plus long que lorsqu'il eſt en repos. C'eſt pourquoi cette maniere de déterminer la longueur du pendule ſimple ne me paroît pas être la plus ſure qu'on puiſſe employer.

J'ai vérifié avec le plus de ſoin qu'il m'a été poſſible la longueur de la verge de ſer avant d'en faire uſage, j'ai choiſi pour cet effet la température de quatorze degrés au thermomètre de Réaumur, qui eſt celle à la quelle cette verge a été étalonnée. C'eſt auſſi à cette même température qu'ont été faites les obſervations auxquelles je me ſuis fixé. Je n'ai pas employé moins d'attention à déterminer le diamètre de la boule, celui du fil, ainſi que le poids de l'un & de l'autre. Enfin longtems avant ces expériences,

lors

lors de ces expériences & aprés, j'ai eu ſoin de vérifier la marche de l'horloge qui y a ſervi, au moyen de la culmination de pluſieurs belles étoiles, de premiere & ſeconde grandeur, obſervées à la lunette des paſſages. Elle étoit reglée ſur le tems ſidéral & avanceoit régulièrement toutes les vingt quatre heures ſidérales de 2″,5 ; il n'y a pas la moindre incertitude ſur ce point.

Voici maintenant le réſultat de ces expériences.

Réſul-

Réſultat
des Obſervations faites à l'Obſervatoire Impérial de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, relativement à la détermination de la longueur du Pendule ſimple ſous la Latitude de 59. 56′. 23″.

Dimenſion du Pendule d'épreuve.

Ce pendule conſiſtoit en un petit globe de cuivre ſuspendu à un fil de pite, de maniere que la diſtance du point de ſuspenſion, au point le plus bas de la ſurface du globe, étoit de 2 pieds onze pouces de France ou de 420 lignes.

Le Diamètre du globe étoit de - - 12, 133 lignes.
Son poids étoit de - - - - 1643 grains.
Le diamètre moyen du fil de pite étoit de 0, 164 ligne.
Le poids de 10 toiſes de ce fil étoit de 10, 655 grains.
Le poids de 35 pouces du même fil étoit 0, 526 grain.

Nommant donc

D. le demi-diamètre du globe.
d. le demi-diamètre du fil de pite.
P. le poids du globe.
p. le poids du fil de pite.
l. la diſtance du point de ſuspenſion au globe.
L. la diſtance du point de ſuspenſion au centre d'oscillation, ou la longueur du pendule d'épreuve.

On aura

$D = 6,0666$ - - - - - - - $d = 0,082$,
$P = 1643$ - - - - - - - - $p = 0,526$,
$l = 407,867$.

Sub-

Subſtituant ces valeurs dans la formule,

$$L = \frac{P[\frac{7}{5}D + 2Dl + l^2] + p[\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{4}d^2]}{P[D + l] + \frac{1}{2}pl}.$$

On trouve, L = 413, 9467 lignes.

La diſtance du point de ſuspenſion au centre du globe étant de 413, 933 lignes, il s'enſuit que le centre d'oscillation du pendule, étoit au deſſus du centre du globe, de la quantité, 0, 014 ligne. Ayant placé ce Pendule d'épreuve à côté de celui d'une horloge reglée ſur le tems ſidéral. J'ai obſervé en Septembre 1797.

	Le 27.	Le 28.
La chute commune des deux pendules dans le même ſans a	$10^h. 33'. 36''$ 11. 48. 36	$16^h. 57'. 8''$ 18. 12. 8
Interval - - - - -	1. 15. 0	1. 15. 0

L'horloge avanceoit régulièrement, de 2'', 5 en 24 heures ſidérales, elle avanceoit donc de 0'', 104 dans l'interval de $1\frac{1}{4}$ heure. D'ailleurs pour réduire cet interval en tems moyen, il faut y appliquer cette réduction — 12'', 287. On a donc, pour la réduction totale, — 12'', 39 à retrancher de 4500'', dont le reſte 4487'', 61 eſt l'interval, entre le premier & le dernier concourt des deux pendules, en tems moyen. Pendant cet interval les deux Pendules ſont tombés enſemble 67 fois du même côté droit, par rapport à l'obſervateur; & parconſéquent le pendule d'épreuve a gagné ſur celui de l'horloge 2 × 66 = 132 oſcillations, il en a donc fait 4632 pendant que celui de l'horloge en a fait 4500, qui équivalent à 4487'', 61 ſecondes, de tems moyen. Nommant donc

N le nombre des ſecondes de l'horloge.

n le nombre des oscillations, du pendule d'épreuve, faites dans le même interval.

x la longueur du pendule ſimple qu'il s'agit de déterminer. On a

N = 4487″ 61 . . . . . . $n = 4632$,

L = 413, 9467.

Mettant ces valeurs dans la formule,

$$x = \left(\frac{n}{N}\right)^2 \times L.$$

On trouve,

$$x = 441,08 \text{ lignes};$$

ſans aucune réduction.

OB-

OBSERVATION
DE
LA DÉCLINAISON DE L'EGUILLE AIMANTÉE.

FAITE A ST. PÉTERSBOURG LE 23 AOUST 1797.

Par

M. *l'Abbé HENRY.*

Lu à l'Académ. le 14 Décembre 1797.

La méridienne que j'avois tracée à l'Obſervatoire & qui m'a ſervie a placer l'Inſtrument des paſſages, ne pouvant m'être d'aucun uſage pour cette obſervation à cauſe de la proximité du toit du bâtiment qui eſt en fer, il m'en a fallu tracer une autre que n'eut pas cet inconvénient. La petite place qui eſt à coté du Muſeum m'a paru propre à cet effet. Jai employé l'angle ſolide du bâtiment en guiſe de gnomon & j'en ai fait marquer la trace de l'ombre à l'inſtant de la culmination du centre du Soleil au moyen d'un ſignal donné de l'obſervatoire. Jai eu de

cette maniere une ligne denviron cinquante pieds de long que jai doublée en la prolongeant jusqu'a la cloiſon du magaſin à bois, & ayant elevée une perpendiculare à l'extrémité de cette ligne j'en ai marqué la trace ſur cette cloiſon de maniere qu'elle fut très viſible à la diſtance de cinquante pieds. Pour m'aſſurer enſuite que le plan du méridien paſſoit par cette ligne & rafoit l'angle du bâtiment, j'ai fait uſage de la Lune. Comme à cette époque ſa hauteur méridienne étoit très petite, l'ombre de l'angle du bâtiment ſe projettoit jusque ſur la cloiſoin même, à l'inſtant de ſa culmination. Sa coincidence avec la ligne perpendiculaire tracée ſur cette cloiſon m'ayant convaincu de l'exactitude de ma méridienne; vers le milieu de cette ligne j'ai placé ſur une table bien de niveau l'inſtrument déclinatoire & avec les pinnules j'ai alligné les perpendiculaires élévées aux extrémités. L'éguille de l'inſtrument s'eſt fixée ſur 9, 2 dégrés vers l'oueſt & s'eſt replacée conſtamment ſur ce point après l'en avoir tirée un grand nombre de fois. Comme les extrémités de cette ligne ſubſiſtent je me propoſe d'éxaminer, d'ici à quelque-tems, ſi la déclinaiſon a variée & de combien. Mais il reſte a ſçavoir, ſi a cette diſtance du bâtiment, on peut ſuppoſer que le toit ne peut avoir aucune influence ſur la ſituation de l'éguille. Dans le cas contraire le nouveau Cabinet de phiſique de l'Académie en étant trois-a-quatre fois plus voiſin, & ſous un toit de fer, ne pourroit être employé avec ſécurité à faire cette eſpéce d'oſervation.

EX-

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES

FAITES À PYSCHMINSK, PRÈS DES CATERINEBOURG, AUX MONTS OURAL EN SIBÉRIE, EN L'ANNÉE 1791,

ſuivant le nouveau Style.

Par

B. F. J. HERMANN.

Préſenté à l'Académie le 11 Juin 1792.

I. Barometre.

1.) Les hauteurs extrèmes, la variation & la hauteur moyenne du Barometre pour chaque mois de l'année 1791.

Mois	au plus haut.			au plus bas.			variation.	houteur moyenne	
	P.	dou.	jour.	P.	dou.	jour.	dou.	P.	dou.
Janv.	27	5	22. 23. 24.	26	8	27. 28.	9.	27	— $\frac{1}{2}$.
Févr.	27	3	26. 27.	26	7	11. 12.	8.	26	11.
Mars	27	4	29. 30. 31.	26	1	6.	15.	26	8 $\frac{1}{2}$.
Avril	27	3	1. 2.	26	6	17. 18.	9.	26	10 $\frac{1}{2}$.
Mai	27	—	6.	26	5	12. 13. 28. 29.	7.	26	8 $\frac{1}{2}$.
Juin	26	8	5. 8. 9.	26	1	30.	7.	26	4 $\frac{1}{2}$.
Juill.	26	6	12. 13.	26	1	3.	5.	26	3 $\frac{1}{2}$.
Août	26	9	31.	26	2	15.	7.	26	5 $\frac{1}{2}$.
Sept.	26	10	1. 25. 26. 27.	26	4	10.12.13.14.16.17	6.	26	[illegible].
Octo.	26	10	10.18.20.21.28.29.	26	4	14. 17.	6.	26	7.
Nov.	27	4	19. 20. 21.	26	2	2.	14.	26	9.
Déc.	27	4	13. 14.	26	2	4. 5.	14.	6	9.

P. dou. ſignifie: Pouce & douzième partie d'une pouce.

La plus grande hauteur du Barometre en 1791 a donc été obſervée le 22, 23 & le 24 Janvier de $27\frac{5}{12}$ pouce de Paris, ſur laquelle il reſtoit pendant 56 heures.

Ther-

Thermometre de Del'isle 185, 6 jusqu'à 210, vent de l'Eſt le 22, calme le 23 & 24, ciel ſerein, excepté le grand brouillard de froid au matin le 22 & 23.

La plus petite hauteur $26\frac{1}{12}$ le 6 Mars à 10 heures le ſoir; Thermometre 161, 2. ciel couvert, neige & vent fort du Sud.

30 Juin de 6 jusqu'à 2 heure du midi; Thermometre de 120 jusqu'à 123, 8. ciel couvert, vent SOu. & calme.

3 Juillet le matin; therm. 127, 5. ciel demiſerein, vent du Sud.

Ainſi la variation totale $= \frac{16}{12}$ ou 133 centiemes parties de pouce. La hauteur moyenne du Barometre de toutes les mois $= 26\frac{8}{12}$ ou $26\frac{2}{3}$ pouces de Paris, qui repond $28\frac{2}{3}$ pouces de Londres.

Cette hauteur moyenne eſt pour les ſix mois d'été depuis le 1r. Avril jusqu'au 1r. Octobre $= 26\frac{9}{12}$ & pour les ſix mois d'hiver c'eſt à dire depuis le 1r Octobre jusqu'au 1r Janvier 1792 & depuis le 1r Janvier 1791 jusqu'au 1r. Avril de la même année $= 27\frac{1\frac{1}{2}}{12}$.

Les des centes les plus conſidérables du Barometre arrivent ici en été avant & pendant les Orages, pendant le

le vent fort, le tonnere & une grande Chaleur; en hiver avant ou pendant une variation extraordinaire du Thermometre, qui monte quelquefois très-ſubitement; mais en général le Barometre n'eſt pas fort ſujet à des grandes variations; il reſte ſouvent des jours & des ſemaines entieres ſur le même point.

Les montées les plus extrêmes arrivent toujours en hiver pendant le plus grand froid; elles ſont moins conſidérables en été & n'arrivent qu'à un ciel très-ſerein.

Ther-

Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes & leur différence pour chaque mois de l'année 1791.

Mois.	Hauteurs extrêmes.				différence.
	au plus bas.		au plus haut.		
	degré.	jours.	degré.	jours.	degré.
Janvier.	210.	23.	155, 6.	30.	54, 6.
Février.	200, 6.	8, 27.	150.	18. 22. 23.	50, 6.
Mars.	191, 2.	4.	146, 3.	19.	44, 11.
Avril.	178, 1.	1.	131, 3.	29.	46, 10.
Mai.	150.	15.	114, 4.	27.	35, 8.
Juin.	135.	8. 9. 10.	108, 8.	19.20.24.26.28.	26, 4.
Juillet.	138, 8.	25. 26.	114, 4.	15.	24, 4.
Août.	142, 5.	26.	110, 6.	17.	31, 11.
Septembre	150.	27. 30.	116, 3.	22. 21.	33, 9.
Octobre.	161, 2.	18. 20.	131, 3.	26.	29, 11.
Novembre	195.	18.	146, 3.	30.	48, 9.
Décembre.	195.	27. 28.	144, 4.	1. 6.	50, 8.

D'où l'on voit, que le mois de Janvier a été le plus froid.

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Del'isle.

Mois.	Le froid a été plus grand que									La chaleur a été plus grande que				
	209	205	200	195	190	180	170	160	150	150	140	130	120	110
		j	o	u	r	s	.			j	o	u	r	s.
Janv.	1	1	5	2	6	17	18	31	4					
Févr.			2	2	5	5	14	19	9	3				
Mars.					1	6	14	17	26	7				
Avril							2	2	14	29	8	3		
Mai.										16	22	13	4	
Juin.											7	26	22	5
Juill.											10	29	14	
Août										3	17	24	10	
Sept.										14	23	16	5	
Octo.								3	12	27	8			
Nov.					2	10	17	19	9	3				
Déc.					2	6	12	19	15	6				
	1	1	7	4	16	44	77	110	89	108	95	111	55	5

II

Il réſulte de ces deux tableaux des obſervations thermometriques, que le plus grand froid a été de 210 degrés après la gradation de Del'isle le 23 Janvier à 6 heures du matin; Barometre $27\frac{5}{12}$, grand brouillard de froid, puis ciel ſerein & calme.

La plus grande chaleur =		Barométre
108, 8 le 19 Juin	à 2 heures à pres midi.	$26\frac{3}{12}$, ciel demi-couvert, vent du Sud-Oueſt, tonnere du loin.
— — 20		$26\frac{3}{12}$, ciel demi-couvert, vent SOueſt, tonnere & pluie.
— — 24		$26\frac{4}{12}$, ciel couvert, vent du SOueſt, tonnere & pluie.
— — 26		$26\frac{4}{12}$ ciel demi-ſerein, vent du Sud, pluie vers le ſoir.
— — 28		$26\frac{4}{12}$ ciel couvert, vent de l'Eſt.

La différence entre ces deux températures extrémes = 101, 4, de Del'isle ou 54 degrés de Réaumur.

Il y a eu 174 jours de gelée & 180 jours de dégel; 148 jours de gelée continuelle, 170 jours où il n'a gelé point du tout.

Il gela pour la derniere fois le 15 Mai matin, & il recommença à geler le 27 Septembre; l'intervalle entre ces deux époques n'eſt que de 135 jours.

La riviere (Pyſchma) débacla le 24 Avril & charia le 20 Octobre; puis elle débacla encore & recharia le 3 Novembre; l'intervalle entre cette derniere époque & la débacle eſt donc de 193 jours.

Vent.

Vent.

Tableau de la force & de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1791.

Mois.	Calme.	vent doux.	fort.	tres fort.	Oueſt.	Nord.	Eſt.	Sud.	S. Oueſt.	N. Eſt.	S. Eſt.	N. Oueſt.	variable.
		j		o		u		r		s	.		
Janvier.	9	13	7	2	17	—	5	—	—	—	—	—	—
Février.	4	6	16	2	20	3	—	4	1	—	—	—	2
Mars.	5	15	7	4	11	3	—	8	3	4	3	2	9
Avril.	5	16	6	3	13	2	3	2	11	5	—	2	12
Mai.	3	22	4	2	10	3	—	8	3	8	3	4	10
Juin.	—	29	—	1	5	6	4	5	6	5	1	3	6
Juillet.	—	28	—	3	16	7	—	6	4	6	2	6	12
Août.	5	19	7	—	12	2	1	2	1	1	2	8	8
Septembre.	3	18	8	1	15	1	4	2	3	—	3	2	6
Octobre.	1	18	8	4	21	—	1	2	3	—	2	3	6
Novembre.	6	23	1	—	16	2	—	—	4	2	1	4	5
Décembre.	2	22	4	3	26	1	1	—	4	2	1	1	7
	43	229	68	25	182	30	19	39	43	33	18	35	83

Le vent dominant a été celui de l'Oueſt, & il eſt en même tems presque toujours le plus fort.

At-

Atmoſphère.

Mois.	Ciel.			Brouillard.		Pluie.	Neige.
	ſe-rein	demi-couvert	Cou-vert.	hu-mide.	de froid.		
	j	o u	r s.	j	o u	r s.	
Janvier.	5	9	17	—	6	—	7
Février.	9	11	8	—	4	—	12
Mars.	10	14	7	2	7	—	14
Avril.	4	20	6	2	2	4	8
Mai.	1	22	8	1	—	13	2
Juin.	2	16	12	1	—	18	—
Juillet.	—	18	13	1	—	22	—
Août.	1	25	5	3	—	19	—
Septembre.	7	20	3	4	—	12	—
Octobre.	4	15	12	2	—	13	10
Novembre.	8	19	3	—	—	—	11
Décembre.	2	19	10	—	—	—	13
	53	208	104	16	19	101	77

Il a neigé pour la derniere fois le 22 Mai; & il a recommencé à neiger le 1 Octobre; l'intervalle étoit donc de 130 jours.

Il a grêlé 3 fois & tonné en 24 jours. Le nombre des aurores boreales obſervées en cette année eſt de 3, dont celle du 14 Janvier étoit la plus luiſante.

EX-

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES FAITES À ST. PÉTERSBOURG ANNÉE MDCCXCIII.

D'après le nouveau Stile.

Préſenté à l'Académie le 4 Septembre 1794.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne du Baromètre pour chaque mois de l'année 1793.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour & heure	P. cent.	jour & heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	28.79	le 8 après m.	27.11	le 24 à 6 h.s.	168	27.95	28.184
Février	28.54	le 16 à 10 h.s.	27.29	le 27 à 6 h.m.	125	27.91	28.001
Mars	29.02	le 13 à 3 h.s.	27.10	le 4 à 4 h.m.	192	28.06	28.524
Avril	28.93	le 7 à 11 h.s.	27.64	le 14 à 6 h.s.	129	28.28	28.385
Mai	28.77	le 8 à 10 h.m.	27.51	le 28 à 4 h.m.	126	28.14	28.155
Juin	28.46	le 4 à 12 h.m.	27.43	le 20 à 12 h.s.	103	27.95	28.057
Juillet	28.40	le 31 à 8 h.m.	27.86	le 3 à 8 h.s.	54	28.13	28.109
Août	28.51	le 6 à 8 h.m.	27.61	le 24 à 6 h.m.	90	28.06	28.093
Septembr	28.75	le 22 à 11 h.m.	27.77	le 11 à 6 h.s.	98	28.26	28.212
Octobre	28.82	le 14 à 2 h.s.	26.97	le 8 à 10 h.m.	185	27.90	27.812
Novembr.	28.79	le 18 à 6 h.m.	27.64	le 30 à 6 h.m.	115	28.22	28.184
Décembr.	28.62	le 26 à 10 h.s.	27.42	le 11 à 6 h.s.	120	28.02	28.157

m. ſignifie *matin* ou *avant-midi* & s. *ſoir* ou *après-midi*.

La

La plus grande élévation du mercure dans le Baromètre = 29. 02 pouces de Paris, le 13 Mars à 3 heures après midi. Le thermomètre fut au point de congélation de l'eau; le vent vint du SE; le ciel fut ſerein & ſe couvrit enſuite.

La plus petite élévation = 26. 97, le 8 Octobre à 10 heures avant midi. Thermomètre de Délisle 137^{d}. Vent très fort de l'Oueſt: Ciel couvert & pluie à verſe.

La variation totale = 205, ou 2 pouces $\frac{5}{100}$: le milieu = 27. 995.

La hauteur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs obſervées aux mêmes heures, diviſée par leur nombre

1. Pour toute l'année = 28. 160.
2. Pour l'hyver de 1792 à 1793, ou depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793 = 28. 145.
3. Pour l'été de 1793, ou depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1793 = 28. 072.

La hauteur moyenne du Baromêtre a été la plus grande au mois de Mars, & la plus petite au mois d'Octobre. La différence entre ces deux hauteurs moyennes eſt = 0, 712, ou de $8\frac{1}{2}$ lignes duodécimales d'un pouce.

2.)

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

Mois.	Au deſſus de 27. 80 jours.h.	27. 90 jours.h.	28. 00 jours.h.	28. 10 jours.h.	28. 20 jours.h.	un demi-mois au deſſus de Pouces, mill.
Janvier	25. 2	23. 10	22. 0	19. 7	18. 17	28. 295
Février	21. 23	17. 8	13. 15	9. 17	7. 11	27. 990
Mars	28. 5	27. 6	27. 2	26. 7	25. 21	28. 630
Avril	27. 12	26. 13	25. 5	23. 7	21. 13	28. 470
Mai	27. 12	24. 21	21. 5	17. 11	13. 15	28. 143
Juin	24. 17	23. 9	21. 0	15. 18	9. 12	28. 119
Juillet	31. 0	28. 12	22. 21	16. 5	8. 23	28. 114
Août	28. 19	26. 5	20. 0	12. 23	8. 7	28. 058
Septbr.	29. 12	27. 10	24. 18	20. 12	13. 2	28. 165
Octobr.	18. 3	12. 6	7. 7	4. 21	3. 9	27. 818
Novbr.	28. 10	27. 13	24. 8	17. 22	11. 17	28. 136
Décbr.	27. 15	24. 6	20. 16	18. 14	15. 18	28. 217
Somme	318. 10	288. 23	249. 1	202. 20	157. 21	
Depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793						90½ jours au deſſ. de
	141. 21	129. 15	115. 8	98. 3	86. 15	28. 166
Depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1793						92 jours au deſſ. de
	159. 15	142. 15	117. 3	87. 18	56. 20	28. 086

Pendant toute l'année la hauteur du Baromètre a été 182½ jours au deſſus de 28. 145.

3.) Variations ſubites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. P.	cent.	Variat. cent.	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Janv.	18.	6. m.	24	28.	57	—62	180	calme.	c. ſer enſuite brouill.&neige.
	19.	6. m.		27.	95		165	NOu. fort.	c. couvert.
	20.	4. m.	28	27.	68	+65	165	SE. fort.	ciel couvert.
	21.	8. m		28.	33		172	Ou.	ciel couvert.
	22.	12. m	20	28.	08	—54	165	calme S.	c. couvert.
	23.	8. n.		27.	54		160	Ou	beaucoup de neige, c. couv.
	24.	6. s.	30	27.	10	+65	152	Ou.	c couv. enſuite nuages.
	25.	12. s.		27.	75		171	NOu. fort.	ciel ſerein.
	27.	11. s.	35	28.	09	—78	183	Nord.	c. ſer. enſ. neige & c. couv.
	29.	10. m.		27.	31		155	Sud fort.	c. couvert & neige.
Févr.	17.	0. m.	33	28.	54	—50	152	SOu.	c. couvert.
	18.	9. m.		28.	04		150	calme.	ciel couv., enſuite neige.
	23.	10. m	23	28.	38	—55	148	Ou.	brouillard, pluie, c. couv.
	24.	9. m		27.	83		150	S. fort.	brouillard, neige, c. couv.
	24.	6. s.	12	27.	84	—28	148	Ou.	ciel couvert.
	25.	6. m.	8	27.	56	+17	150	Ou.	ciel couvert, neige.
	—	2. s.	8	27.	73	—29	149	Ou fort.	nuages, enſ. c. couv. neige.
	—	10. s	14	27.	44	+33	150	Ou. fort.	neige, c. couvert.
	26.	12. m.	18	27.	77	—48	145	E. fort.	nuag. enſ. c. couv. pl.& neige.
	27.	6. m.		27.	29		147	Ou. ff.	c. couvert, pluie & neige.
	27.	2. s.	8	27.	32	+61	147	Ou. ff.	ciel ſerein.
	27.	10. s.		27.	93		151	Ou.	nuages.

3.) Variations ſubites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour. heure.	Diff. heur.	Baromètr. P. cent.	Variat. cent.	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
	1. 9. s.	24	28. 08	−66	153	Ou. fort.	c. ſerein.
	2. 9. s.		27. 42		145	SOu. fort.	c. couvert, pluie.
Mars	4. 4. m.	32	27. 11	+89	148	Sud.	c. couvert, pluie.
	5. 12. m.		28. 00		153	Ou. calme	c. ſerein.
	6. 3. s.		28. 29		151	Ou.	de même.
Avril	16. 0. m.	24	27. 65	+53	153	NOu. fort.	nuages, neige.
	17. 0. m.		28. 22		151	SE. fort.	nuages.
Mai.	26. 12. s.	24	28. 07	−50	140	calme.	c couv. enſ. en partie ſerein.
	27. 12. s.		27. 57		140	Ou. fort.	c. couv. un peu de pluie.
	7. 12. m	22	27. 82	−85	136	Ou.	c. ſerein, enſuite couvert.
	8. 10. m.	24	26. 97	+61	137	Ou. ff.	c. couv. beaucoup de pluie.
	9. 10. m.	50	27. 58	+54	140	NOu.	c. ſerein, enſuite couv.
	11. 12. m.		28. 12		139	Ou. calme.	de même.
	13. 6. m		28. 02		141	NE.	c. ſerein, enſ. nuages, pluie.
	14. 6. m.	32	28. 62	+80	148	de même.	ciel ſerein.
	14. 2. s.		28. 82		143	de même.	de même.
Da.	14. 12. s.		28. 81		148	NE.	c. ſerein.
	15. 12. s.	48	28. 05	−165	145	Ou.	ciel couvert & pluie.
	16. 12. s.		27. 16		142	Ou. fort.	à verſe, c. couvert.
	17. 5. s	28	27. 18	+63	144	Ou.	c. à demi-couvert, pluie.
	18. 9. s.	19	27. 81	−48	146	Ou.	nuages.
	19. 4. s.		27. 33		143	SOu. ff.	c. couv. à verſe, enſ. c. ſerein.
	20. 9. m.	10	27. 44	−38	143	NOu. fort.	nuages, neige & grêle.
	20. 7. s.		27. 06		147	NOu.	c. couvert.

3.)

3.) Variations ſubites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. P.	cent.	Variat. cent.	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
	20.	7. s.	29	27.	06	+53	147	NOu.	c. couvert.
	21.	12. s.		27.	59		151	NE.	c. ſerein, enſ. couv. & neige.
	22.	12. s.	42	28.	18	+73	154	N.	c. ſerein.
Oct.	23.	6. s.		28.	32		151	N.	de même.
	25.	12. m.	26	27.	95	−60	146	SOu.	c. couvert, pluie, brouillard.
	26.	2. s.		27.	35		143	SOu. fort.	ciel couvert, à verſe.
Nov.	29.	3. s.	15	28.	22	−58	164	S. fort.	nuages, enſ c. couv. & neige.
	30.	6. m.		27.	64		148	NE. fort.	c. couvert, enſuite ſerein.
	6.	0. m.		28.	33		182	calme.	ciel ſerein.
	6.	0. s.	20	28.	25	−50	177	de même.	de même.
Déc.	7.	8. m.		27.	75		172	S. ff.	ciel couvert.
	10.	12. s.	18	28.	37	−95	185	Sud.	c. ſerein, enſ. couv. & neige.
	11.	6. s.	40	27.	42	+83	175	SE. fort.	c. couv. enſ. en partie ſerein.
	13.	10. m		28.	25		171	Ou.	c. en partie couvert.

ff. indique que le vent à été très fort.

Les déſcentes les plus conſidérables ont été d'$1\frac{65}{100}$, ou d'1 pouce $7\frac{4}{5}$ lignes en 48 heures, le 14 Octobre; de $\frac{95}{100}$ pouce, ou de $11\frac{1}{2}$ lignes en 18 heures, le 10 Décembre, & de $\frac{85}{100}$ pouce, ou de $10\frac{1}{4}$ lignes en 22 heures, le 7 Octobre. Les montées les plus ſubite; d'$1\frac{26}{100}$, ou d'1 pouce 3 lignes en 71 heures, le 20 Octobre; d'$1\frac{15}{100}$, ou d'1 pouce 2 lignes en 74 heures le 8 Octobre; de $\frac{89}{100}$, ou de $10\frac{3}{4}$ lignes en 32 heures le 4 Mars, & de $\frac{83}{100}$ pouce, ou de 10 lignes en 40 heures, le 11 Déc. Au reſte les variations les plus conſidérables du Baromètre ont été en Octobre, enſuite en Janvier & en Février: ſurtout celles du 24 au 27 Février, du 7 au 11 Octobre, comme auſſi celles du 10 au 13 Décembre.

1.)

1.) Hauteurs extrêmes, avec leur différence & l'état moyen du froid & de la chaleur, pour chaque mois de l'année 1793.

II. Thermomètre.

Mois.	Hauteurs extrêmes. Au plus bas Degré.	Au plus bas jour & heure.	Au plus haut Degré.	Au plus haut jour & heure.	Différence. Degré	État moyen. Froid moyen. Degré.	État moyen. Chaleur moyen. Degré.
Janvier	188	le 27 à 6 h. m.	149	le 24 à 2 h. s. & le 29 à 10 h. s.	39	171, 0	163, 6
Février	163	le 7 à 6 h. m.	144	le 26 à 2 h. s.	19	153, 5	149, 8
Mars	169	le 10 à 6. h. m.	140	le 31 à 2 h. s.	29	159, 7	149, 0
Avril	159	le 4 à 6. h. m.	125	le 29 à 2 h. s.	34	149, 6	139, 6
Mai	146	le 24 à 11 h. s.	124	le 15 & 16 à 2. h. s.	22	139, 9	132, 2
Juin	139	le 3 à 6. h. m.	114	le 9 à 2 h. s.	25	131, 2	123, 0
Juillet	131	le 1 à 6. h. s.	103	le 20 à 12 h. m.	28	125, 6	115, 8
Août	137	le 9 à 10. h. s. & le 28 à 6. h. m.	104	le 1 à 2 h. s.	33	130, 3	121, 2
Sept.	152	le 22 à 6. h. m.	119	le 3 à 2 h. s.	33	141, 1	132, 7
Octobr.	157	le 23 à 6. h. m.	131	le 4 à 2 h. s.	26	144, 2	139, 7
Novem.	164	le 29 à 6. h. s.	139	le 1.2&15 à 7 h. m.	25	150, 5	146, 9
Décem.	188	le 10 à 10 h. s.	146	le 20 à 2 h. s.	42	167, 6	162, 3

2.)

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que							La chaleur a été plus grande que						
	180 jours	170 jours	160 jours	150 jours	140 jours	130 jours	120 jours	110 jours	120 jours	130 jours	140 jours	150 jours	160 jours	170 jours
Janv.	7	17	28	31	31	31	31					2	9	24
Févr.			4	23	28	28	28					15	28	28
Mars			16	30	31	31	31					18	31	31
Avril				17	28	30	30			4	12	29	30	30
Mai					18	31	31			11	31	31	31	31
Juin						21	30		6	29	30	30	30	30
Juillet						2	30	5	24	31	31	31	31	31
Août						16	28	3	11	31	31	31	31	31
Sept.				1	17	30	30		1	8	26	30	30	30
Octobr.				4	21	31	31				18	30	31	31
Nov.			2	17	30	30	30				3	22	29	30
Déc.	7	15	22	26	31	31	31					5	13	21
Année 1793	14	32	72	149	235	312	361	8	42	114	182	274	324	348
Depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793.														
Hyver.	7	17	68	157	179	181	181			4	12	89	153	174
Depuis le 1 Mai 1793 jusqu'au 1 Novembre 1793.														
Eté.				5	56	131	180	8	42	110	167	183	184	134

3.)

3.) Enumération détaillée des froids, pendant l'hyver de 1792 à 1793, ou depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793, ce qui fait un intervalle de 181 jours d'hyver.

Le froid a ſurpaſſé 180° degrés en 7 jours, le 8. 9. 13. 14. 15. 18. 27 Janvier.

Le froid a été entre

		jours.
170 & 180	le 6. 7. 12. 16. 17. 21. 22. 25. 26. 28 Février	10
160 & 170	le 3. 4. 12. 21 — 24. 27 — 30 Nov. le 1. 2. 6. 8. 9. 16 — 20 Déc. le 3. 4. 5. 10. 11. 19. 20. 23. 29 — 31 Janv. le 1. 2. 7. 11 Févr. & le 7 — 10. 13. 15. 17. 18. 20 — 22. 24 — 28 Mars - - - - - -	51
150 & 160	le 1. 2. 5. 7. 8. 11. 13 — 15. 18 — 20. 25. 26. 29 Nov. le 3. 4. 5. 7. 10 — 15. 21 — 31 Déc. le 1. 2. 24. Janv. le 3. 4. 8. 9. 10. 12 — 22. 24. 26. 27 Févr. le 1. 2. 4. 5. 6. 11. 12. 14. 16. 19. 23. 29 — 31 Mars & le 1 — 12. 14 — 17. 19 Avril - - -	89

4.) Énumeration détaillée des chaleurs pendant l'été de 1793; c'eſt à dire depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1793; ce qui fait un intervalle de 184 jours d'été.

La chaleur a été en 8 jours plus grande que 110 degrés, le 18. 20. 23. 24. 31 Juillet & le 1. 2. 3 Août.

La

La chaleur a été obſervée entre

		jours.
120 & 110	le 4 — 9 Juin, le 2. 6 — 9. 11. 12. 14 — 17. 19. 21. 22. 25. 27 — 30 Juillet, le 4 — 7. 16 — 18. 21 Août & le 3 Septembre -	34
130 & 120	le 1 — 4. 9. 10. 14 — 17. 29 Mai, le 1. 3. 10 — 30 Juin, le 1. 3. 4. 5. 10. 13. 26 Juillet, le 8 — 15. 19. 20. 22 — 31 Août, & le 1. 2. 4 — 7. 29 Septembre - - -	68
140 & 130	le 5 — 8. 11 — 13. 18 — 28. 30. 31 Mai, le 2 Juin, le 8 — 18. 23 — 28. 30 Septembre & le 1 — 13. 16. 28 — 31 Octobre - -	57
150 & 140	le 19 — 22 Septembre & le 14. 15. 17 — 22. 24 — 27 Octobre - - - - -	16

Reſumé des Obſervations thermomètriques.

1.) Pour toute l'année 1793.

Le plus grand froid 188° de Délisle, ou de $20\frac{1}{3}$ degrés d'après Réaumur, fut obſervé 1.) le 27 Janvier à 6 heures du matin. Baromètre 27. 92. Vent du NOu. Ciel ſerein. 2.) le 10 Décembre à 10 heures du ſoir. Baromètre 28. 38. Vent très fort du SE. Ciel ſerein, enſuite couvert.

La plus grande chaleur 103° de Délisle, ou de $25\frac{1}{10}$ degrés d'après Réaumur, le 20 Juillet à 12 heures midi. Baromètre 28. 28. Vent du SE. Ciel couvert, ſuivi d'une groſſe pluie & d'orage.

La différence entre ces deux températures extrêmes 85° de Délisle, qui ſont $45\frac{1}{3}$ degrés de Réaumur.

Le

Le froid moyen, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques, obſervées à 6 heures du matin & à 10 heures du ſoir, diviſée par leur nombre, a été le plus grand en Janvier & le plus petit en Juillet. Sa valeur pour toute l'année eſt = 147° de Délisle, ou d'après Réaumur $1\frac{3}{5}$ degrés de chaleur.

De même la chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermomètriques obſervées à 2 heures après midi, diviſée par leur nombre, a été la plus grande en Juillet, & la plus petite en Janvier. Sa valeur pour toute l'année eſt = $139^\circ\frac{3}{5}$ de Délisle, ou d'après Réaumur $5\frac{3}{5}$ degrés. D'où l'on conclud que la temperature en 1793 a été très douce rélativement aux autres années.

Il n'y a eu auſſi que 149 jours de gelée, & parmi ceux-ci 91 jours, où il a gelé continuellement ou bien, où il n'a dégelé point du tout.

Mais il y a eu au contraire 274 jours, où il a dégelé, & parmi ceux-ci 216 jours, où il n'a gelé point du tout.

Il a entierement ceſſé de geler le 19 Avril, & il a recommencé à geler le 22 Septembre, ainſi après un intervalle de 156 jours.

2.) Pour l'hyver de 1792 à 1793, en comptant depuis le 1. Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793, ce qui occupe un intervalle de 181 jours.

Le plus grand froid 188° de Délisle, ou $20\frac{1}{3}$ degrés d'après Réaumur, le 27 Janvier à 6 heures du matin: voyez ci-deſſus.

Le moindre froid 125° de Déliſle, ou $13\frac{1}{3}$ degrés de chaleur d'après Réaumur, le 29 Avril à 2 heures après midi. Baromètre 28. 38. Calme & ciel ſerein.

La différence entre ces deux temperatures extrèmes 63° de Déliſle, ou $33\frac{3}{5}$ degrés de Réaumur.

Le froid moyen = 158° $\frac{1}{10}$, ou d'après Réaumur $4\frac{1}{3}$ degrés.

La chaleur moyenne = 151° $\frac{1}{5}$, ou d'après Réaumur $\frac{2}{3}$ degré de froid.

Il y a eu 157 jours où il a gélé, parmi leſquels ſe trouvent 92, où la gelée a été continuelle ou bien, où il n'a dégelé point du tout.

Il a dégelé en 89 jours, & parmi ceux-ci ont été 24 jours où il a dégelé continuellement, c'eſt à dire où il n'a gelé point du tout.

Il avoit commencé à geler le 5 Octobre 1792 & il a ceſſé de géler le 19 Avril; ainſi après un intervalle de 196 jours, qu'on peut nommer la durée du froid.

La riviere Néva fut priſe entierement le 22 Novembre 1792, & elle débâcla le 19 Avril 1793; c'eſt à dire après un intervalle de 148 jours, qu'on peut appeller la durée de l'hyver.

3.) Pour l'été de 1793, en comptant depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ce qui comprend un intervalle de 184 jours.

La plus grande chaleur 103° de Déliſle, ou $25\frac{1}{10}$ degrés d'après Réaumur, le 20 Juillet à 12 heures midi: voyez ci-deſſus.

La

La moindre chaleur 157° de Délisle, ou $3\frac{3}{4}$ degrés de froid d'après Réaumur; le 23 Octobre à 6 heures du matin. Baromètre 28. 18. Vent du Nord, ciel ſerein.

La différence entre ces deux temperatures extrémes 54° de Délisle ou $28\frac{4}{5}$ degrés de Réaumur.

La chaleur moyenne = 126°, 9 de Délisle, ou $12\frac{1}{3}$ degrés d'après Réaumur.

Le froid moyen = 135°, 3 de Délisle, ou $8\frac{1}{2}$ degrés de chaleur d'après Réaumur.

Il n'y a eu que 5 jours où il a gelé, & parmi ceux-ci un ſeul jour, où il a gelé ſans interruption.

La derniere gelée a été obſervée le 19 Avril, & il a recommencé à geler le 22 Septembre; ce qui comprend un intervalle de 156 jours d'été.

La riviere qui avoit commencé à débacler le 19 Avril, a été r-priſe la nuit du 30 Novembre au 1 Décembre, ainſi après un intervalle de 225 jours.

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1793.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très fort	Nord.	NE.	Eſt.	SE.	Sud.	SOu.	Oueſt.	NOu.
	jours.	jours	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janv.	7	19	5	0	3	0	5	7	4	0	9	3
Févr.	6	9	12	1	0	0	2	7	5	3	10	1
Mars	12	13	5	1	2	0	7	10	1	3	8	0
Avril	15	11	4	0	0	0	4	11	3	2	10	0
Mai	7	11	9	4	0	2	8	2	2	5	10	2
Juin	5	18	5	2	1	3	8	3	2	1	11	1
Juillet	7	17	6	1	3	2	0	5	0	1	10	10
Août	10	15	5	1	3	2	3	1	5	3	5	9
Sept.	6	13	10	1	5	7	0	2	3	2	11	0
Octob.	1	21	7	2	3	1	1	0	1	10	12	3
Nov.	4	16	9	1	6	4	3	0	9	2	3	3
Déc.	11	15	4	1	2	5	1	2	8	4	7	2
Année 1793.	91	178	81	15	28	26	42	50	43	36	106	34
Depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793.												
Hyver	47	90	40	4	7	2	25	45	16	20	54	12
Depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1793.												
Eté	36	95	42	11	15	17	20	13	13	22	59	25

2.)

2.) Rapport de la force des vents & des quatre plages: tiré du Tableau précédent pour chaque mois de l'année 1793.

Mois.	Degré de Force.	Rapp. des quatre plages			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt.
Janvier	210	5	8	8	10
Février	286	1	5	10	12
Mars	213	2	12	7	10
Avril	177	0	9	10	11
Mai	313	2	10	5	14
Juin	257	3	11	4	12
Juillet	235	9	4	3	15
Août	220	8	5	7	11
Septembre	266	8	5	5	12
Octobre	281	5	2	6	18
Novembre	266	9	5	10	6
Décembre	210	5	5	11	10
Ann. 1793.	244	58	80	86	141
Depuis le 1 Nov. 1792 jusqu'au 1 Mai 1793.					
Hyver	231	14	48	49	70
Depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1793.					
Eté	262	36	35	31	82

Le

Le mois de Mai a été le plus venteux & celui d'Avril le plus calme.

L'Été de 1793 a été conſidérablement plus venteux que l'hyver de 1792 à 1793.

Le vent dominant fut celui de l'Oueſt: il regna ſurtout au mois d'Octobre, enſuite en Juillet & en Mai.

Le vent du Nord a dominé au mois de Novembre, celui du NE au mois de Décembre, celui de l'Eſt aux mois de Juin & de Mai, celui du SE au mois d'Avril, celui du Sud au mois de Novembre, celui du SOu au mois de Septembre, celui de l'Oueſt aux mois d'Octobre, de Septembre, & de Juin & celui du NOu au mois de Juillet.

3)

3.) Direction des vents forts

Direction.	Jours & Mois.	Nombre des Jours.
Nord.	le 15 Mars, le 18 Juillet, le 19. 20. 21 Septembre & le 27 Novembre	6.
NE.	le 17 Mai, le 2. 3 Juin, le 11 Juillet, le 8. 9 Aout, le 8. 10. 11. 12. 17. 18 Septembre, le 8. 9. 30 Novembre & le 8 Décembre - - - -	16.
Eſt.	le 26 Février, le 24. 25 Mai, le 20 Juin, le 4 Août & le 5. 6 Novembre	7.
SE.	le 10 Janvier, le 1. 2. 7. 13 Février, le 14. 29 Mars, le 17. 18 Avril, le 19 Juin & le 11 Décembre - -	11.
Sud.	le 28. 29 Janvier, le 3. 24 Février, le 14 Avril, le 17 Mai, le 1 Septembre, le 29 Novembre & le 7. 18 Déc. -	10.
SOu.	le 4. 5 Fevrier, le 2. 3. Mars, le 1. 15. 18. 29 Mai, le 24 Juillet, le 16 Septembre, le 19. 24. 26. 30 Octobre & le 15 Novembre - - - -	15.
Oueſt.	le 11 Janvier, le 16. 22. 25. 27 Février, le 1 Mars, le 15 Avril, le 3. 4. 23. 28 Mai, le 10. 11. 12 Juin, le 1. 22. 26 Juillet, le 24. 25 Août, le 8. 15. 16 Octobre, le 26 Novembre & le 4 Décembre - - - - - -	24.
NOu.	le 25 Janvier, le 22 Mai, le 10 Juillet, le 31 Août, le 10. 20 Octobre & le 19 Novembre - - - - -	7.
	Somme	o6.

Parmi

Parmi ces 96 jours de vents forts, ont été les plus violans ceux

	Direction	Nombre de jours
du 18 Juillet - - - - -	Nord.	1.
du 3 Juin, du 10 Septembre & du 8 Novembre - - - -	NE.	3.
du 24 Mai - - - - - - -	Eſt.	1.
du 19 Juin & du 11 Décembre - -	SE.	2.
du 2 Mars, du 15 & 29 Mai & du 19 Octobre - - - -	SOu.	4.
du 27 Février, du 4 Mai, du 24 - Août, & du 8 Octobre - -	Oueſt	4.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel. ſerein	Ciel. nuages.	Ciel. couvert.	Brouillard	Pluie. forte	Pluie. petite	Neige. forte	Neige. petite
	jours.	jours	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier.	3	14	14	7			2	9
Février.	0	4	24	7		6		17
Mars.	13	15	3	8		2		4
Avril.	15	11	4	10		4		2
Mai	6	22	3		3	9		
Juin.	4	22	4		5	9		
Juillet	10	16	5	1	8	8		
Août	10	20	1	1	5	9		
Septembre	5	20	5	2	4	14		1
Octobre	3	15	13	3	9	11		4
Novembre	0	10	20	1	5	10		10
Décembre	5	12	14	4		2	1	9
Année 1793.	74	181	110	44	39	84	3	56
					123		59	
Depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793.								
Hyver.	34	58	89	37	3	24	3	57
					27		60	
Depuis le 1 Mai 1793 jusqu'au 1 Novembre.								
Été.	38	115	31	7	34	60	0	5
					94		5	

Il tomba de la grèle 4 fois, le 20 Juin, le 18 Juillet, le 19 Septembre & le 20 Octobre.

Il n'eut que 2 aurores boréales d'obſervées, qui encore ont été fort foibles, le 28 Août & le 20 Octobre.

Le nombre des orages monte à 14, qui tous ne furent pas forts. Les moins foibles furent obſervés, le 20 & 21 Juillet, les plus foibles le 8. 25 Juin, le 7. 8. 24 Juillet & le 15 Août· & il ne fit que tonner de loin le 29 Juin, le 4. 18. 22 Juillet & le 8. 13 Août.

Il y eut 3 Parhélies, le 14. 15 Janvier & le 6 Décembre.

Il neigea pour la derniere fois le 16 Avril & il recommença à neiger le 20 Octobre: ainſi après un intervalle de 187 jours.

La débacle & la priſe de la riviere furent accompagnés des circonſtances ſuivantes.

La riviere commença à débacler le 19 Avril après midi, la hauteur du Baromètre étant de 28, 12 pouces. Thermomètre 139, Vent du SE, ciel ſerein: elle charia beaucoup de glaces le 24. 25, & enſuite en moindre quantité le 28. 29 jusqu'au 30 Avril. La Néva a donc été priſe cet hyver-ci pendant 148 jours.

Le 22 Novembre apparurent les premieres glaces qui furent fort minces & la riviere ne les charia que pendant quelques heures. Le 28 elle recommença à en charier en plus grande abondance & ſans interuption: enfin elle fut priſe la nuit du 30 Novembre au 1 Décembre: Baromêtre 27. 83. Thermomêtre 160. Vent fort du NE, & ciel à demi couvert. L'intervalle entre cette priſe & la debacle au printemps a donc été de 225 jours.

EX-

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES
faites à Moſcou d'après le nouveau Stile, année 1793.

Par M. le Conſeiller d'Etat & Chevalier STRITTER.

Préſenté à l'Académie le 24 Août. 1797.

I. Baromètre.

1.) Hauteurs extrèmes, variation, milieu & hauteur moyenne, pour chaque mois de l'année 1793.

Mois.	Au plus haut P. cent.	Au plus haut jour & heure.	Au plus bas P. cent.	Au plus bas jour & heure.	Variation. Cent.	Milieu. P. cent.	Moyenne hauteur P. cent.
Janvier	28.00	le 14 & 15	26.38	le 25 à 6 h. m.	162	27.19	27. 21
Février.	27.75	le 17.21.22&23	27.21	le 27 à 2 h. s.	54	27.48	27. 50
Mars	28.17	le 14 & 15	27.13	le 4 ——	104	27.65	27. 79
Avril	28.00	le 7. 8 & 9	27.21	le 15 & 16	79	27.60	27. 67
Mai	27.83	le 8 après mid.	27.17	le 18 à 6 h. m.	66	27.50	27. 50
Juin	27.58	le 4 & 5	27.04	le 19 à 6 h. m.	54	27.31	27. 33
Juillet	27.67	le 26 & 31	27.04	le 9 & 10	63	27.35	27. 38
Août	27.75	le 1 & 2	27.13	le 29 & 30	62	27.44	27. 42
Septbre.	27.88	le 23 à 2 h. s.	27.08	le 19 & 20	80	27.48	27. 50
Octobre.	27.92	le 15 à 6 h. m.	26.58	le 21 à 6 h. m.	134	27.25	27. 25
Nov.	27.96	le 21 à 10 h. s.	27.00	le 30 à 10 h. s.	96	27.48	27. 54
Déc.	27.88	le 15. 16 & 31	26.67	le 12 à 10 h. s.	121	27.27	27. 50
A. 1798.	28.17	en Mars.	26.38	en Janvier.	179	27.27	27. 48
H.	28.17	en Mars.	26.38	en Février.	179	27.27	27. 43
E.	27.92	en Octobre.	26.58	en Octobre.	134	27.25	27. 48

H. marque l'intervalle des ſix mois d'hyver, depuis le 1 Novembre 1792 jusq'au 1 Mai 1793.

E. marque l'intervalle des ſix mois d'été ſuivans, depuis ce 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1793.

II.

II. Thermomètre.

Mois.	Hauteurs extrêmes.					État moyen.	
	Au plus bas		Au plus haut.				
	Degré.	jour & heure.	Degré.	jour & heure.	Différence Degrés.	du Froid Degrés.	de la Chaleur Degrés.
Janvier.	193	le 15 à 6 h. m.	155	le 1 à 2 h. s.	3	177,[illegible]	169,
Février.	195	le 3 à 6 h. m.	144	le 27 à 2 h. s.	51	162,6	155,6
Mars.	174	le 26 à 6 h. m.	142	le 1 à 2 h. s.	32	163,2	148,7
Avril.	168	le 5 à 6 h. m.	121	le 30 à 2 h. s.	47	150,7	136,8
Mai.	147	le 13 à 6 h. m.	117	le 4 à 2 h. s.	30	138,6	126,6
Juin.	135	le 20 à 6 h. m.	107	le 9 à 2 h. s.	28	128,3	117,3
Juillet.	134	le 4 à 6 h. m.	103	le 24 à 2 h. s.	31	127,1	115,2
Août.	141	le 10 à 6 h. m.	99	le 2 à 2 h. s.	42	131,2	119,0
Septembre	154	le 23 à 6 h. m.	114	le 3 à 2 h. s.	40	142,1	131,[illegible]
Octobre.	157	le 23 à 6 h. m.	125	le 2 à 2 h. s.	32	145,5	140,3
Novembre	180	le 29 à 6 h. m.	140	le 2 & le 6.	40	153,6	148,7
Décembre.	194	le 11 à 6 h. m.	148	le 20 à 2 h. s.	46	172,5	165,2
An. 1793.	195	le 3 Février.	99	le 2 Août.	96	149,4	139,5
H.	195	le 3 Février.	121	le 30 Avril.	74	162,0	153,0
E.	157	le 23 Octobre.	99	le 2 Août.	58	135,6	125,1

h. m. marque l'heure du *matin* ou *avant midi*.

h. s. marque l'heure du *ſoir* ou *aprés midi*.

2.) Nombre des jours auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que (*).								La chaleur a été plus grande que (†).							
	190 jours.	180 jouts.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	130 jours.	120 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.	170 jours.	180 jours
Janv.	3	13	22	31	31	31	31	31						5	12	21
Févr.	2	3	4	15	27	28	28	28					4	23	25	28
Mars			6	21	30	31	31	31					18	31	31	31
Avril				5	26	30	30	30			7	11	28	30	30	30
Mai						11	29	31		5	19	31	31	31	31	31
Juin.							15	30	5	16	30	30	30	30	30	30
Juill.							14	30	11	21	30	31	31	31	31	31
Août						1	25	29	4	16	29	31	31	31	31	31
Sept.					7	17	30	30		2	14	26	30	30	30	30
Octob					11	25	31	31			3	13	28	31	31	31
Nov.		1	4	6	17	30	30	30					18	28	29	30
Déc.	5	13	16	24	31	31	31	31					4	13	19	26
An. 1793.	10	30	52	102	180	235	325	362	20	60	132	174	253	314	330	357
H.	5	16	42	97	168	181	181	181			7	12	7	140	158	178
E.					18	54	144	181	20	60	125	162	181	184	184	184

(*) ou bien le Thermomètre a été plus bas que —

(†) ou bien le Thermomètre a été plus haut que —

III. Vent.

Mois.	Calme & Vent médiocre	Vent fort.	Vent très-fort.	Degré de Force	Rapport des quatre plages. Nord	Eſt	Sud	Oueſt
	jours.	jours.	jours.					
Janvier	18	13	0	277	9	5	8	9
Février	5	18	5	456	3	3	15	7
Mars	17	11	3	322	11	9	7	4
Avril	6	18	6	437	10	7	9	4
Mai	6	13	12	513	8	6	10	7
Juin	3	13	14	563	12	3	8	7
Juillet	10	11	10	458	12	3	7	9
Août	4	16	11	513	17	3	5	6
Septembre	5	15	10	497	14	2	6	8
Octobre	5	16	10	493	12	0	10	9
Novembre	6	21	3	397	11	5	8	6
Décembre	17	10	4	493	9	6	10	6
Année 1793.	120	175	88	444	128	52	103	82
H.	61	89	31	397	49	32	65	35
E.	33	84	67	507	75	17	46	46

IV.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel				Pluie		Neige	
	ſerein	demi-couvert	couvert	Brouillard	forte	petite	forte	petite
	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.	jours.
Janvier	3	9	19	4		2		18
Février	3	3	22	0		2	1	15
Mars	11	7	13	1		0		9
Avril	8	10	12	3		3		5
Mai	3	7	21	1	5	10		
Juin	0	7	23	1	6	15		
Juillet	0	15	16	0	7	7		
Août	3	9	19	0	5	11		
Septembre	1	8	21	2	8	11	1	2
Octobre	0	2	29	0	4	15	1	9
Novembre	1	4	25	5	4	8	3	5
Décembre	4	7	20	1		1	3	16
Année 1793	37	88	240	18	39	85	9	79
					124		88	
H.	27	36	118	14	1	19	7	84
					20		91	
É.	7	48	129	4	35	69	2	11
					104		13	

Il-y-a eu

18 Orages le 2. 4. 5. 6. 7. 11. 17. 26. 28 Juin, le 1. 11. 12. 13. 14. 25 Juillet, & le 3. 4. 17 Août.

4. Parhélies le 14. 18 Janvier, & le 10. 27 Décembre.

6. Paraſelénes le 14 Janvier, le 15. 16 Juin, le 22. 23 Octobre & le 19 Novembre.

Il n'a grélé qu'une ſeule fois, le 7 Juin.

La hauteur moyenne du Baromètre a été en hyver depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793 = 27. 43; c'eſt à dire de $\frac{5}{100}$ pouce plus petite qu'en été: ayant été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1793 = 27. 48.

La hauteur moyenne du Baromètre a été la plus grande en Mars = 27. 79, & la plus petite en Janvier = 27. 21.

Le froid moyen a été le plus grand en Janvier, de 177°, 1.

La chaleur moyenne a été la plus grande en Juillet de 115°, 2 d'après la graduation de Délisle.

Il a gelé pour la derniere fois le 17 Avril, après un intervalle d'hyver de 188 jours; c'eſt à dire depuis le 11 Octobre 1792, où il avoit commencé à geler.

En 1793 il a recommencé à geler le 19 Septembre, après un intervalle de 155 jours.

Il a gelé continuellement pendant 112 jours, & il n'a gelé point du tout en 185 jours.

Le nombre des jours de gelée continuelle a été depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793 = 109, & depuis ce 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1793 = 3.

Le

Le nombre de jours où il n'a gelé point du tout, a été depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793 = 13, & depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1793 = 166.

Le mois le plus venteux a été celui de Juin; & le mois le plus calme celui de Janvier.

Le vent dominant a été pour toute l'année celui du *Nord*; & pour les ſix mois d'hyver depuis le 1 Novembre 1792 jusqu'au 1 Mai 1793, celui du *Sud*, & pour les ſix mois d'été ſuivans depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, encore celui du *Nord*.

Il a neigé pour la derniere fois le 19 Avril, après un intervalle de 198 jours: c'eſt à dire depuis le 3 Octobre 1792, où il avoit commencé à neiger.

Il a recommencé à neiger le 19 Septembre, après un intervalle de 153 jours d'Été.

NATURAL HISTORY

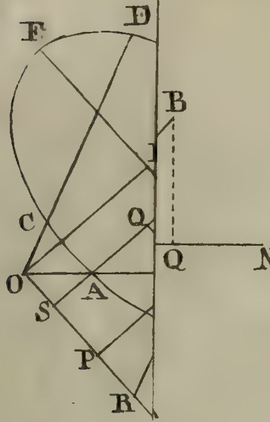


Fig. 2.

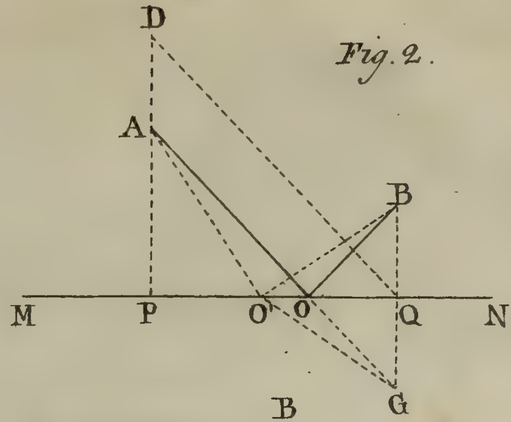
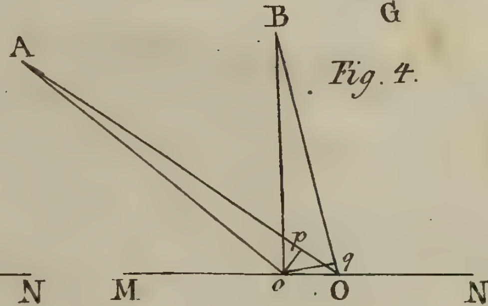
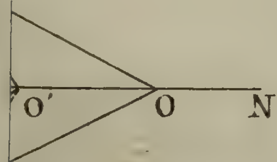


Fig. 4.





5.



Fig. 6.

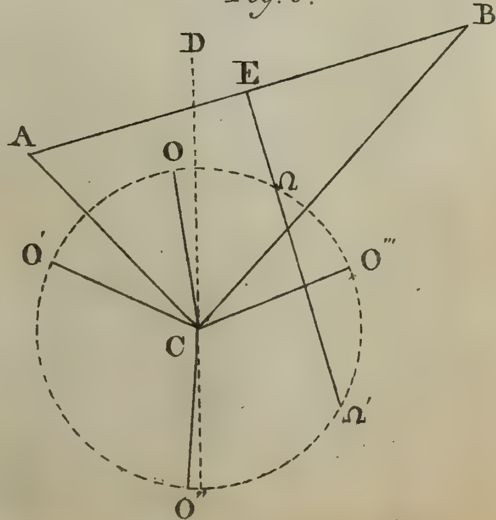


Fig. 1.

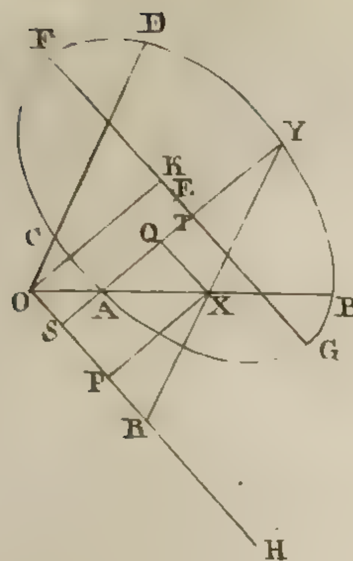


Fig 2

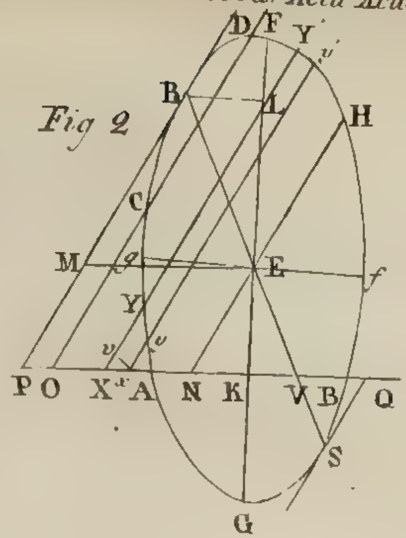


Fig. 5

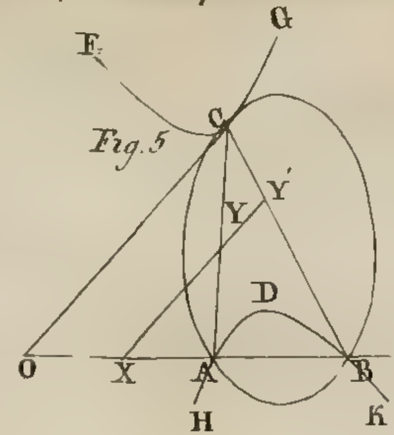


Fig. 3.

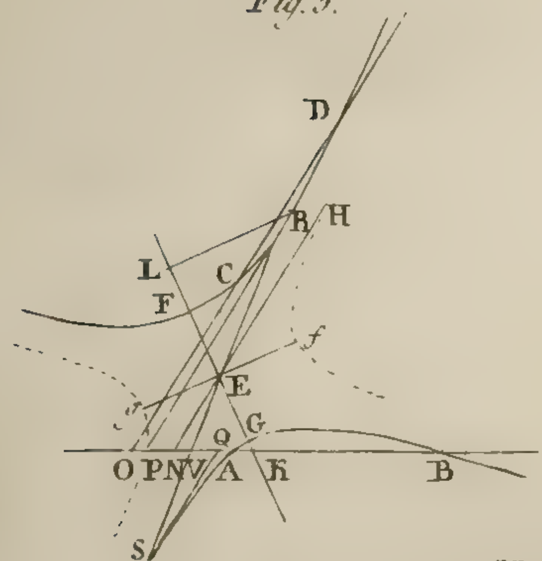


Fig. 4.

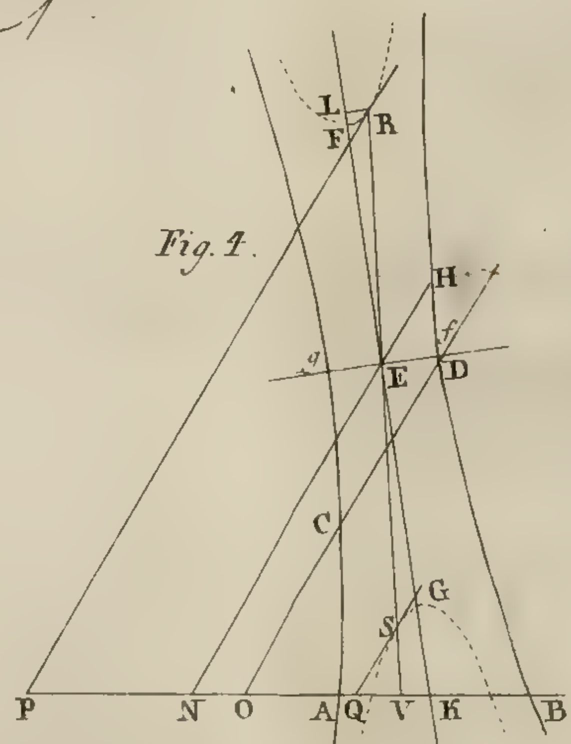


Fig. 6.

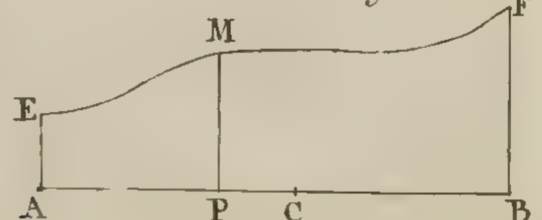


Fig. 1.

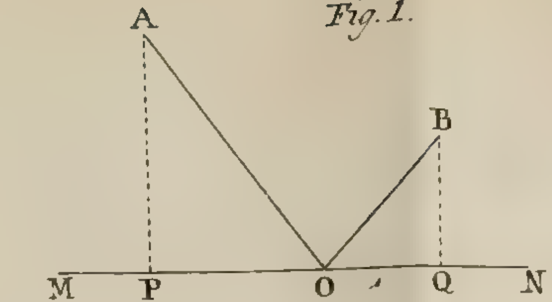


Fig. 2.

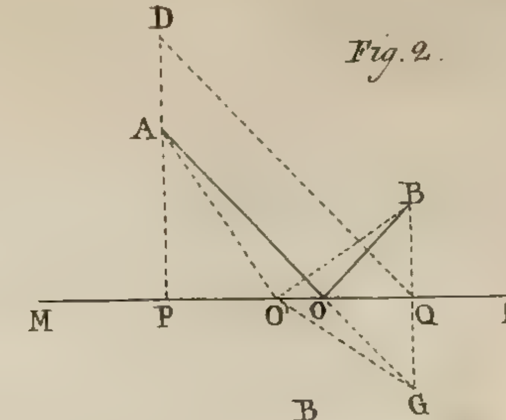


Fig. 3.

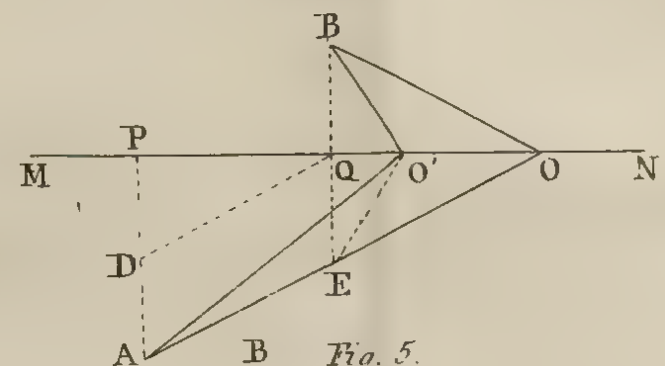


Fig. 4.

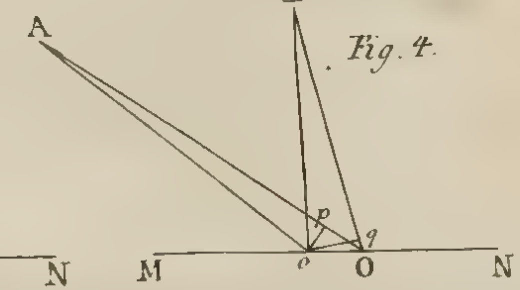


Fig. 5.

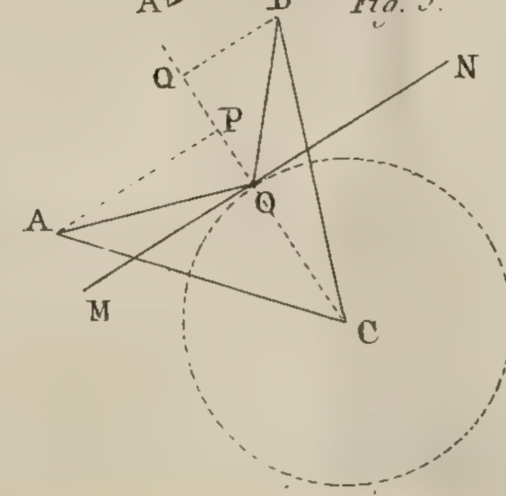
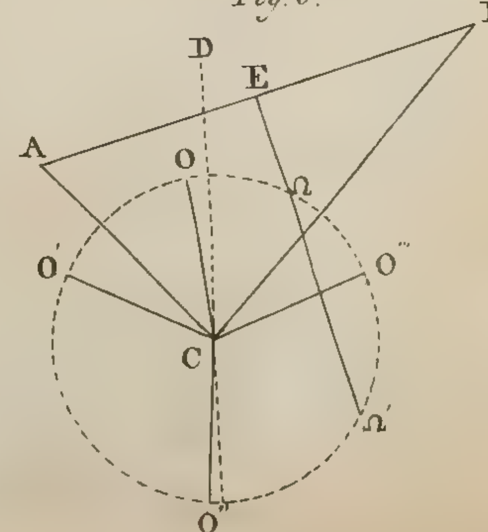


Fig. 6.



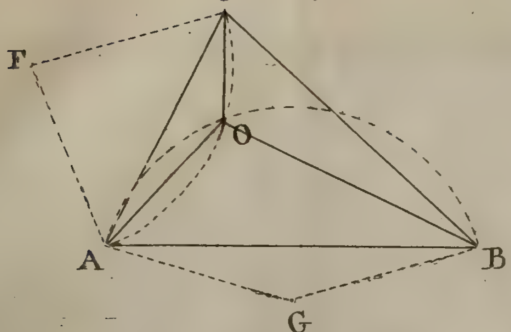


Fig. 1.

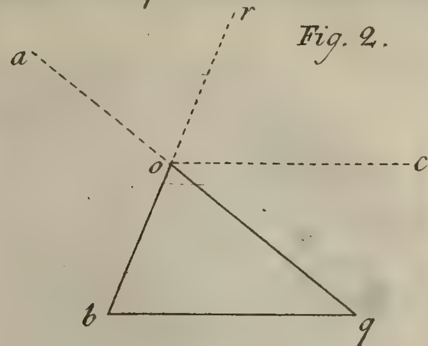


Fig. 2.

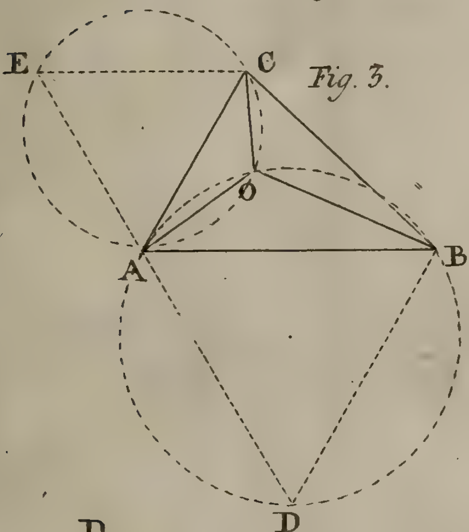


Fig. 3.

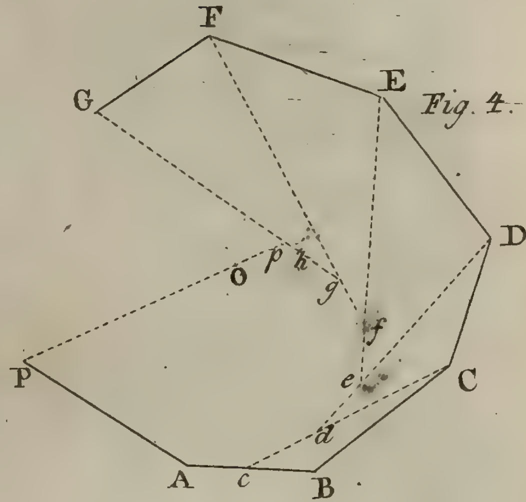


Fig. 4.

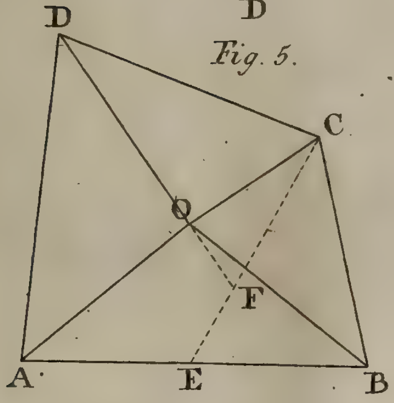


Fig. 5.

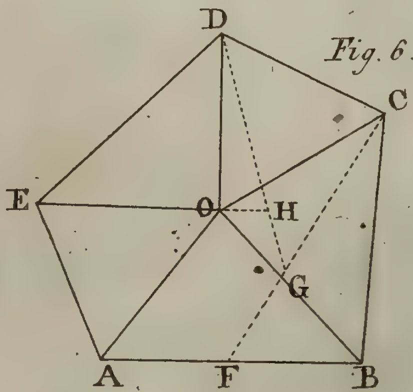


Fig. 6.

NATURAL HISTORY.

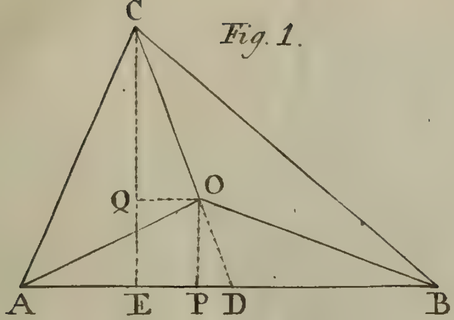


Fig. 1.

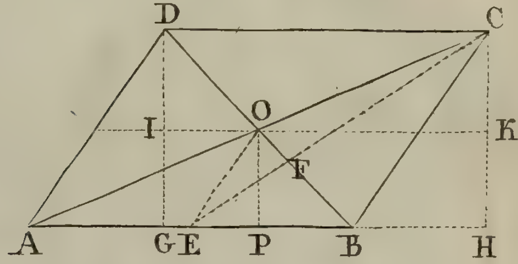


Fig. 2.

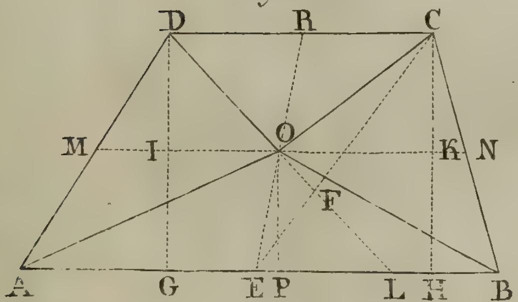


Fig. 3.

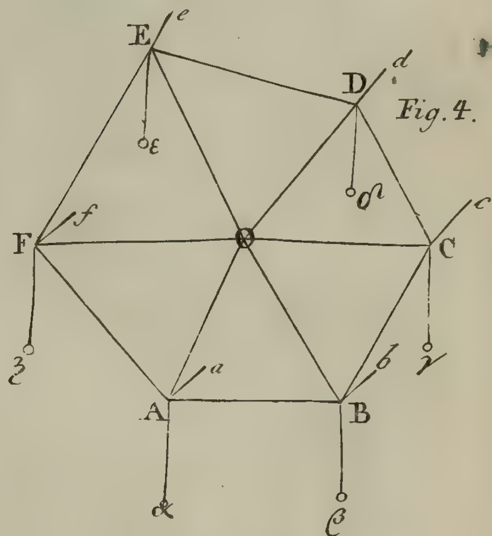


Fig. 4.

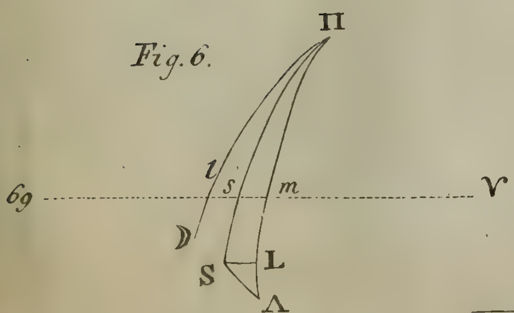


Fig. 6.

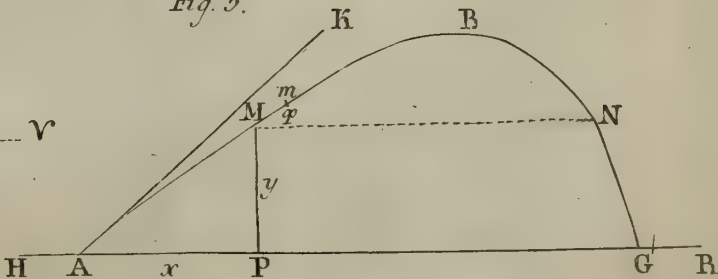
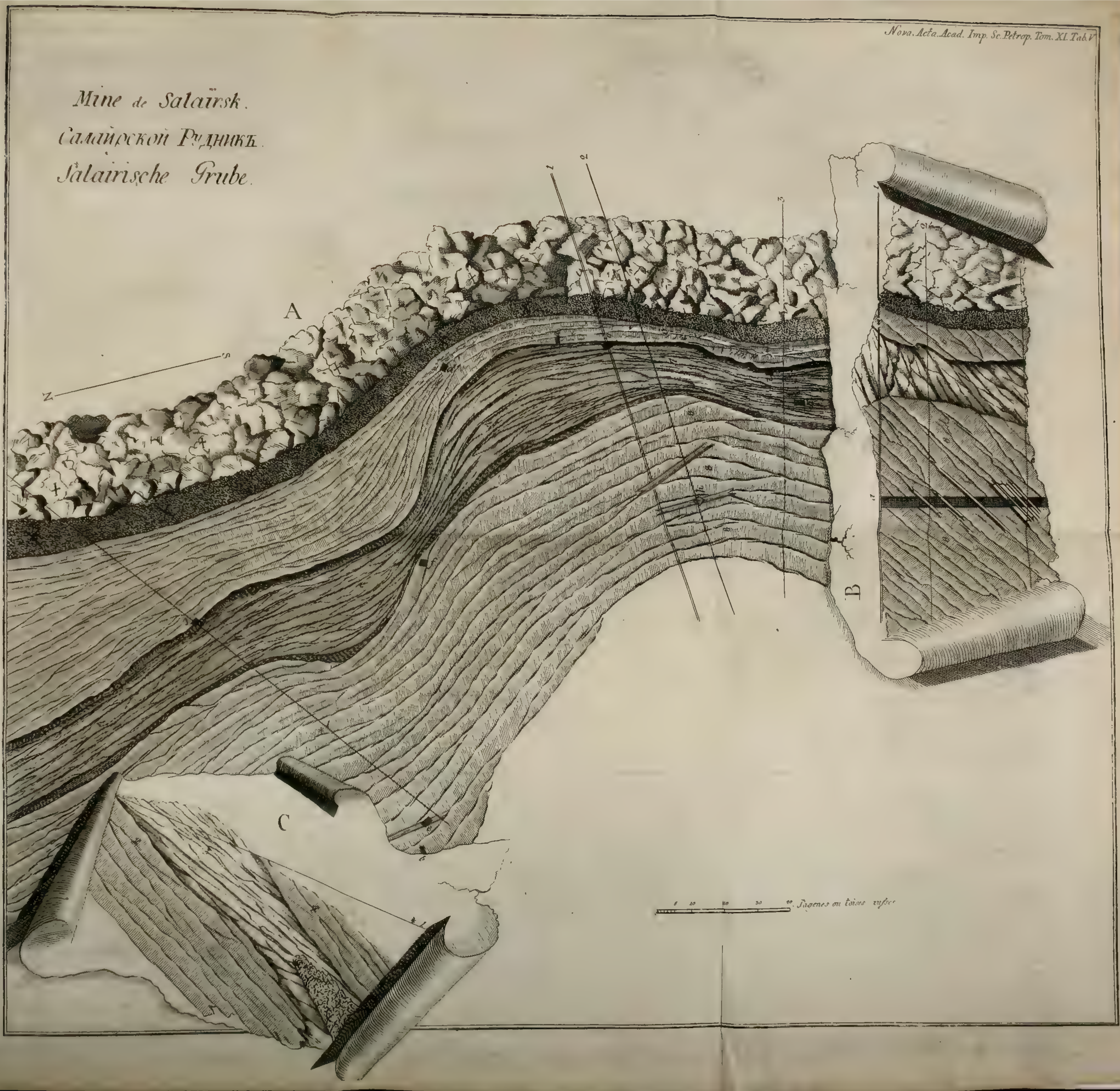


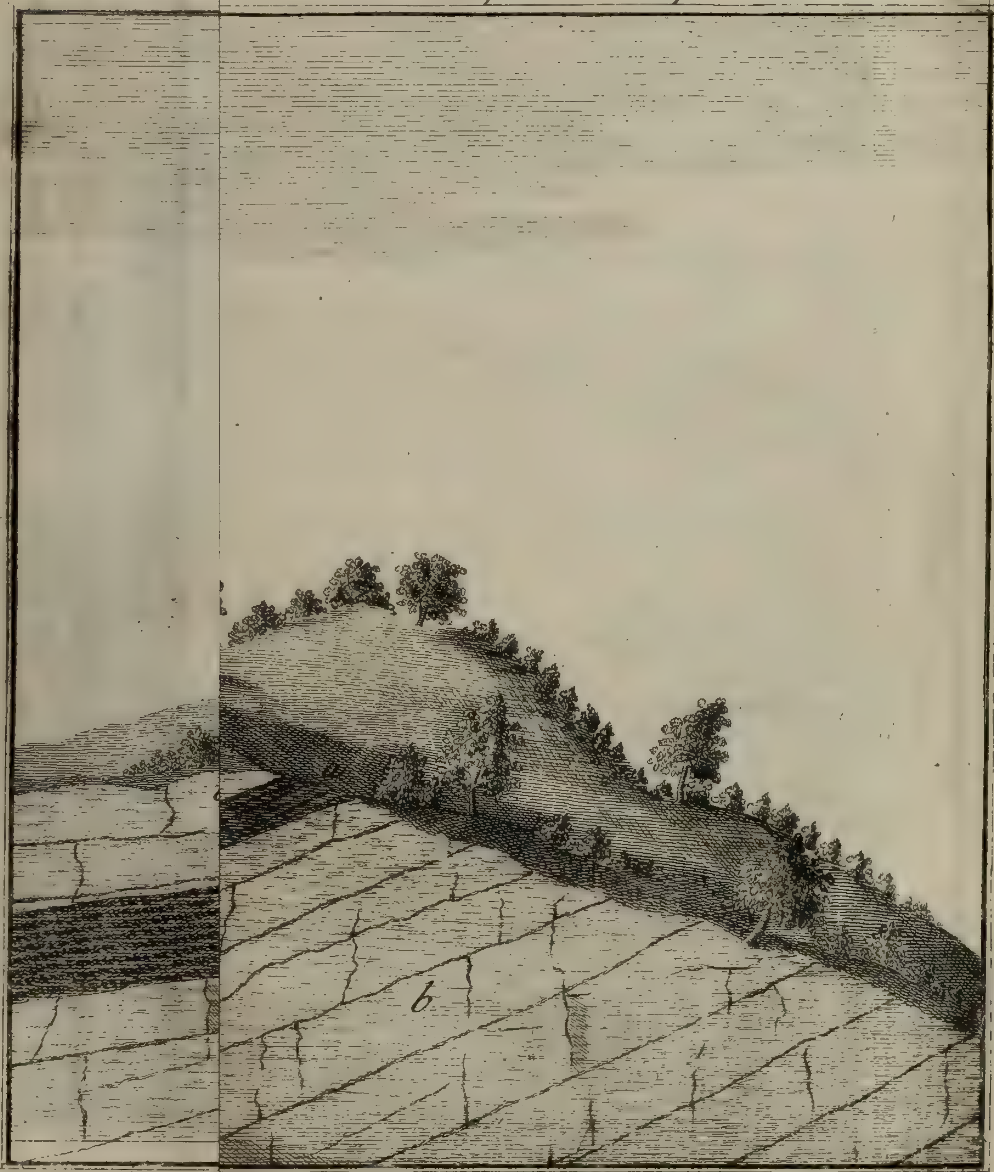
Fig. 5.

NATURAL HISTORY


Mine de Salaïrsk.
Салайрской Рудникъ.
Salairiſche Grube.
A
B
C
N
S
5 10 20 30 40. Sagenes ou toises ruſses

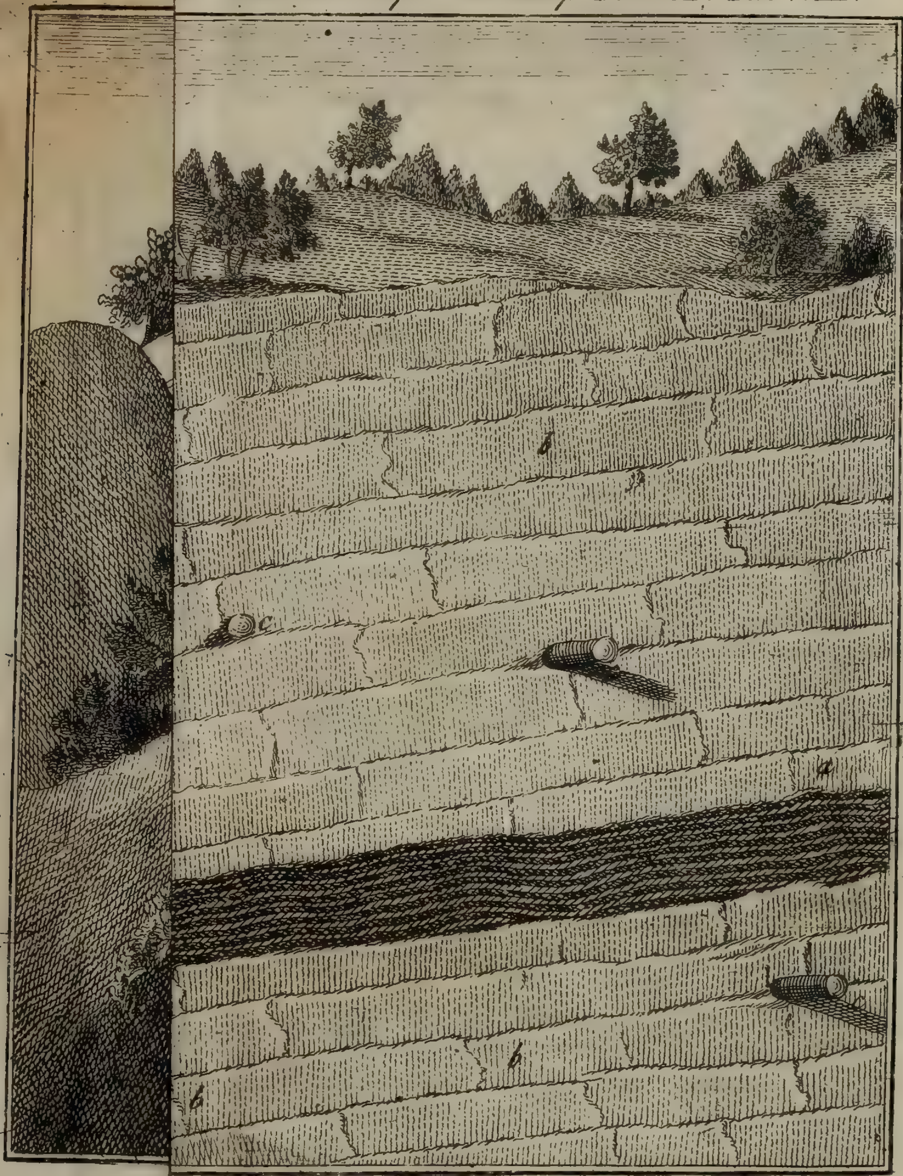


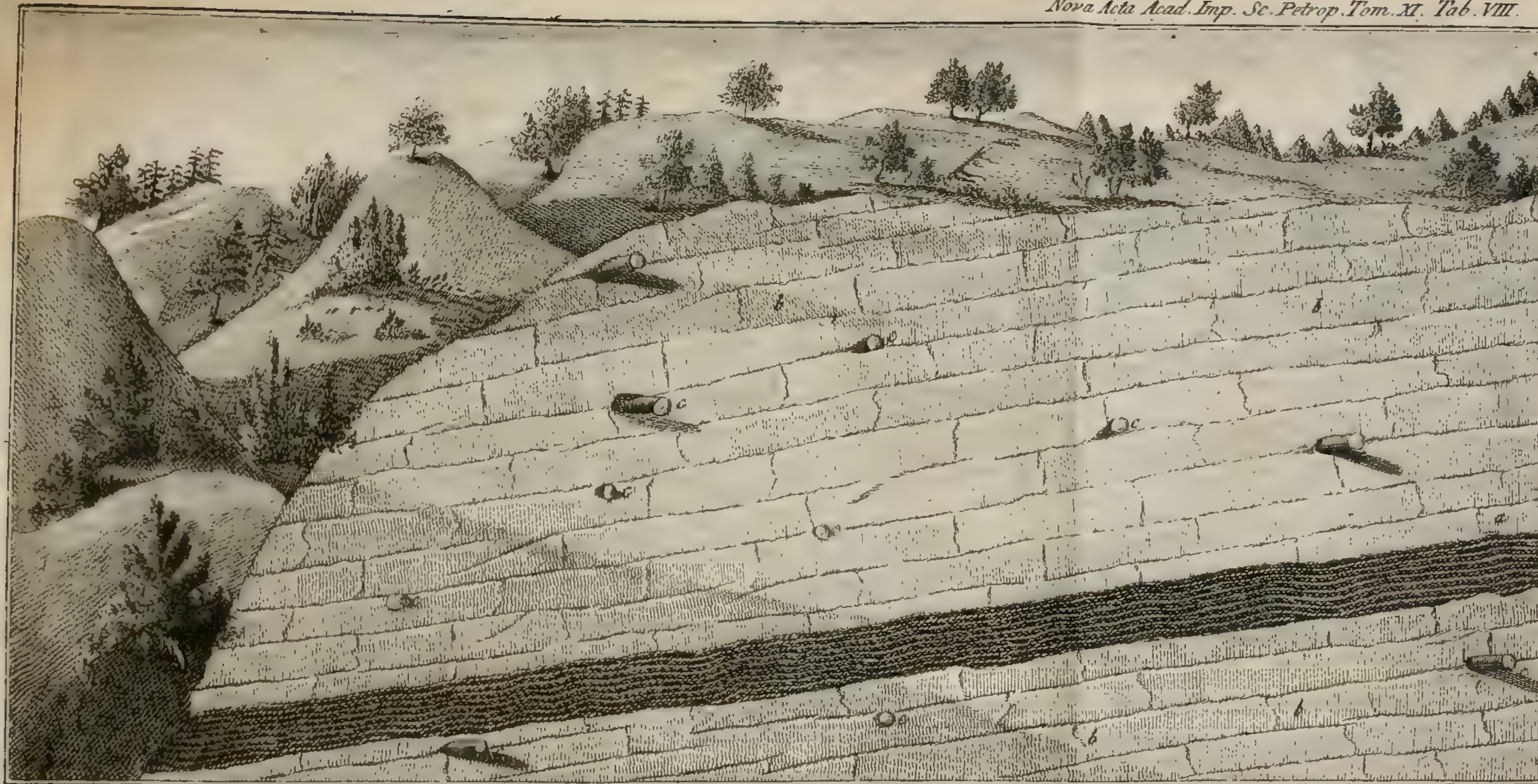



b



Couches de Charbons de terre de Méretskaya.





Couche de Charbons de terre de Konovalova.















